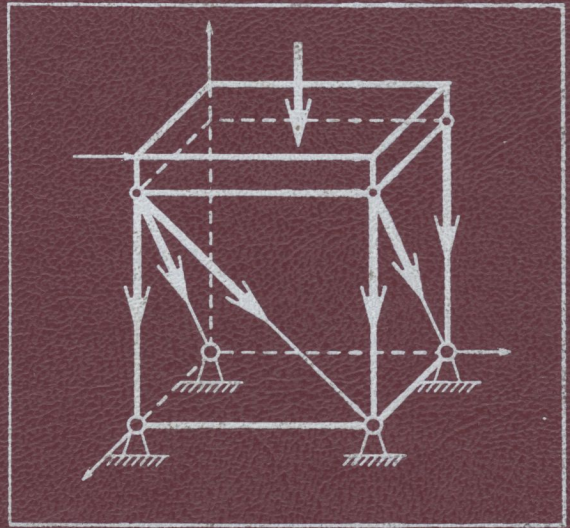


А. А. БОНДАРЕНКО
О. О. ДУБІНІН
О. М. ПЕРЕЯСЛАВЦЕВ

Теоретична МЕХАНІКА



СТАТИКА
КІНЕМАТИКА



ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

А.А. Бондаренко, О.О. Дубінін, О.М. Переяславцев

Серія "ВИЩА ОСВІТА ХХІ СТОЛІТТЯ"

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

А. А. БОНДАРЕНКО
О. О. ДУБІНІН
О. М. ПЕРЕЯСЛАВЦЕВ

Теоретична МЕХАНІКА

ПІДРУЧНИК

У двох частинах

Частина 1

СТАТИКА
КІНЕМАТИКА

Допущено Міністерством освіти і науки України

НТБ ВНТУ



432908

531(075) Б 81 2004

Бондаренко А. А. Теоретична Механіка



ІАБОЧЕМЕНТ-2

Київ

"Знання"

2004

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
Б81

Допущено Міністерством освіти і науки України для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-3075 від 11.07.2001 р.)

Рецензенти:

О.О. Горошко, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного університету імені Тараса Шевченка;

О.О. Рассказов, доктор технічних наук, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки Українського національного транспортного університету, професор

432 908

Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М.

Б81 Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. — Ч. 1: Статика. Кінематика. — К.: Знання, 2004. — 599 с. — (Вища освіта ХХІ століття).

ISBN 966-8148-01-0

Це фундаментальний підручник з теоретичної механіки. Українською мовою такого типу підручник видається вперше. За змістом він відповідає програмі навчальної дисципліни "Теоретична механіка" для вищих навчальних закладів і складається із двох частин: частина 1 — "Статика. Кінематика"; частина 2 — "Динаміка". Крім основних розділів курсу теоретичної механіки до підручника включено нові розділи, у яких розглядаються основи статички, кінематики і динаміки суцільного середовища. Значне місце відводиться розв'язку практичних задач. Всього у підручнику розглянуто 406 задач. Майже половина із них відповідають практичним потребам виробництва і подані з розв'язками і детальним аналізом цих розв'язків.

Розраховано насамперед на студентів механічних спеціальностей. Підручник буде корисний всім, хто вивчає теоретичну механіку, а також аспірантам, викладачам механіки вищих навчальних закладів, інженерно-технічним працівникам.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 966-8148-01-0

© А.А. Бондаренко, О.О. Дубінін,
О.М. Переяславцев, 2004
© Видавництво "Знання", 2004

НТБ ВНТУ
м. Вінниця

ЗМІСТ

Передмова	11
Вступ	14
1. Предмет теоретичної механіки	14
2. Основні поняття теоретичної механіки	16
Розділ I. СТАТИКА	21
Глава 1. Предмет статички твердого тіла. Основні поняття та аксіоми статички твердого тіла	21
1.1. Сила. Поняття системи сил, еквівалентних та зрівноважених систем сил, рівнодійної сили	21
1.2. Аксіоми про сили. Теорема про три сили	23
1.3. Проекція сили на вісь. Аналітичне задавання сили. Проекції сили на площину. Проеціювання сили на осі декартової системи координат	29
1.4. Момент сили відносно точки та осі	32
1.5. Теорема про момент рівнодійної системи сил (теорема Варіньона)	36
1.6. Поняття головного вектора та головного моменту системи сил	37
1.7. Розподілені сили	39
1.8. Аксіома про рівність дії та протидії. Активні і пасивні сили. В'язі та їх реакції. Аксіоми про в'язі	45

1.9. Зовнішні та внутрішні сили. Метод перерізів	49
1.10. Задачі статички твердого тіла	49
Запитання для самоперевірки	50
Глава 2. Збіжна система сил, що діє на тверде тіло	52
2.1. Еквівалентне перетворення системи збіжних сил	52
2.2. Умови рівноваги системи збіжних сил	54
2.3. Методика розв'язання задач статички твердого тіла. Приклади розв'язання задач з рівноваги збіжної системи сил. Методичні вказівки	56
Запитання для самоперевірки	76
Глава 3. Довільна просторова система сил, що діє на тверде тіло	78
3.1. Лема про дві сили	78
3.2. Загальні теореми статички твердого тіла	79
3.3. Пара сил. Момент пари сил	82
3.4. Теорема про еквівалентність пар сил. Рівновага системи пар сил	84
3.5. Еквівалентне перетворення довільної просторової системи сил	85
3.6. Статичні інваріанти системи сил	88
3.7. Динамічний гвинт. Зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта	90
3.8. Окремі випадки еквівалентного перетворення довільної просторової системи сил	93
3.9. Умови рівноваги довільної просторової системи сил	95
3.10. Приклади розв'язання задач статички твердого тіла з рівноваги довільної просторової системи сил. Методичні вказівки	97
Запитання для самоперевірки	108
Глава 4. Довільна плоска система сил, що діє на тверде тіло	110
4.1. Еквівалентні перетворення довільної плоскої системи сил	110
4.2. Алгебрична величина моменту сили відносно точки та моменту пари сил	111
4.3. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил	113
4.4. Визначення натягу важкої підвішеної нитки	116
4.5. Розрахунок плоских ферм	121
4.6. Приклади розв'язання задач з рівноваги довільної плоскої системи сил. Методичні вказівки	126
Запитання для самоперевірки	146
Глава 5. Тертя твердих тіл	147
5.1. Поняття про силу тертя ковзання. Кут тертя. Конус тертя. Кут природного укосу	147
5.2. Тертя гнучких тіл	151
5.3. Тертя вертіння	153
5.4. Тертя кочення	154

5.5. Приклади розв'язання задач з рівноваги твердого тіла з урахуванням сил тертя. Методичні вказівки	155
Запитання для самоперевірки	165
Глава 6. Центр ваги твердого тіла	166
6.1. Поняття центра ваги твердого тіла. Координати центра ваги	166
6.2. Координати центра ваги однорідних твердих тіл	167
6.3. Теореми про центр ваги однорідних твердих тіл	169
6.4. Способи визначення координат центра ваги твердих тіл	173
6.5. Елементи геометрії плоских твердих тіл	176
6.6. Приклади розв'язання задач з визначення центра ваги однорідного твердого тіла. Методичні вказівки	179
Запитання для самоперевірки	196
Глава 7. Використання персональних комп'ютерів при розв'язанні задач статички твердого тіла	197
7.1. Алгоритм розв'язання задач статички твердого тіла з використанням ПЕОМ	197
7.2. Приклади розв'язання задач статички твердого тіла з використанням ПЕОМ	198
Глава 8. Типові задачі статички твердого тіла для самостійної проробки та самоконтролю	229
8.1. Рівновага твердого тіла під дією збіжної системи сил	229
8.2. Рівновага твердого тіла під дією довільної просторової системи сил	243
8.3. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил. Урахування сил тертя	262
Глава 9. Основи статички суцільного середовища	283
9.1. Суцільне середовище. Об'ємні та поверхневі сили. Напруження ...	283
9.2. Загальні диференціальні рівняння рівноваги суцільного середовища. Закон парності дотичних напружень. Компоненти напруженого стану в точці	288
9.3. Напруження на довільній площадці, що проходить через дану точку суцільного середовища. Граничні умови	295
9.4. Деформації у точці суцільного середовища. Компоненти деформованого стану в точці. Рівняння нерозривності деформацій. Відносна об'ємна деформація	297
9.5. Залежності між напруженнями та деформаціями в ідеально-пружному суцільному середовищі	304
9.6. Приклади визначення напруженого та деформованого стану пружного тіла	309
Запитання для самоперевірки	320

Глава 10. Тиск важкої нестисливої рідини на поверхні твердих тіл ...	321
10.1. Ідеальна рідина. Гідростатичний тиск. Незалежність величини гідростатичного тиску від орієнтації площадки, на яку він діє. Загальне рівняння рівноваги ідеальної рідини. Розподіл гідростатичного тиску в шарі ідеальної рідини при дії на рідину сил тяжіння. Поверхні рівня	321
10.2. Сила тиску важкої рідини на поверхні твердого тіла. Визначення центра тиску	324
10.3. Приклади розв'язання задач статички з урахуванням сил тиску важкої нестисливої рідини на тверді тіла.....	334
Запитання для самоперевірки	340
Розділ II. КІНЕМАТИКА	342
Глава 11. Кінематика точки	342
11.1. Предмет кінематики. Основне завдання кінематики	342
11.2. Векторний та координатний (декартові координати) способи задання руху точки. Кінематика точки в декартовій системі координат	343
11.3. Деякі властивості диференціювання векторів за скалярним аргументом	349
11.3.1. Диференціювання вектора сталого модуля.....	349
11.3.2. Диференціювання вектора, який визначений у рухомій системі відліку.....	352
11.4. Натуральний спосіб задання руху точки. Натуральна система координат. Кінематика точки в натуральних координатах	353
11.5. Зв'язок між кінематикою точки в декартовій та натуральній системах координат	359
11.6. Рівномірний і рівнозмінний рух точки.....	360
11.7. Криволінійні координати. Кінематика точки в криволінійних координатах	362
11.8. Визначення вектора швидкості та вектора прискорення точки в полярній, циліндричній та сферичній системах координат	367
11.9. Методика та приклади розв'язання задач кінематики точки	376
Запитання для самоперевірки	393
Глава 12. Кінематика твердого тіла	397
12.1. Визначення положення вільного твердого тіла в даній системі відліку. Рівняння руху вільного твердого тіла. Кількість ступенів вільності. Основні завдання кінематики твердого тіла	397
12.2. Поступальний рух твердого тіла	399
12.3. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Закон руху тіла. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла	401
12.4. Рівномірне і рівнозмінне обертання твердого тіла навколо нерухомої осі	403
12.5. Визначення швидкості точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі	405

12.6. Визначення прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі	407
12.7. Перетворення обертальних рухів твердого тіла	408
12.8. Плоскопаралельний рух твердого тіла. Рівняння руху. Незалежність обертальної частини плоскопаралельного руху від вибору полюса	410
12.9. Визначення швидкості довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі. Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що сполучає ці точки. Миттевий центр швидкостей. Центроїди	413
12.10. Визначення прискорення довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі. Миттевий центр прискорень	418
12.11. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки. Кути Ейлера. Рівняння руху тіла. Миттева вісь обертання, миттева кутова швидкість, миттєве кутове прискорення	426
12.12. Визначення миттєвої кутової швидкості і миттєвого кутового прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки	432
12.13. Визначення швидкості і прискорення довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки	436
12.14. Рух вільного твердого тіла в загальному випадку. Визначення швидкості і прискорення довільної точки тіла	441
12.15. Методика та приклади розв'язання задач з кінематики твердого тіла	444
Запитання для самоперевірки	477
Глава 13. Складний рух точки і твердого тіла	480
13.1. Поняття про складний рух точки	480
13.2. Теорема про додавання швидкостей у складному русі точки	482
13.3. Теорема про додавання прискорень у складному русі точки (теорема Коріоліса)	485
13.4. Поняття про складний рух твердого тіла	488
13.5. Додавання поступальних рухів твердого тіла	489
13.6. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються в одній точці	490
13.7. Додавання обертань навколо паралельних осей	493
13.8. Метод зупинки	497
13.9. Додавання поступальних і обертальних рухів	499
13.10. Методика та приклади розв'язання задач з кінематики складного руху точки і твердого тіла	502
Запитання для самоперевірки	514
Глава 14. Типові задачі кінематики для самостійної проробки та самоконтролю	516
14.1. Кінематика точки	516
14.2. Кінематика обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі	534

14.3. Кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла	538
14.4. Кінематика твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки	549
14.5. Кінематика складного руху точки і твердого тіла.....	553
Глава 15. Основи кінематики суцільного середовища	563
15.1. Визначення положення і руху суцільного середовища. Змінні Лагранжа і Ейлера	563
15.2. Основні характеристики механічного руху суцільного середовища	568
15.3. Визначення прискорень часток суцільного середовища за методом Ейлера	576
15.4. Механізм руху суцільного середовища.....	577
15.5. Окремі випадки руху суцільного середовища	582
15.5.1. Незмінне середовище. Формула Ейлера	582
15.5.2. Потенціальний (безвихровий) рух суцільного середовища	584
15.5.3. Завихрений рух суцільного середовища	588
15.6. Приклади розв'язання задач з кінематики суцільного середовища	591
Запитання для самоперевірки	596
Література	598

ПЕРЕДМОВА

Усвідомлюючи той факт, що у вітчизняній літературі недостатньою мірою представлені підручники з теоретичної механіки для вищих навчальних закладів, видані українською мовою, які мають належний науковий і методичний рівень, автори пропонують свій варіант підручника, спираючись на багаторічний досвід викладання теоретичної механіки в Національному університеті харчових технологій. Матеріал підручника відповідає сучасним вимогам курсу теоретичної механіки для вищих навчальних закладів і викладений так, що може бути корисним як для студентів денної та заочної форм навчання, які вивчають курс у повному обсязі, так і для студентів, які вчаться за скороченими програмами.

Оскільки теоретична механіка поділяється за властивостями матеріальних тіл, рівновага чи рух яких вивчається, на механіку твердих тіл і механіку тіл, що здатні деформуватись, та механіку рідини і газу (механіка суцільного середовища), то автори вирішили дати відповіді на питання статички, кінематики та динаміки суцільного середовища, що природно виникають як у студентів, так і у фахівців.

Поряд з турботою про доступність і чіткість викладу матеріалу особливу увагу в підручнику приділено тлумаченню основних понять і положень теоретичної механіки та їх зв'язку з реальною дійсністю і виробничою практикою.

У першій частині запропонованого підручника міститься розділ теоретичної механіки "Статика", який складається з двох частин.

У першій частині розділу “Статика” в класичному стилі викладено основні поняття та аксіоми статички, розглянуто різні системи сил і наведено умови їх рівноваги. Подано також теорії і приклади розв’язання задач тертя твердих тіл та центра ваги твердого тіла. Наведено методику використання, алгоритм та приклади розв’язання задач статички твердого тіла з використанням персональних комп’ютерів (глави 1—8).

Теоретичну частину курсу викладено переважно векторним способом — найлаконічнішим і таким, що найбільш відповідає поняттям механіки.

Розвитку у студентів умінь застосовувати теоретичні положення механіки до розв’язання конкретних питань і задач приділено у підручнику значне місце (близько 30 % його обсягу). Крім загальних методичних вказівок до розв’язання основних типів задач у розділі “Статика” наведено докладні розв’язання 112 задач, із них близько половини взято з практики виробництва переробних галузей промисловості. Крім того, після кожної глави розміщено запитання для самоперевірки.

У відповідних місцях підручника нагадуються і пояснюються відомості з векторної алгебри і векторного аналізу, необхідні для викладу тих чи інших положень теоретичної механіки.

У другій частині розділу “Статика” викладено основи статички суцільного середовища, наведено поняття об’ємних та поверхневих сил, напруження, доведено диференціальні рівняння рівноваги суцільного середовища (рівняння Нав’є), наведено приклади визначення напруженого та деформованого стану пружного тіла, розв’язання задач статички з урахуванням сил тиску важкої нестисливої рідини на тверді тіла (глави 9—10).

Друга частина підручника містить розділ теоретичної механіки “Кінематика”, який складається з трьох частин: кінематика точки, кінематика твердого тіла та основи кінематички суцільного середовища.

Кінематика (від грец. $\chi\acute{\iota}\nu\eta\mu\alpha$ — рух, зміна) є спеціальним розділом теоретичної механіки, в якому механічний рух досліджується незалежно від сил, що діють на тіла. Кінематику можна розглядати як “геометрію руху” і вважати, з одного боку, вступом до динаміки, оскільки встановлення основних кінематичних понять і залежностей необхідне для вивчення руху тіл з урахуванням сил, а з другого боку, методи кінематички мають і самостійне практичне значення, наприклад при вивченні передачі руху в машинах і механізмах. З цієї причини під впливом машинобудування і відбувалося виділення кінематички в першій половині XIX ст. у самостійний розділ теоретичної механіки.

У першій частині розділу “Кінематика” (глава 11) в класичному стилі викладено основні задачі кінематички: встановлення законів руху точки відносно деяких систем відліку та визначення всіх кінематичних характеристик (траєкторії, швидкості, прискорення) певного руху. Особливу увагу приділено добору задач, які ілюструють теоретичний матеріал. Задачі ці, на думку авторів, мають зв’язати теоретичний курс кінематички із суміжними науками (теорія механізмів і машин, балістика, приладобудування тощо) і бути прикладом практичного застосування теоретичної механіки.

У другій частині цього розділу (глава 12) — кінематиці твердого тіла — ставляться та розв'язуються дві задачі кінематики твердого тіла: встановлення та вивчення руху тіла в цілому та його кінематичних характеристик і вивчення руху кожної з його точок окремо.

У кінематиці складного руху твердого тіла розглянуто дві задачі: розкладання складного руху тіла на складові рухи (аналіз) та складання простих рухів (синтез). Як при аналізі, так і при синтезі рухів йдеться про розкладання та складання рухів у певний момент.

У главі 15 подано основи кінематики суцільного середовища (пружне тіло, рідина, газ), а також відомості про визначення положення і руху суцільного середовища, основні характеристики цього руху, визначення прискорень часток суцільного середовища, окремі випадки руху тощо, наведено приклади розв'язання задач з кінематики суцільного середовища. Для успішного засвоєння теоретичного матеріалу і набуття навичків у розв'язанні задач у цьому розділі містяться приклади розв'язання як типових задач (68 задач зі збірника задач В.М.Мещерського), так і прикладних (28 задач), в основному з практики переробних галузей промисловості.

Після кожної глави також наведено запитання для самоперевірки, опрацювання яких, безсумнівно, сприятиме засвоєнню теоретичної механіки і застосуванню її методів на практиці.

ВСТУП

1. Предмет теоретичної механіки

Світ за своєю природою матеріальний. Природа постає перед нами у нескінченному розмаїтті речей та явищ, які мають різноманітні властивості. Однак у всіх цих речах та явищах існує дещо спільне, і цим спільним є матерія. Матерія — це єдина й універсальна субстанція світу. Матерія безмежно складна і невичерпна. Немає та і не може бути “первинних” найпростіших форм, з яких все виникає і в які все перетворюється. Найменша з відомих у наш час частка матерії також нескінченно складна та невичерпна, як і значно більші утворення. Матерія не може бути знищена і не може бути створена з нічого.

Як єдина та універсальна субстанція світу матерія реально існує лише у конкретних формах або видах. Конкретні види існування матерії мають не абсолютний, а відносний характер. Вони видозмінюються і взаємоперетворюються, завжди залишаючись різними формами прояву єдиної матерії. Природа існує не як випадкова сукупність ізольованих тіл. Усі матеріальні тіла утворюють цілісні системи тісно взаємопов’язаних об’єктів, певні структурні утворення, що підпорядковані тій чи іншій єдиній домінуючій у них закономірності.

У нескінченній зміні відносних властивостей та форм існування матерії залишаються сталими такі її абсолютні і невід’ємні властивості, що називають атрибутами або універсальними формами існування, як рух, простір та час. Світ є неперервним рухом матерії, і її рух відбувається у просторі і в часі.

Матерія вічно й безперервно розвивається, перебуваючи у неперервному русі. Рух є основною властивістю матерії та формою її існування. Матерія і рух не можуть існувати незалежно одне від одного. Світ являє собою безмежні у просторі і нескінченні в часі різні форми руху матерії.

Визнання нерозривності матерії та руху тісно пов'язане з ідеєю збереження руху. Закон збереження руху тісно пов'язаний із законом збереження матерії. Цей закон виявляє взаємозв'язок і взаємоперехід форм руху матерії та стає переконливим доказом, що рух притаманний самій матерії, бо він також зберігається, як зберігається і сама матерія.

Умовно можна виділити найбільш значні форми руху матерії, які часто трапляються в природі: 1) механічний рух — найпростіша форма руху матерії; 2) фізико-хімічні процеси; 3) електромагнітні процеси; 4) теплові процеси; 5) біологічні процеси; 6) внутрішньоатомні та внутрішньоядерні процеси; 7) соціально-економічні процеси; 8) вища форма руху матерії — процес мислення.

Кожна з форм руху має свої специфічні особливості, закономірності, що притаманні тільки їй на відміну від інших. Відмінність форм руху матерії становить об'єктивну основу для відповідного поділу науки на окремі галузі, кожна з яких вивчає специфічні закономірності певної форми руху.

Наука, що вивчає закономірності найпростішої форми руху матерії — механічної, дістала назву механіки.

Механічним рухом називається такий прояв руху матерії, який у межах задачі, що ставиться, зводиться до зміни положення у просторі і в часі одного матеріального об'єкта відносно іншого.

Механічний рух тією чи іншою мірою супроводжує всі інші форми руху матерії.

Вивчення більш складних форм руху матерії потребує попереднього уявлення про механічний рух та знання законів механіки. Тому механіка має відношення до всіх явищ природи і творень техніки, до всього природознавства.

“Механіка необхідна при вивченні поведінки плазми у магнітному полі, тобто дослідженні однієї із самих гострих проблем сучасної фізики — керування термоядерною реакцією.

Механіка пронизує всі ідеї будівництва — від споруджування гребель, мостів до зведення височених веж телебачення, увесь транспорт — від морських кораблів і залізничних потягів до повітряних лайнерів.

Механіка становить значну частину науки про Землю — науки про рух повітряних мас, про рух океанських хвиль та течію рік і льодовиків, про землетруси і вулканічну діяльність.

Законам механіки підпорядковані переміщення тварин сушею, політ птахів і комах, плавання риб і китів, процес кровообігу і рух лімфи у живому організмі, процес ділення клітини та процес утворення мускульної сили. Медицина використовує механіку при визначенні діагнозу захворювання та створенні штучних органів тіла людини.

Механіка відіграла основну роль у розвитку теоретичних основ повітроплавання та теорії руху ракет.

Без знання механіки неможливо провести розрахунки технологічних процесів у машинобудуванні, металургії, легкій промисловості, при видобуванні

корисних копалин, у сільськогосподарському виробництві та харчовій промисловості”¹.

Теоретична механіка — це частина механіки, яка вивчає загальні закони механічного руху макроскопічних матеріальних тіл (тіл, маса яких набагато більша за масу атомів, з яких вони складаються).

Мета теоретичної механіки — відкриття, пізнання та практичне застосування загальних законів механічного руху, який має місце в природі та здійснюється людиною в практичній діяльності. Вона збагачує вчених та інженерів новими методами, допомагає розкрити справжній зміст різноманітних явищ природи і технічної практики.

Визначення теоретичної механіки як науки, що вивчає закономірності механічного руху матеріальних об’єктів, позбавлено змісту доти, доки не з’ясовано, що означають терміни “простір”, “час” та “матеріальний об’єкт”. Роз’ясненню того, який зміст вкладає у ці терміни теоретична механіка, присвячено наступний параграф.

2. Основні поняття теоретичної механіки

Рух матерії відбувається у просторі і в часі. Наукові уявлення про простір і час розвиваються в зв’язку з розвитком понять про матерію, рух, взаємодію, оскільки людські уявлення про простір і час відносні, але з цих відносних уявлень створюється *абсолютна істина*.

Теоретична механіка ґрунтується на законах І.Ньютона². Тому вона ще називається ньютонівською або класичною механікою. Викладаючи закони механічного руху, І.Ньютон упровадив такі поняття про *простір* і *час*³: *простір існує сам по собі, незалежно від речей; він являє собою необмежену пустоту, абсолютний вакуум, що має три виміри (довжину, ширину та висоту). Простір нерухомий і незмінний, абсолютно проникний, він не впливає на рух тіл і сам не зазнає впливу з боку тіл*. Закономірності простору, що вивчаються геометрією, скрізь однакові. Геометрія простору є евклідова геометрія. Проте пізнати властивості простору самого по собі (“абсолютного простору”) неможливо, оскільки різні його частини не відрізняються одна від одної. Простір пізнається тільки через тіла, що містяться в ньому. Різні точки простору відрізняються одна від одної тільки за матеріальними частками, які розміщуються у цих точках. Відстань між точками простору можна визначити або здійснюючи переміщення між цими точками твердого тіла, що є масштабом довжини, або за часом руху тіла, швидкість якого відома. Сукупність місць, що займають тіла, І. Ньютон називає відносним простором.

¹ Ишлинский А.Ю. Механика: идеи, задачи, приложения. — М.: Наука, 1985. — С. 32—33.

² Ньютон Исаак (1635—1727) — англійський фізик, механік, астроном і математик, член Лондонського королівського товариства.

³ Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Перевод А.Н. Крылова: Собр. трудов. — Т. VII, 1936. — С. 30.

Час, за І.Ньютоном, — це тривалість, яка існує сама по собі, незалежно від того, відбуваються чи ні будь-які події. Час спливає неперервно і рівномірно, від минулого до майбутнього. Спливання часу ні від чого не залежить, воно скрізь однакове. Тому І.Ньютон називає його абсолютним. Тривалість матеріального процесу визначається тим, з яким проміжком часу він збігається. Проте різні моменти часу відрізняються один від одного тільки за подіями, що відбуваються в ці моменти. Проміжки часу можуть бути визначені за допомогою періодичних матеріальних процесів (обертання Землі навколо осі, коливання маятника або пружини тощо).

І. Ньютон дає також поняття *абсолютного* та *відносного руху*. Абсолютним він називає *переміщення тіла з одного “абсолютного місця” в інше, тобто з однієї частини пухого простору в іншу за визначений проміжок абсолютного часу; відносний рух*, за І.Ньютоном, *являє собою зміну положення даного тіла відносно інших тіл, що приймаються за нерухомі упродовж проміжку часу, визначеного за певним годинником*. Опис руху тіла буде відповідати його “істинно абсолютному руху” лише у тому разі, якщо відносна швидкість та прискорення тіла будуть збігатися з його абсолютною швидкістю та прискоренням. Таке збігання відбулося б, якщо б у світі існувала система абсолютно нерухомих тіл та годинника, хід якого є абсолютно рівномірним.

Відмінність “істинно абсолютного руху” від відносного І. Ньютон бачить у тому, що зміна абсолютної швидкості тіла завжди повинна мати причину — зовнішню дію на це тіло.

Зміна ж відносної швидкості може відбуватися і за відсутності такої дії на тіло; достатньо, щоб зовнішні дії були прикладені до тіл, відносно яких цей рух визначається.

Отже, щоб якимось упорядкувати уявлення про простір і час, І. Ньютон пропонує прийняти їх як деякі вмістища тіл, які не залежать від цих тіл та їх руху. Такій підхід звичайний в природознавстві — це метод ідеалізації. Ньютонівська ідеалізація — абсолютний евклідів тривимірний однорідний і ізотропний простір та абсолютний арифметизований час — лише наближено відображає реальні властивості простору та часу, проте, як свідчить досвід, для руху тіл зі швидкостями, набагато меншими за швидкість світла, ця ідеалізація дає достатню для практики точність. Ньютонівське уявлення про простір і час є першим наближенням до реального простору та часу¹. Творець більш строгої теорії — теорії відносності — А. Ейнштейн писав: “Нехай ніхто не думає, що велике творення І.Ньютона може бути спростоване теорією віднос-

¹ Друге наближення пов’язане з теорією відносності. Згідно з теорією відносності, властивості простору і часу істотно залежать від тіл, що взаємодіють у них. Теорія відносності доводить, що помітні кількісні відхилення при обчисленні руху на підставі уявлень про простір та час, прийнятих у класичній механіці, виявляються тільки при великих швидкостях тіл, порівняних зі швидкістю світла у космічному просторі, або в околі великого нагромадження матерії, яке порівнюється з масою Сонця. Тому класична механіка є механікою “малих швидкостей”, а механіка, що будується на теорії відносності (релятивістська), — механікою “великих швидкостей”.

ності або якою-небудь іншою теорією. Ясні та широкі ідеї І. Ньютона навічно збережуть своє значення фундаменту, на якому побудовані сучасні фізичні уявлення”¹.

На підставі розглянутих уявлень про простір і час у теоретичній механіці при вивченні механічного руху тіл впроваджується поняття *системи відліку*.

Системою відліку називається сукупність, що складається з тіл відліку (тіла, відносно яких вивчається рух інших тіл) та годинника, що призначений для вимірювання часу.

Зауважимо, що у тривимірному однорідному та ізотропному просторі можна як абстракцію сукупності тіл відліку прийняти систему трьох взаємно перпендикулярних площин. Три взаємно перпендикулярні прямі, що утворюються від перетину цих площин, називаються *осьми координат*, а утворена таким чином система — *декартовою системою координат*. Аналогічно можна ввести й інші системи координат² (косокутні, криволінійні та ін.), однак декартова система є простішою для опису руху тіл, і тому набула широкого застосування в механіці.

Оскільки час вважається абсолютним, то, визначаючи систему відліку, можна обмежитися визначенням тільки тіл відліку, або системи координатних осей, пов’язаних з цими тілами.

Системи відліку можуть бути або нерухомими відносно деякої однієї системи, яка приймається за абсолютну (така система відліку називається інерціальною³), або рухатися довільно відносно неї.

Як наука, що вивчає одну з форм руху матерії, теоретична механіка вивчає рух не реальної матерії з усіма її різноманітними властивостями, а ідеалізованих об’єктів (моделей).

Найпоширенішою моделлю, яка відображає тільки деякі з цих властивостей, а саме протяжність (геометричну форму матеріального тіла) і речовинність (масу та її розподіл у деякому геометричному об’ємі), є *абсолютно тверде тіло*.

Абсолютно тверде тіло (надалі — просто тверде тіло) — це матеріальне тіло, відстань між будь-якими точками якого в процесі руху залишається незмінною; інакше кажучи, абсолютно тверде тіло завжди зберігає свою геометричну форму.

Насправді, як відомо з досвіду, не існує абсолютно твердих тіл. Будь-яке тверде тіло за відповідних умов змінює свою форму (деформується). Модель абсолютно твердого тіла вводиться з таких причин: 1) якщо деформації твердого тіла малі, що часто має місце в дійсності, то у першому наближенні деформаціями твердого тіла можна знехтувати; 2) розглядаючи матеріальні тіла як абсолютно тверді, ми значно спрощуємо дослідження взаємодії цих тіл, а також умов, за яких дане тіло зберігає свій початковий механічний стан⁴, наприклад стан спокою відносно інерціальної системи відліку.

¹ Ейнштейн А. Збірник наукових праць: У 4 т. — М.: Наука, 1967. — Т. 4. — С. 270.

² Недекартові системи координат розглянуто в розділі “Кінематика”.

³ Докладно про інерціальну систему відліку йдеться в розділі “Динаміка”.

⁴ Під механічним станом твердого тіла мається на увазі стан його спокою або рух відносно системи відліку.

Однак якщо модель абсолютно твердого тіла є достатньою для вивчення окремого випадку руху тіл — стану спокою, то при русі навіть такої спрощеної моделі матеріального об'єкта задача дослідження її руху є далеко не простою, оскільки рух окремих її точок у загальному випадку не однаковий. Тому, вивчаючи закон руху матеріальних об'єктів, доводиться починати дослідження цього руху з більш простої моделі — *матеріальної точки*.

Матеріальна точка — це матеріальне тіло, розмірами якого, вивчаючи його рух, можна знехтувати.

Питання про те, чи можна розглядати той чи інший об'єкт як матеріальну точку, визначається не розмірами цього об'єкта, а властивостями його руху та ступенем ідеалізації задачі.

Якщо матеріальні точки пов'язані між собою так, що будь-яка точка не може рухатися або перебувати у стані спокою незалежно від інших, то такі точки утворюють систему матеріальних точок, або механічну систему.

Системи матеріальних точок можуть бути змінними або незмінними.

Незмінною системою називається система матеріальних точок, в якій взаємне розташування точок при її русі або спокої залишається незмінним. Якщо відстань між точками системи в процесі руху або спокою змінюється, система називається *змінною*.

Подане вище визначення системи матеріальних точок має значну спільність. Кожне матеріальне тіло являє собою систему матеріальних точок. Так, абсолютно тверде тіло — це незмінна система матеріальних точок, що неперервно заповнює деяку частину простору.

Абстракція у вигляді абсолютно твердого тіла дає можливість вивчати механічний рух матеріальних об'єктів, не пов'язаний з істотними змінами їх форми, зокрема з деформацією. Вивчення механічного руху тіл, який істотно залежить від їх деформації, а також руху рідини, газів, газорідних та газоповітряних потоків тощо ґрунтується на іншій абстракції — суцільному середовищі.

Найпростішим прикладом суцільного середовища є модель абсолютно твердого тіла. Більш загальний образ суцільного середовища об'єднує пружні, пластичні, рідинні, газові та інші тіла. Розглянемо деякі окремі моделі суцільного середовища.

1. Абсолютно пружне тіло — це тіло, яке при взаємодії з іншими тілами деформується, тобто змінює свої розміри та форму. При цьому, якщо взаємодія цього тіла з іншим тілом або тілами припиняється, то початкові розміри та форма тіла повністю відновлюються. Деформація абсолютно пружного тіла підпорядковується закону Гука¹.

2. Пластичне тіло при взаємодії з іншими тілами деформується, тобто змінює свої розміри та форму. Проте, на відміну від абсолютно пружного тіла,

¹ Гук Роберт (1635—1703) — англійський природознавець, член Лондонського королівського товариства.

якщо взаємодія цього тіла з іншим тілом або тілами припиняється, початкові розміри та форма тіла не відновлюються.

3. Ідеальна рідина — це рідинне тіло, яке має такі властивості: а) воно абсолютно нестисливе; б) не змінює густину зі зміною температури; в) абсолютно не чинить опору розриву; г) має абсолютну рухомість, тобто характеризується повною відсутністю в'язкості.

4. В'язка рідина. Ця модель характеризує рідину, яка абсолютно нестислива, але має властивість чинити опір зусиллям, що спричинюють відносні переміщення її частин.

За характером задач, що вивчаються, теоретична механіка поділяється на три розділи: статика, кінематика та динаміка.

Статика вивчає окремий випадок руху матеріальних об'єктів — стан спокою.

Кінематика вивчає рух матеріальних об'єктів з геометричного погляду, тобто незалежно від причин, які зумовлюють цей рух.

Динаміка вивчає рух матеріальних об'єктів з урахуванням причин цього руху.

Більш ґрунтовні відомості про задачі статички, кінематики та динаміки буде подано у відповідних розділах підручника.

Розділ I. СТАТИКА

Глава 1

ПРЕДМЕТ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКсіОМИ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Сила. Поняття системи сил, еквівалентних та зрівноважених систем сил, рівнодійної сили

Статика твердого тіла — розділ теоретичної механіки, в якому викладаються методи перетворення одних систем сил в інші, їм еквівалентні, а також вивчаються умови рівноваги систем сил, що діють на тверде тіло.

Матеріальні об'єкти, перебуваючи у різних частинах простору, взаємодіють, тобто рух однієї частки матерії залежить від наявності других часток матерії та їх руху. “Взаємодія — ось перше, що виступає перед нами, коли ми розглядаємо рухому матерію в цілому з точки зору сучасного природознавства”¹. Фізична природа цих взаємодій пов'язана з поняттям про фізичні поля, тобто з такими властивостями простору та часу, які не враховуються в початкових уявленнях класичної механіки про простір і час. Тому природно, що класична механіка не може враховувати взаємодію матерії у тій формі, у якій вона реалізується в реальному світі. Класична механіка враховує лише той факт, що наявність матерії в одному місці простору впливає на рух матерії, що перебуває в іншому місці простору, і не розглядає фізичних причин цього впливу. Вона вводить у розгляд ще одну ідеалізацію — *силову взаємодію*.

Відрізняють дві форми силової взаємодії матеріальних об'єктів: *близькодія* та *дальнодія*. Під першим поняттям розуміють взаємодію, що здійснюється шляхом прямого контакту між матеріальними об'єктами, під другим — взаємодію, що здійснюється між об'єктами на відстані один від одного. Науковою заслугою І. Ньютона є те, що він поклав в основу механіки кількісні

¹ Енгельс Ф. Дialeктика природи. — М.: Госполитиздат, 1953. — С. 183.

законали сил, незалежно від того, ясна чи ні їх фізична природа. Так, сьогодні ще не існує загально визнаної теорії тяжіння, яка б пояснила фізичну природу цього явища. Між тим закон Ньютона про всесвітнє тяжіння¹ має простий кількісний вираз.

Отже, теоретична механіка цікавиться лише механічним ефектом взаємодії між матеріальними об'єктами, тобто зміною механічного стану даного тіла при його взаємодії з іншими тілами.

*Кількісна міра взаємодії матеріальних тіл, що визначає інтенсивність та напрям цієї взаємодії, називається силою, яку прикладено до даного тіла*². Сила виникає тільки у разі взаємодії матеріальних об'єктів. Тому неможливо розглядати силу як щось, що існує в природі само по собі, незалежно від матеріального тіла, яке є її джерелом, та іншого матеріального тіла, яке зазнає дію цієї сили.

Сутність поняття ньютонівської моделі сили — це можливість її кількісного визначення. Сила визначається: числовим значенням, напрямом дії та точкою прикладання.

Числове значення сили можна встановити за статичним та динамічним³ її проявами. Статичний спосіб вимірювання сил ґрунтується на вимірюванні дій, що спричиняють сили, які діють на пружні тіла у стані спокою⁴. За цим принципом створені прилади для визначення числового значення сили, що називаються *динамометрами*.

Численні спостереження за дією сил свідчать, що сили складаються геометрично⁵, тобто вони повністю відповідають визначенню вектора⁶ (рис. 1.1). Довжина вектора, який зображує силу у відповідному масштабі, дорівнює числовому значенню сили. Вектор сили прикладений в даній точці тіла (точка А на рис. 1.1) і напрямлений у бік дії сили. Пряма, за якою напрямлений вектор сили, називається *лінією дії сили*.

Числове значення (модуль) сили позначають, наприклад, або $|\vec{F}|$, або F . Одиницею сили в системі СІ є ньютон [Н].

¹ $F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$, де F — кількісна міра взаємодії тіл (сила); f — гравітаційна стала; m_1

та m_2 — відповідно маси тіл, що взаємодіють; r — відстань між центрами мас цих тіл.

² Викладене у цьому параграфі поняття сили набуває у розділі “Динаміка” подальшого розвитку.

³ Динамічне визначення числового значення сили наведено у розділі “Динаміка”.

⁴ Кажучи про стан спокою, ми маємо на увазі спокій відносно інерціальної системи відліку.

⁵ Геометричне складання сил впливає з аксіоми про паралелограм сил (див. параграф 1.2).

⁶ У механіці поділяють фізичні величини на скалярні, які повністю характеризуються тільки своїми числовими значеннями, та векторні, які характеризуються як числовим значенням, так і напрямом у просторі, та складаються з подібними собі за правилом паралелограма (див. параграф 1.2).

Сили, якї прикладаються до тїла у будь-якій його точці (рис. 1.1), називаються зосередженими.

Сукупність сил, що діють на тїло, називається системою сил. Сили, якї входять до складу даної системи, називаються складовими цієї системи.

Якщо, не порушуючи механічного стану тврдого тїла, одну систему сил, що діє на це тїло, можна замінити іншою, то такі системи називаються еквівалентними; їх позначають

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m\}.$$

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то така сила називається рівнодійною, тобто

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}.$$

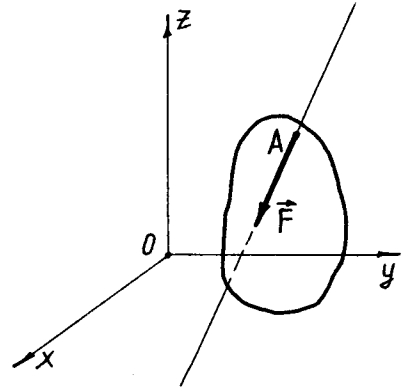


Рис. 1.1

Зрівноважені системи сил, або системи сил, еквівалентні нулю, — це такі системи сил, під дією яких матеріальна точка або тверде тїло перебувають у стані рівноваги відносно інерціальної системи відліку; їх позначають

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{0}.$$

Під рівновагою матеріальної точки або тврдого тїла розуміють такий їх стан, за якого вони, перебуваючи під дією системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{0}$, залишаються у спокої відносно інерціальної системи відліку.

Зауважимо, що під рівновагою матеріальної точки або тврдого тїла розуміють не тільки стан спокою, а й рух за інерцією. Рівномірний прямолінійний рух матеріальної точки є рухом за інерцією. Для тврдого тїла існують різні види руху за інерцією, наприклад рівномірно обертальний рух навколо нерухомої осі¹.

У статистиці, не вносячи похибок у розрахунки, можна вважати, що система декартових координат, жорстко пов'язана із Землею, є інерціальною (абсолютною за І.Ньютоном)².

1.2. Аксиоми про сили. Теорема про три сили

Аксиоми механіки — це деякі твердження, що приймаються без доказу. Ці твердження не мають іншого обґрунтування, крім дослідного, тобто істина, сформульована у певному твердженні, встановлена в результаті тривалої практичної діяльності. В аксіомах статички про сили відображено властивості сил, що діють на тверде тїло.

¹ Більш докладні відомості про рух за інерцією викладено у розділі “Динаміка”.

² Це пояснюється тим, що на силу тяжіння впливають різні чинники, зокрема обертання Землі (див. розділ “Динаміка”, параграф 16.15).

Аксиома про дві сили. Дві сили, прикладені до твердого тіла, взаємно зрівноважуються тоді, коли вони рівні за числовим значенням (модулем) і діють уздовж однієї прямої у протилежних напрямках (рис. 1.2, а, б).

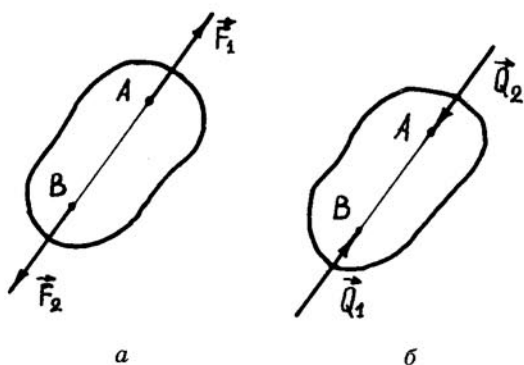


Рис. 1.2

Аксиома про дві сили встановлює найпростішу зрівноважену систему сил (векторний нуль), а саме: якщо тверде тіло перебуває у рівновазі під дією двох сил, то ці сили рівні за модулем, діють уздовж однієї прямої та напрямлені у протилежні боки. І навпаки, якщо на тверде тіло вздовж однієї прямої у протилежних напрямках діють дві сили, рівні за модулем, і тіло у початковий момент перебуває у стані рівноваги, то цей стан тіла зберігається.

Аксиома про додавання та віднімання зрівноваженої системи

сил. Стан твердого тіла під дією системи сил не зміниться, якщо до цієї системи додати або від неї відняти зрівноважену систему сил.

При цьому припускається, що дія інших сил не залежить від дії зрівноважених сил.

Наслідок з аксіом про дві сили та про додавання і віднімання зрівноваженої системи сил. Дія сили на тверде¹ тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладання сили вздовж її лінії дії у довільну точку.

Дійсно, нехай сила \vec{F}_1 прикладена до твердого тіла у точці А (рис. 1.3, а).

Прикладемо у точці В уздовж лінії дії сили \vec{F}_1 дві сили \vec{F}_2 та \vec{F}_3 , вважаючи, що $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_1|$ (рис. 1.3, б). Тоді на підставі аксіоми про додавання та віднімання зрівноваженої системи сил будемо мати $\vec{F}_1 \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$.

Оскільки сили \vec{F}_2 і \vec{F}_3 утворюють зрівноважену систему сил (аксіома про дві сили), то на підставі аксіоми про додавання та віднімання зрівноваженої системи сил їх можна відняти. Отже,

$$\vec{F}_1 \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \vec{F}_3,$$

або

$$\vec{F}_1 \sim \vec{F}_3,$$

що доводить розглянутий наслідок.

¹ Нагадуємо, що, кажучи про тверде тіло, ми маємо на увазі абсолютно тверде тіло, тобто тіло, що не деформується під дією сил.

Наслідок з аксіом показує, що сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, розглядається як ковзний вектор¹.

Зауважимо, що при вивченні деформації тіла під дією цієї чи іншої сили ця сила не може розглядатися як ковзний вектор. Наприклад, розглядаючи деформацію тіла, зображеного на рис. 1.4, а, під дією сили \vec{F} , яка прикладена в перерізі А—А, маємо таку картину деформації

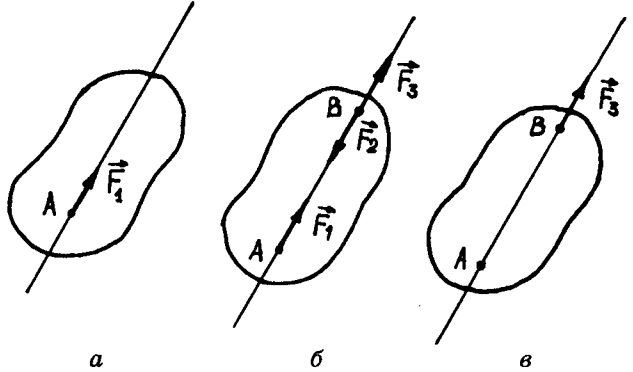


Рис. 1.3

тіла. Частина тіла, що розміщена між перерізами А—А та О—О, стискається, а частина, що розміщена між перерізами О—О та В—В, не зазнає ніякої дії з боку

сили \vec{F} . Іншу картину будемо спостерігати, якщо перенести силу \vec{F} уздовж її лінії дії у переріз В—В (рис. 1.4, б), тобто частина тіла, що розміщена між перерізами А—А та О—О, не зазнає дії з боку сили \vec{F} , а частина між перерізами О—О та В—В розтягується. Як бачимо, характер деформації тіла змінюється при перенесенні сили уздовж її лінії дії. Тому розглядати силу як ковзний вектор у цьому випадку неможливо.

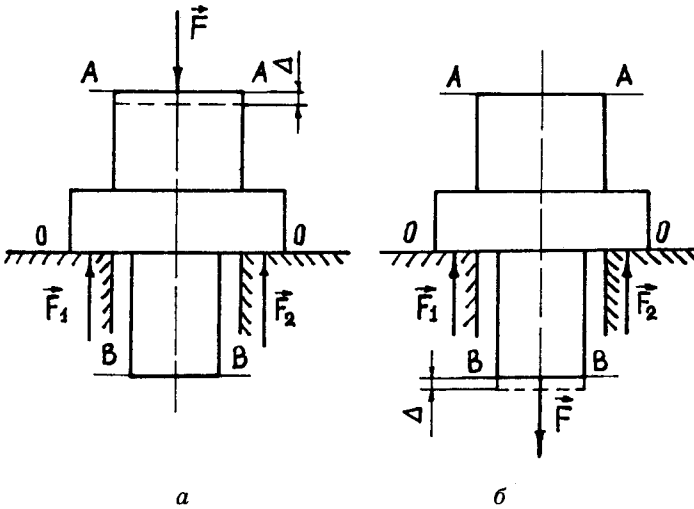


Рис. 1.4

Аксіома про паралелограм сил². *Не змінюючи механічного стану твердого тіла, дві сили, що прикладені до нього в одній точці під кутом одна до одної, можна замінити однією силою, прикладеною у тій самій точці, яка визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 1.5, а).*

¹ У механіці розглядають три типи векторів: зв'язані (мають точку прикладання); ковзні (точкою прикладання може бути будь-яка точка на лінії їх дії); вільні (точкою прикладання може бути будь-яка точка твердого тіла).

² Деякими вченими аксіома про паралелограм сил розглядається як теорема. Читач може знайти доведення цієї теореми, наприклад, у книзі: Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. — М.; Л.: Гостехиздат, 1952. — С. 160.

З аксіоми про паралелограм сил випливають такі положення¹.

1. Дві сили, прикладені в одній точці твердого тіла під кутом одна до одної, мають рівнодійну, тобто еквівалентні одній силі:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \vec{R}. \quad (1.1)$$

2. Аксіома визначає модуль, точку прикладання та напрям рівнодійної як геометричної суми двох сил, тобто

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.2)$$

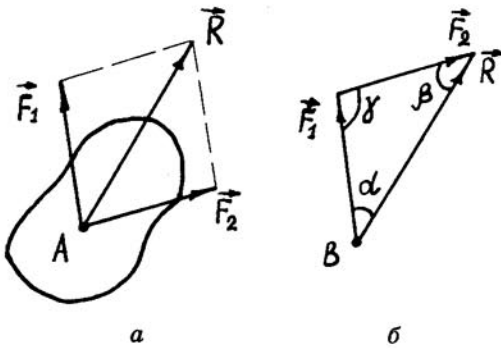


Рис. 1.5

Напрямок рівнодійної визначає діагональ паралелограма (рис. 1.5, а) або замикальна сторона трикутника (рис. 1.5, б), побудованого так: до довільного центра B прикладений вектор, що геометрично дорівнює² першій силі \vec{F}_1 , а потім до кінця цього вектора прикладений вектор, що геометрично дорівнює другій силі \vec{F}_2 . Замикальна сторона трикутника і визначає рівнодійну силу \vec{R} (рис. 1.5, б).

Числове значення (модуль) рівнодійної двох сил можна визначити графічно й аналітично. Графічне визначення \vec{R} здійснюється визначенням довжини діагоналі або замикальної сторони трикутника та множенням цієї довжини на відповідний масштаб векторів, що зображують сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 .

Аналітично рівнодійна \vec{R} визначається як діагональ паралелограма за допомогою теореми косинусів (рис. 1.5, а)

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\widehat{\vec{F}_1, \vec{F}_2})}, \quad (1.3)$$

а при побудові трикутника — за допомогою теореми синусів (рис. 1.5, б)

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha}. \quad (1.4)$$

3. Аксіома визначає загальне правило геометричного складання сил, які прикладені в одній точці тіла. Це правило впливає з розглянутого вище

¹ Розглянуті далі на підставі вектора сили положення з аксіоми про паралелограм сил мають загальний характер.

² Два вектори є геометрично рівними, якщо вони паралельні між собою, рівні за модулем та напрямлені в один бік.

правила складання двох сил. Нехай на тверде тіло діє система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$. Сили прикладені у точці A тіла (рис. 1.6, a).

Щоб визначити геометричну суму сил, приєднуємо послідовно до першого вектора сили \vec{F}_1 вектор, що геометрично дорівнює вектору сили \vec{F}_2 і т.д. (рис. 1.6, b). Вектор, проведений з точки прикладання всіх векторів сил до останньої вершини побудованого багатокутника (до кінця останнього вектора системи сил), є геометричною сумою сил системи, тобто

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.5)$$

Вектор \vec{R} є замикальною стороною побудованого багатокутника (рис. 1.6, b).

Одержаний таким чином багатокутник називається *силовим багатокутником*, а розглянуте правило — *правилом геометричного складання сил (векторів)*.

4. Аксіома визначає правило розкладання сил за заданими напрямками, тобто правило визначення системи сил, для якої дана сила є рівнодійною. Розглянемо найважливіші окремі випадки.

а. Розкладання сили за двома заданими напрямками. Розкладемо силу \vec{R} за напрямками, що визначаються прямими AB та AC . Сила та прямі розташовані в одній площині (рис. 1.7).

Задача зводиться до побудови паралелограма, у якого діагональ буде зображувати силу \vec{R} , а сторони — складові сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 . Сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , які

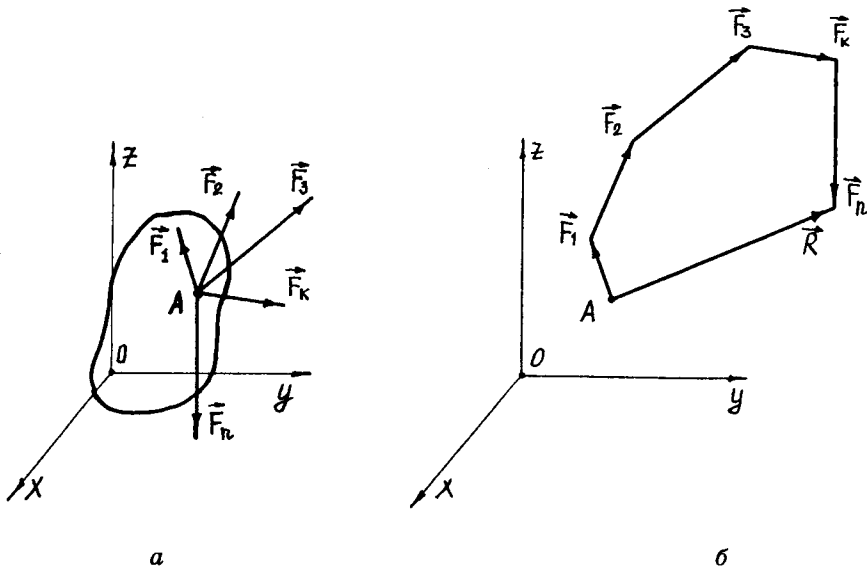


Рис. 1.6

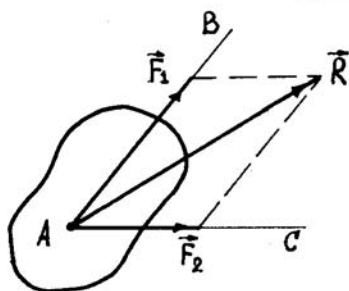


Рис. 1.7

напрявлені вздовж прямих AB та AC , і будуть шуканими силами, для яких сила \vec{R} є рівнодійною. Тому $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

б. Розкладання сили за трьома заданими напрямками. Якщо задані напрями не розташовані в одній площині, то задача є визначеною. Розглянемо розкладання вектора сили \vec{R} за трьома взаємно перпендикулярними напрямками. Цей випадок має важливе значення при розв'язанні практичних задач та при теоретичних дослідженнях. Нехай напрям прямих OB , OC та OD збігається з напрямом осей декартової системи координат¹ (рис. 1.8). Задача визначення складових вектора сили зводиться до побудови прямокутного паралелепіпеда, в якого діагональ буде зображувати вектор сили \vec{R} , а ребра — складові сили \vec{F}_1 , \vec{F}_2 та \vec{F}_3 (див. рис. 1.8). Тому $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Введемо одиничні вектори (орти) осей декартової системи координат \vec{i} , \vec{j} та \vec{k} (рис. 1.8). Тоді можна записати, що $\vec{F}_1 = F_x \vec{i}$, $\vec{F}_2 = F_y \vec{j}$, $\vec{F}_3 = F_z \vec{k}$, де F_x , F_y та F_z — скалярні величини (довжини ребер паралелепіпеда). Оскільки $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, то, враховуючи вирази для \vec{F}_1 , \vec{F}_2 та \vec{F}_3 , дістанемо

$$\vec{R} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) є рівнянням розкладання вектора сили \vec{R} по осях декартової системи координат. Скалярні коефіцієнти при ортах \vec{i} , \vec{j} і \vec{k} є проєкціями вектора сили \vec{R} на осі декартової системи координат (див. параграф 1.3).

Аксіома про додавання та віднімання зрівноваженої системи сил, наслідок з аксіом та аксіома про паралелограм сил установлюють найпростіші дії над силами, за яких механічний стан твердого тіла не змінюється.

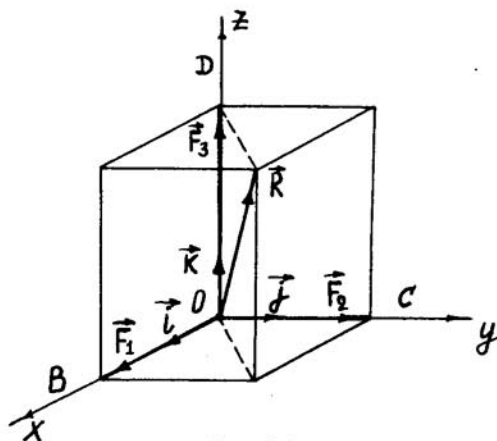


Рис. 1.8

¹ У механіці використовують праву систему координат, тобто таку систему, в якій найменший поворот осі Ox до суміщення з віссю Oy відбувається, якщо дивитися з додатного кінця осі Oz , проти руху стрілки годинника.

Користуючись наведеними аксіомами, дамо доведення однієї з теорем статички, яка має практичне застосування.

Теорема про три сили. *Якщо твёрде тіло перебуває у стані рівноваги під дією трьох непаралельних сил, що розташовані в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.*

Нехай твёрде тіло перебуває у рівновазі під дією трьох сил: \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 . Усі сили розташовані в одній площині (рис. 1.9).

Оскільки, згідно з умовою теореми, сили \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 не паралельні, то лінії дії двох сил, наприклад \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , перетинаються в довільній точці, наприклад у точці O . Перенесемо сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 у точку O та знайдемо їх рівнодійну \vec{R} (див. рис. 1.9). Тепер можна розглядати рівновагу тіла, на яке діють дві сили \vec{R} та \vec{F}_3 . Очевидно, ці сили діють уздовж однієї прямої, тобто утворюють найпростішу зрівноважену систему сил. Звідси випливає, що лінія дії сили \vec{F}_3 проходить через точку O .

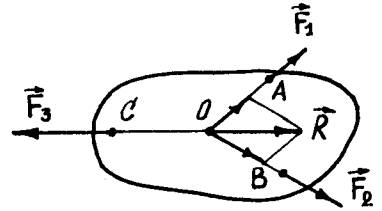


Рис. 1.9

Зауважимо, що обернене твердження не є справедливим, тобто якщо лінії дії трьох сил перетинаються в одній точці, то тіло під дією цих сил може і не перебувати в стані рівноваги.

1.3. Проекція сили на вісь. Аналітичне задавання сили.

Проекція сили на площину.

Проеціювання сили на осі декартової системи координат¹

Проекція точки на вісь або площину — це точка перетину перпендикуляра, проведеного з даної точки, з віссю або даною площиною.

Нехай маємо вектор сили \vec{F} і деяку вісь Ox , тобто пряму, на якій встановлений додатний та від'ємний напрями (рис. 1.10). Побудуємо дві площини, що проходять через точки A і B (початок та кінець вектора сили \vec{F}) перпендикулярно до осі Ox . Точки a та b , що розташовані на осі Ox , є проекціями точок A і B на вісь Ox , а довжина відрізка ab , яку необхідно взяти з відповідним знаком, називається проекцією вектора сили \vec{F} на вісь Ox . Отже, проекція вектора сили на вісь є алгебричною скалярною величи-

¹ Викладені у цьому параграфі поняття, які ґрунтуються на понятті про вектор сили, мають загальний характер.

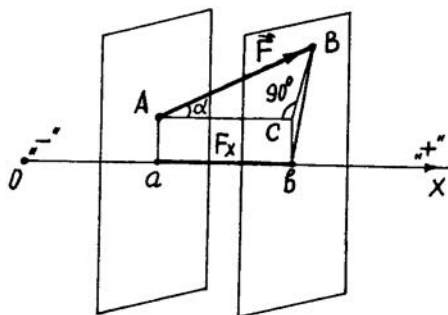


Рис. 1.10

ною; знак проекції залежить від того, який напрям має переміщення від її початку (проекція точки, що визначає початок вектора сили на вісь) до кінця (проекція точки, що визначає кінець вектора сили на вісь); якщо переміщення від початку до кінця проекції збігається з додатним напрямом осі Ox , то проекції вектора сили на вісь надають знак "+", у протилежному випадку — знак "-".

Визначимо співвідношення між модулем вектора сили \vec{F} та його проекцією. Проводимо через початок A вектора сили \vec{F} (див. рис. 1.10) пряму, паралельну осі Ox . Ця пряма перетинає площину Bb у точці C . З'єднуючи точки B і C , отримуємо трикутник $\triangle ACB$, де кут $\angle ACB = 90^\circ$, а $\angle BAC = \alpha$. Тоді $AC = AB \cos \alpha$. Оскільки $AC = ab$, $AB = F$, вводячи позначення $ab = F_x$, знайдемо

$$F_x = F \cos \alpha. \quad (1.7)$$

Вираз (1.7) визначає проекцію сили \vec{F} на вісь Ox як за числовим значенням, так і за знаком. Дійсно, кут α є кутом між додатним напрямом осі Ox та напрямом сили \vec{F} . Якщо кут α є гострим, то $\cos \alpha$ є додатним і навпаки.

Отже, **проекція сили на вісь** — скалярна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом сили і додатним напрямом осі.

З визначення проекції сили на вісь впливає, що проекція сили на вісь не змінюється, якщо переносити вектор сили паралельно самому собі, або проєціювати його на осі, які будуть паралельні між собою і мають один і той самий напрям.

Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O (рис. 1.11). Розглянемо в цій системі довільний вектор сили \vec{F} , що прикладений в точці A з координатами x, y, z . Побудуємо систему координат $Ax_1y_1z_1$ з початком в точці A так, що осі Ax_1, Ay_1, Az_1 є паралельні осям Ox, Oy та Oz (рис. 1.11). Розкладемо вектор сили \vec{F} по осях Ax_1, Ay_1 та Az_1 . З формули (1.6) та рис. 1.11 впливає, що довжини ребер паралелепіпеда, взяті з відповідним знаком, є проекціями вектора сили \vec{F} на осі Ax_1, Ay_1 та Az_1 , або, що є теж само, на осі Ox, Oy та Oz . Позна-

чимо ці проекції відповідно F_x , F_y та F_z . Тоді на підставі формули (1.7) маємо:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha; \\ F_y &= F \cos \beta; \\ F_z &= F \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.8)$$

З огляду на те, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його ребер:

$$\begin{aligned} F^2 &= F_x^2 + F_y^2 + F_z^2, \\ \text{то} \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

На підставі рівностей (1.8) та (1.9) маємо:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{F_x}{F} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}; \\ \cos \beta &= \frac{F_y}{F} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}; \\ \cos \gamma &= \frac{F_z}{F} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Рівності (1.10) називаються *напрямними косинусами вектора сили*.

Отже, силу, яка діє на тверде тіло, можна задати аналітично. Щоб її задати так, слід задати проекції цієї сили на осі координат і координати точки прикладання сили. Тоді на підставі рівності (1.9) визначаємо числове значення сили (модуль), а на підставі рівностей (1.10) — напрям сили відносно даної системи координат. Таким чином, сила повністю визначається через проекції на осі координат.

Проекція сили на площину. Проекцією сили \vec{F} на будь-яку площину (рис. 1.12) називається вектор, що розташований між проекціями початку та кінця вектора сили \vec{F} на цю площину. Напрявлений цей вектор від точки a до точки b , що відповідає напрямку вектора сили \vec{F} .

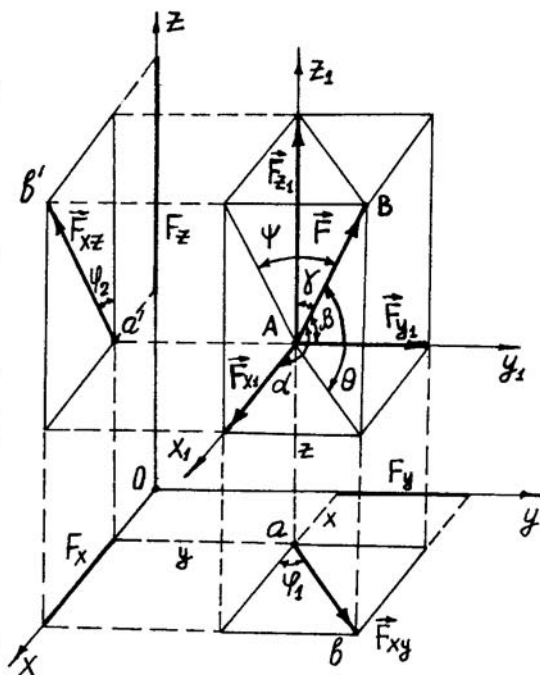


Рис. 1.11

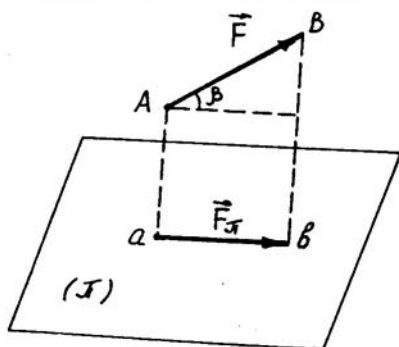


Рис. 1.12

Отже, проекція сили на площину є величина векторна, оскільки вона характеризується не тільки своїм числовим значенням, а й напрямом у площині π (рис. 1.12). Позначають проекцію вектора на площину, наприклад, \vec{F}_π , де індекс π вказує площину, де міститься ця проекція. Числове значення (модуль) проекції сили на площину визначають за формулою

$$F_\pi = F \cos \beta, \quad (1.11)$$

де β — кут між вектором сили \vec{F} та її проекцією на площину π .

Зауважимо, що для визначення проекції сили на осі декартової системи координат можна використати метод подвійного проєкціювання. Так, щоб визначити проекцію вектора сили \vec{F} на осі Ox та Oy (див. рис. 1.11), знаходимо проекцію вектора \vec{F} на площину xOy , тобто вектор \vec{F}_{xy} . Далі визначаємо проекцію вектора \vec{F}_{xy} на осі Ox та Oy . Ці проекції і будуть проекціями сили \vec{F} на осі Ox та Oy :

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi_1 = F \cos \theta \cos \varphi_1;$$

$$F_y = F_{xy} \sin \varphi_1 = F \cos \theta \sin \varphi_1.$$

Аналогічно знайдемо проекцію сили \vec{F} на вісь Oz . Для цього потрібно спочатку визначити проекцію сили \vec{F} на площину xOz , тобто вектор \vec{F}_{xz} . Модуль цього вектора (див. рис. 1.11)

$$F_{xz} = F \cos \psi,$$

де ψ — кут між вектором сили \vec{F} та проекцією цього вектора на площину xOz . Далі визначаємо проекцію вектора \vec{F}_{xz} на вісь Oz . Ця проекція і буде проекцією сили \vec{F} на вісь Oz : $F_z = F_{xz} \cos \varphi_2 = F \cos \psi \cos \varphi_2$.

1.4. Момент сили відносно точки та осі

Момент сили відносно точки та відносно осі — це фізичні величини, що визначають властивості сили надавати твердому тілу обертальний рух відносно довільної точки або осі.¹

¹ Фізичний зміст цих понять розкрито в розділі “Динаміка”.

Моментом сили відносно точки O називається фізична величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора \vec{r} , проведеного з точки O у точку прикладання сили, на цю силу (рис. 1.13):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.12)$$

Як відомо з векторної алгебри, модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах-співмножниках. Тому модуль векторного добутку (рис. 1.13)

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \alpha.$$

Поставимо перпендикуляр з точки O на лінію дії сили \vec{F} . Довжина h цього перпендикуляра називається **плечем моменту сили** відносно точки O .

З рис. 1.13 випливає, що $r \sin \alpha = h$. Тому модуль моменту сили відносно точки O визначається у вигляді

$$M_O(\vec{F}) = Fh. \quad (1.13)$$

Отже, **момент сили відносно довільної точки O** є вектором, перпендикулярним до площини, що містить у собі точку та силу (площина дії моменту), який дорівнює за модулем добутку модуля сили на найкоротшу відстань між точкою та лінією дії сили (плече моменту сили) і напрямлений у ту частину простору, звідки обертання тіла під дією сили відносно точки видно проти руху стрілки годинника¹ (див. рис. 1.13). Точка прикладання вектора моменту сили — це точка, відносно якої визначається момент сили. Одиницею моменту сили відносно точки в системі СІ є ньютон-метр [Н·м].

Момент сили відносно точки можна задати аналітично. Для цього слід задати проекції сили на осі декартової системи координат та координати будь-якої точки на лінії дії сили, наприклад координати точки прикладання сили.

¹ Напрямок вектора моменту сили відносно довільної точки $\vec{M}_O(\vec{F})$ на рис. 1.13 відповідає правій системі декартових координат. При застосуванні лівої системи координат вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, зберігаючи числове значення, змінює напрям на протилежний. Такі вектори називають псевдовекторами. Надалі нам будуть часто траплятися такого роду вектори. До них належать, зокрема, вектори кутової швидкості, кутового прискорення та ін.

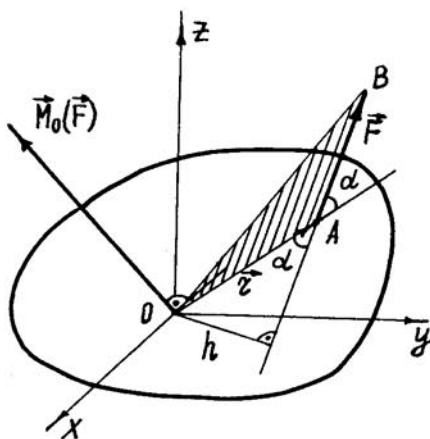


Рис. 1.13

Побудуємо систему координат з початком у точці O (рис. 1.13) і скористаємося тим, що векторний добуток можна подати у вигляді

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}, \quad (1.14)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти системи координат; x, y, z — координати точки прикладання сили; F_x, F_y, F_z — проєкції сили на осі координат.

Рівняння (1.14) є рівнянням розкладання вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ по осях декартової системи координат.

Отже,

$$M_O(\vec{F}) = \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}. \quad (1.15)$$

$$\cos(\vec{i}, \vec{M}_O(\vec{F})) = \frac{yF_z - zF_y}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}};$$

$$\cos(\vec{j}, \vec{M}_O(\vec{F})) = \frac{zF_x - xF_z}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}}; \quad (1.16)$$

$$\cos(\vec{k}, \vec{M}_O(\vec{F})) = \frac{xF_y - yF_x}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}}.$$

Рівняння (1.15) визначає модуль моменту сили відносно точки (початку координат), а рівності (1.16) — напрям вектора моменту сили відносно даної системи координат. Таким чином, аналітично момент сили відносно точки повністю визначається через проєкції сили на осі декартової системи координат і координати точки прикладання сили.

Зауважимо, що рівності (1.16) називаються *напрямними косинусами вектора моменту сили відносно точки*.

З визначення моменту сили відносно точки випливають такі його властивості:

а) при переміщенні точки прикладання сили вздовж її лінії дії момент сили відносно точки не змінюється;

б) якщо лінія дії сили проходить через точку, відносно якої визначається момент сили, то момент сили відносно цієї точки дорівнює нулю;

в) момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника $\triangle OAB$ (рис. 1.13), тобто $M_O(\vec{F}) = Fh = 2S_{OAB}$.

Моментом сили відносно осі називається фізична скалярна алгебрична величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною (рис. 1.14), тобто

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h, \quad (1.17)$$

де h — найкоротша відстань між лінією дії вектора проекції сили на площину \vec{F}_{xy} та точкою перетину осі з площиною (плече моменту проекції \vec{F}_{xy}).

Момент сили відносно осі вважається додатним, якщо спостерігач, що дивиться з боку додатного напрямку осі, уявляє можливий поворот тіла під дією вектора \vec{F}_{xy} (проекції сили на площину, перпендикулярну до осі) навколо осі проти руху годинникової стрілки. У протилежному випадку момент сили відносно осі вважається від'ємним.

Зауважимо, що момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:

- якщо лінія дії сили паралельна осі;
- якщо лінія дії сили перетинає вісь.

Покажемо, що момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки, що розміщена на цій осі.

Дійсно, проекція вектора моменту $\vec{M}_O(\vec{F})$ на вісь Oz (див. рис. 1.14)

$$\vec{M}_O(\vec{F}) \cos \varphi = 2S_{OAB} \cos \varphi = \pm 2S_{Oab},^1$$

оскільки кут між вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$ та віссю Oz дорівнює куту між площиною трикутника ΔOAB та площиною (xy) , а площина трикутника ΔOab є проекцією площини трикутника ΔOAB .

На підставі визначення моменту сили відносно осі маємо (рис. 1.14)

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm 2S_{Oab}.$$

Тоді

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cos \varphi. \quad (1.18)$$

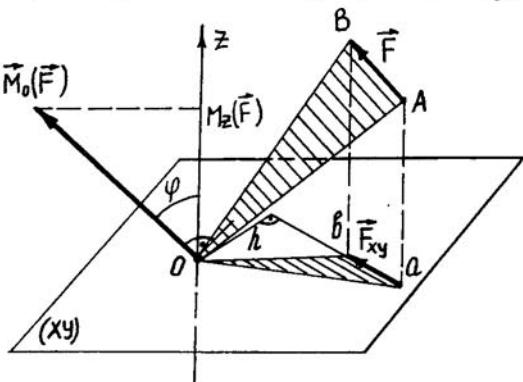


Рис. 1.14

¹ Знак "+" або "-" залежить від знака $\cos \varphi$.

Якщо силу задано аналітично, тобто проекціями F_x , F_y , F_z та координатами x , y , z точки прикладання сили, то на підставі формул (1.18) та (1.14) маємо:

$$\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= M_O(\vec{F}_{yz}) = yF_z - zF_y; \\ M_y(\vec{F}) &= M_O(\vec{F}_{xz}) = zF_x - xF_z; \\ M_z(\vec{F}) &= M_O(\vec{F}_{xy}) = xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Рівності (1.19) визначають момент сили відносно осей декартової системи координат при аналітичному заданні сили.

За одиницю моменту сили відносно осі в системі СІ беруть ньютон-метр [Н · м].

1.5. Теорема про момент рівнодійної системи сил (теорема Варіньона)¹

Якщо система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно довільної точки дорівнює геометричній сумі моментів сил цієї системи відносно тієї самої точки:

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k). \quad (1.20)$$

Нехай у точці A (рис. 1.15) до твердого тіла прикладена система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$. На підставі аксіоми про паралелограм сил (див. параграф 1.2), рівнодійна системи визначається за формулою (1.5)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Візьмемо як довільну точку твердого тіла початок координат O та введемо радіус-вектор \vec{r} (див. рис. 1.15). На підставі визначення моменту сили відносно точки маємо

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{R}) &= \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \\ &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k), \end{aligned}$$

що доводить теорему.

¹ П'єр Варіньон (1654—1722) — французький вчений, математик та механік.

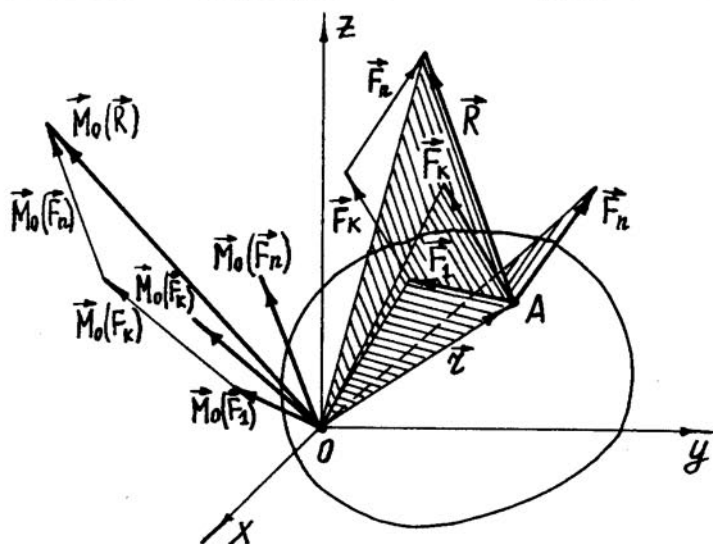


Рис. 1.15

Спроеціюємо рівність (1.20) на осі декартової системи координат x , y та z . Тоді на підставі формули (1.18) та теореми про проєкцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь (див. параграф 2.1) знайдемо

$$M_x(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k); \quad M_y(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k); \quad M_z(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k). \quad (1.21)$$

З рівностей (1.21) випливає теорема про момент рівнодійної системи сил відносно довільної осі: *якщо система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно довільної осі дорівнює алгебричній сумі моментів сил цієї системи відносно тієї самої осі.*

Зауважимо, що незалежно від того, що доведення цієї теореми проведено на прикладі системи сил, прикладених в одній точці, розглянута теорема, як це буде показано далі, справедлива для будь-яких систем сил, що мають рівнодійну.

1.6. Поняття головного вектора та головного моменту системи сил

Розглянемо довільну просторову систему сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, що діє на тверде тіло. Сили системи прикладені в точках A, B, C, \dots, N цього тіла (рис. 1.16). Виберемо довільну точку тіла; нехай це буде початок системи декартових координат точка O .

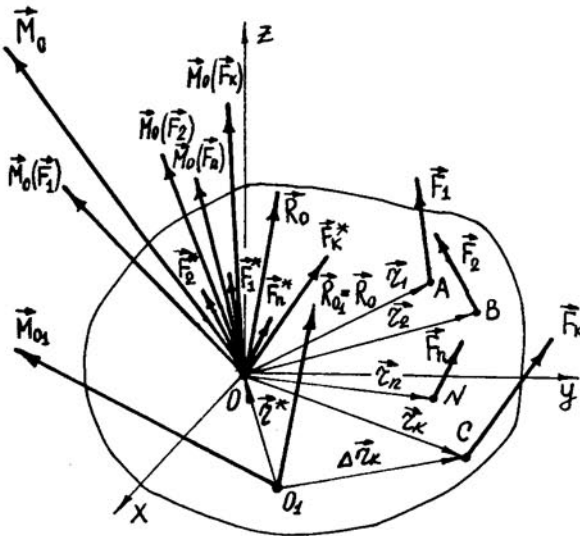


Рис. 1.16

Неважко зрозуміти, що при зміні центра зведення, наприклад якщо взяти за центр зведення довільну точку O_1 (рис. 1.16), головний вектор \vec{R}_{O_1} не змінюється, тобто головний вектор системи сил не залежить від вибору центра зведення.

Отже, **головним вектором системи сил** називається вектор, який дорівнює геометричній сумі сил системи і прикладений у довільній точці твердого тіла (центра зведення).

Побудуємо тепер вектори моментів усіх сил системи $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ відносно центра зведення (точка O на рис. 1.16) та знайдемо їх геометричну суму за правилом векторного багатокутника:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k). \quad (1.23)$$

Вектор \vec{M}_O називається головним моментом даної системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ відносно центра зведення.

Отже, головним моментом системи сил \vec{M}_O називається вектор, що дорівнює геометричній сумі векторів моментів сил системи відносно довільної точки твердого тіла (центра зведення).

Прикладемо до точки O сили $\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*, \dots, \vec{F}_n^*$ так, щоб кожна сила \vec{F}_k^* дорівнювала за числовим значенням силі \vec{F}_k , була їй паралельною і мала той самий напрям, тобто $\vec{F}_k^* = \vec{F}_k$. Складаючи $\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*, \dots, \vec{F}_n^*$ за правилом силового багатокутника (див. параграф 1.2), знайдемо

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^* = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.22)$$

Вектор \vec{R}_O називається **головним вектором даної системи сил**¹. Довільна точка O називається **центром зведення системи сил**.

¹ Головний вектор не слід ототожнювати з рівнодійною. Рівнодійна — це сила, еквівалентна даній системі сил, вона існує не завжди. Головний вектор (векторна сума сил) існує завжди.

При зміні центра зведення головний момент змінюється і визначається за формулою

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{R}_O). \quad (1.24)$$

Дійсно, розглянемо силу \bar{F}_k із системи $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}$ та силу \bar{F}_k^* із системи $\{\bar{F}_1^*, \bar{F}_2^*, \dots, \bar{F}_n^*\}$, що прикладені у точці O . Нехай \bar{r}_k , \bar{r}^* та $\Delta\bar{r}_k$ — радіуси-вектори цих сил відносно точок O та O_1 . З рис. 1.16 випливає, що $\bar{r}^* + \bar{r}_k = \Delta\bar{r}_k$.

Момент сили \bar{F}_k відносно точки O_1 визначається за формулою (1.12):

$$\bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k) = \Delta\bar{r}_k \times \bar{F}_k = (\bar{r}^* + \bar{r}_k) \times \bar{F}_k = (\bar{r}^* \times \bar{F}_k) + (\bar{r}_k \times \bar{F}_k) = (\bar{r}^* \times \bar{F}_k^*) + (\bar{r}_k \times \bar{F}_k),$$

оскільки $\bar{F}_k^* = \bar{F}_k$, $\Delta\bar{r}_k = \bar{r}^* + \bar{r}_k$.

Підсумовуючи цю рівність, знайдемо

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}^* \times \bar{F}_k^*) + \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k) = \bar{r}^* \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^* + \bar{M}_O = \bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{R}_O),$$

що доводить справедливість формули (1.24).

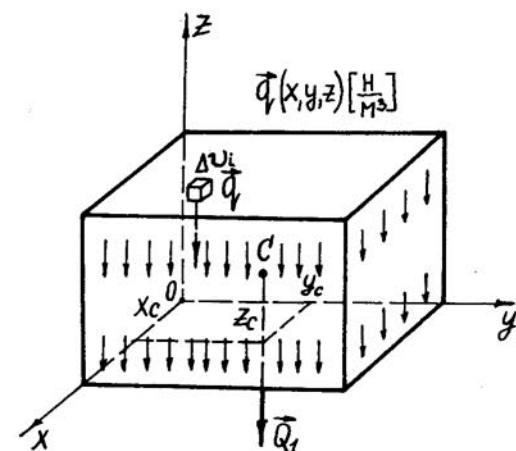
Операція з визначення головного вектора та головного моменту системи сил називається зведенням системи сил до довільної точки (центра зведення) і, як буде показано далі, має важливе значення при еквівалентних перетвореннях систем сил, що діють на тверде тіло.

1.7. Розподілені сили

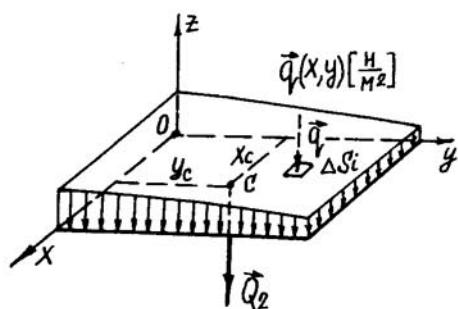
Введене у параграфі 1.1 поняття зосередженої сили має уявний характер, бо в одній точці тіла прикласти силу практично неможливо. Сили, які в теоретичній механіці розглядаються як зосереджені, є рівнодійними деяких розподілених по об'єму, поверхні або лінії за тим чи іншим законом розподілення систем сил. Наприклад, сила тяжіння є рівнодійною сил тяжіння часток тіла, розподілених по об'єму цього тіла.

Оскільки теореми та аксіоми статки твердого тіла сформульовані для зосереджених сил, то при розв'язанні практичних задач статки необхідно знати способи еквівалентної заміни розподілених сил зосередженими.

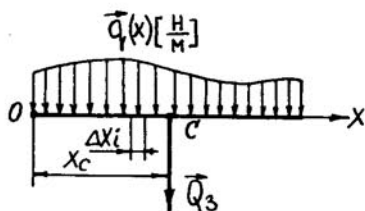
Найпоширенішими у практиці є паралельні розподілені сили. Ці сили характеризуються інтенсивністю \bar{q} , тобто силою, що діє відповідно на одиницю об'єму, поверхні або довжини лінії (рис. 1.17, а, б, в).



a



б



в

Рис. 1.17

Розглянемо еквівалентні перетворення систем паралельних сил у трьох випадках, наведених на рис. 1.17.

Для цього розглянемо дві паралельні сили, що діють на тверде тіло і напрямлені в один бік (рис. 1.18). На підставі аксіом про сили, що визначають найпростіші дії над силами, за яких механічний стан твердого тіла не змінюється, перетворимо цю систему сил в еквівалентну.

Додамо до сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 зрівноважену систему сил \vec{Q}_1 та \vec{Q}_2 , лінія дії яких збігається з прямою AB . Складаючи сили \vec{F}_1 , \vec{Q}_1 та \vec{F}_2 , \vec{Q}_2 за правилом паралелограма (див. параграф 1.2), знайдемо сили \vec{R}_1 та \vec{R}_2 . Переносимо сили \vec{R}_1 та \vec{R}_2 уздовж їх ліній дії в точку перетину цих ліній (точка O на рис. 1.18). Розкладемо тепер сили \vec{R}_1 та \vec{R}_2 за двома напрямками (див. параграф 1.2): вздовж прямої, паралельної AB , та вздовж прямої, паралельної силам \vec{F}_1 та \vec{F}_2 . Маємо сили \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 , \vec{F}_1 та \vec{F}_2 . Оскільки сили \vec{Q}_1 та \vec{Q}_2 утворюють зрівноважену систему сил, то їх можна відкинути. Залишилися сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , що напрямлені вздовж однієї прямої (пряма OC на рис. 1.18). Складаючи сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , знайдемо $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. За модулем

ця геометрична сума становить: $R = F_1 + F_2$ [див. формулу (1.3)]. Сила \vec{R} еквівалентна системі двох паралельних сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , які напрямлені в один бік, тобто є рівнодійною цієї системи сил.

Знайдемо положення точки C , через яку проходить лінія дії рівнодійної сили \vec{R} .

На підставі теореми про момент рівнодійної системи сил (див. параграф 1.5), маємо

$$\begin{aligned}\bar{M}_C(\bar{R}) &= \sum_{k=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k) = \\ &= \bar{M}_C(\bar{F}_1) + \bar{M}_C(\bar{F}_2),\end{aligned}$$

або

$$\bar{M}_C(\bar{F}_1) + \bar{M}_C(\bar{F}_2) = \bar{0},$$

оскільки

$$\bar{M}_C(\bar{R}) = \bar{0}.$$

Звідси знаходимо (вектори $\bar{M}_C(\bar{F}_1)$ та $\bar{M}_C(\bar{F}_2)$ розміщені на одній прямій і мають протилежні напрями)

$F_1 h_1 - F_2 h_2 = 0$ та, оскільки $h_1 = AC \cos \alpha$, $h_2 = BC \cos \alpha$ (рис. 1.18),

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (1.25)$$

Отже, система двох паралельних сил, напрямлених в один бік, має рівнодійну силу. Числове значення рівнодійної сили дорівнює сумі сил. Лінія дії рівнодійної паралельна лініям дії складових сил і проходить через точку C , поділяючи відстань між точками прикладання сил A та B на частини, що визначаються за формулою (1.25).

Таке перетворення двох паралельних сил називається **складанням двох паралельних сил**.

Проводячи подібне складання двох паралельних сил, що напрямлені у протилежні боки та чисельно не рівні, тобто, наприклад, $|\bar{F}_1| > |\bar{F}_2|$, знайдемо, що рівнодійна сила цих двох сил напрямлена у бік більшої сили і має числове значення $R = F_1 - F_2$. Лінія дії рівнодійної сили паралельна лініям дії складових сил і проходить через точку C , розташовану на прямій AB поза відрізком AB . Відстань між точками A , B , і C визначається за формулою (1.25). Пропонуємо читачеві довести це твердження самостійно.

Співвідношення (1.25) називається **правилом важеля**.

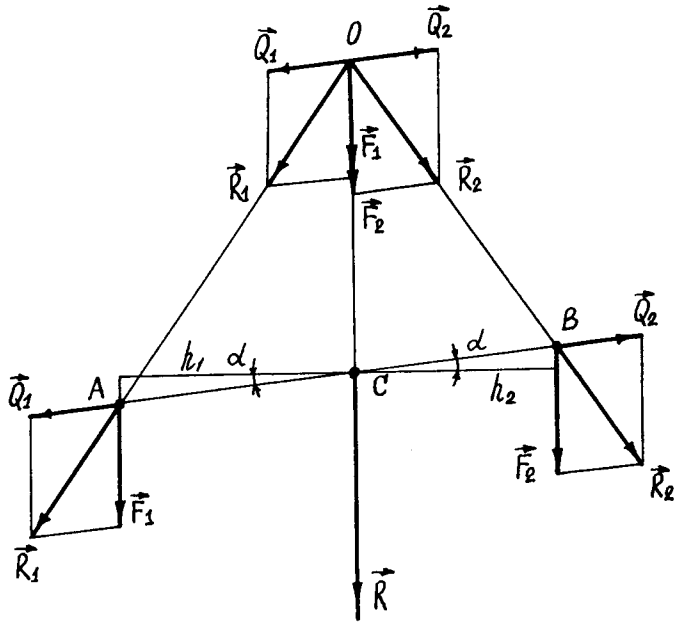


Рис. 1.18

Тепер розглянемо систему паралельних сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, наведену на рис. 1.19. Складаючи послідовно дві сили, тобто $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_1$, $\vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}_2$ і т.д., та визначаючи точки прикладання геометричної суми двох сил $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_{n-1}$ на підставі формули (1.25), дійдемо до системи двох сил \vec{R}_{n-1} та \vec{F}_n , яку еквівалентно замінюємо рівнодієюною силою системи паралельних сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}$; при цьому

$$\vec{R} = \vec{R}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Числове значення рівнодіїної системи паралельних сил дорівнює алгебричній сумі всіх сил системи:

$$R = \sum_{k=1}^n F_k. \quad (1.26)$$

Лінія дії рівнодіїної сили \vec{R} системи паралельних сил проходить через точку C (рис. 1.19). При цьому неважко встановити, що при повороті ліній дії всіх сил навколо їх точок прикладання на один і той самий кут α в одному напрямі рівнодіїна сила \vec{R} повертається на той самий кут α навколо точки C у тому ж напрямі, тобто лінія дії сили \vec{R} при повороті сил системи завжди

проходить через точку C . Точка C , через яку проходить лінія дії рівнодіїної сили системи паралельних сил за будь-яких поворотів ліній дії цих сил в одному напрямі на один і той самий кут навколо їх точок прикладання, називається *центром паралельних сил*.

Визначимо координати точки C (центра паралельних сил) у декартовій системі координат (рис. 1.19). Для цього скористаємося відомими з аналітичної геометрії формулами ділення відрізка у даному відношенні, тобто

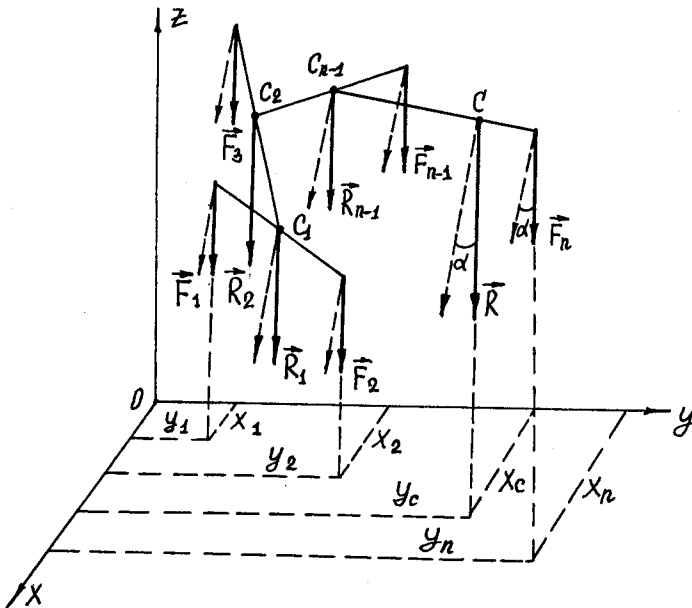


Рис. 1.19

$$x_{O_1} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_{O_1} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

$$z_{O_1} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

де $\lambda = \frac{n}{m}$ (рис. 1.20).

Визначимо координату x_C точки C . Для цього використовуємо послідовно

формулу $x_{O_1} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ і формули

(1.25) та (1.26):

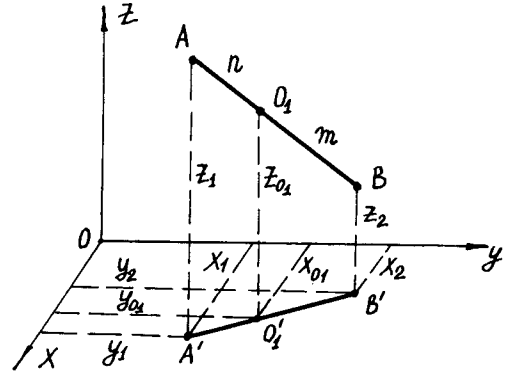


Рис. 1.20

$$x_{C_1} = \frac{x_1 + \frac{F_2}{F_1} x_2}{1 + \frac{F_2}{F_1}} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}; \quad x_{C_2} = \frac{x_{C_1} + \frac{F_3}{R_1} x_3}{1 + \frac{F_3}{R_1}} = \frac{(R_1 x_{C_1} + F_3 x_3) R_1}{R_1 (R_1 + F_3)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} \right) (F_1 + F_2) + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3}; \quad x_{C_{n-1}} = \frac{x_{C_2} + \frac{F_{n-1}}{R_2} x_{n-1}}{1 + \frac{F_{n-1}}{R_2}} =$$

$$= \frac{(R_2 x_{C_2} + F_{n-1} x_{n-1}) R_2}{R_2 (R_2 + F_{n-1})} = \frac{\left(\frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} \right) (F_1 + F_2 + F_3) + F_{n-1} x_{n-1}}{F_1 + F_2 + F_3 + F_{n-1}} =$$

$$= \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + F_{n-1} x_{n-1}}{F_1 + F_2 + F_3 + F_{n-1}}; \quad x_C = \frac{x_{C_{n-1}} + \frac{F_n}{R_{n-1}} x_n}{1 + \frac{F_n}{R_{n-1}}} = \frac{(R_{n-1} x_{C_{n-1}} + F_n x_n) R_{n-1}}{R_{n-1} (R_{n-1} + F_n)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + F_{n-1} x_{n-1}}{F_1 + F_2 + F_3 + F_{n-1}} \right) (F_1 + F_2 + F_3 + F_{n-1}) + F_n x_n}{F_1 + F_2 + F_3 + F_{n-1} + F_n} =$$

$$= \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + F_{n-1} x_{n-1} + F_n x_n}{F_1 + F_2 + F_3 + F_{n-1} + F_n} = \frac{\sum_{k=1}^n F_k x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}.$$

Аналогічно визначимо координати y_C та z_C точки C . Таким чином, остаточно маємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k z_k}{\sum_{k=1}^n F_k}. \quad (1.27)$$

Рівності (1.27) визначають координати центра паралельних сил відносно довільної декартової системи координат.

На основі розглянутих понять еквівалентний перехід від розподілених сил до зосереджених здійснюється за такими формулами:

— випадок на рис. 1.17, а:

$$Q_1 = \lim_{\substack{\Delta v_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n q(x, y, z) \Delta v_i = \int_{(v)} q(x, y, z) dv. \quad (1.28)$$

$$x_C = \frac{\int_{(v)} q(x, y, z) x dv}{\int_{(v)} q(x, y, z) dv}; \quad y_C = \frac{\int_{(v)} q(x, y, z) y dv}{\int_{(v)} q(x, y, z) dv}; \quad z_C = \frac{\int_{(v)} q(x, y, z) z dv}{\int_{(v)} q(x, y, z) dv}; \quad (1.29)$$

— випадок на рис. 1.17, б:

$$Q_2 = \lim_{\substack{\Delta S_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n q(x, y) \Delta S_i = \int_{(S)} q(x, y) dS. \quad (1.30)$$

$$x_C = \frac{\int_{(S)} q(x, y) x dS}{\int_{(S)} q(x, y) dS}; \quad y_C = \frac{\int_{(S)} q(x, y) y dS}{\int_{(S)} q(x, y) dS}; \quad z_C = \frac{\int_{(S)} q(x, y) z dS}{\int_{(S)} q(x, y) dS}; \quad (1.31)$$

— випадок на рис. 1.17, в:

$$Q_3 = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n q(x) \Delta x_i = \int_{(L)} q(x) dx. \quad (1.32)$$

$$x_C = \frac{\int_{(L)} q(x) x dx}{\int_{(L)} q(x) dx}. \quad (1.33)$$

Рївностї (1.28), (1.30) та (1.32) визначають числове значення вїдповїдних рївнодїйних сил, а рївностї (1.29), (1.31) та (1.33) — координати їх точок прикладання.

1.8. Аксіома про рївнїсть дїї та протидїї. Активнї і пасивнї сили. В'язї та їх реакції. Аксіоми про в'язї

Аксіома про рївнїсть дїї та протидїї¹. Сили, з якими два тїла дїють одне на одне, рївнї за числовими значеннями та напрямленї по одній прямїй у протилежнї боки (рис. 1.21 та рис. 1.22).

Оскїльки будь-яка сила є наслідком взаємодїї тїл, то суть цїєї аксіоми полягає у такому. Якщо на тїло C у точцї A дїє деяка сила \vec{F}_A з боку тїла D , то й на тїло D з боку тїла C дїє сила \vec{F}_B , прикладена, наприклад, у точцї B ; при цьому цї двї сили рївнї за модулем та напрямленї по прямїй, що з'єднує точки прикладання сил, у протилежнї боки. Одна із сил називається *дїєю*, а друга — *протидїєю*.

Слїд зауважити, що оскїльки сили прикладено до рїзних тїл, то вони не утворюють зрївноважену систему сил (у розумїннї аксіоми про двї сили).

Пїд дїєю сил \vec{F}_A та \vec{F}_B тїла C і D не можуть бути у рївновазї; вони будуть рухатися, вїддаляючись або наближаючись одне до одного.

У теоретичнїй механїцї розрїзняють *вільнї* та *невільнї твєрдї тїла*.

Вільним називається твєрде тїло, яке не контактує з їншими тїлами і пїд дїєю прикладених до нього сил може здїйснювати з цього положення будь-який рух у просторї.

Якщо рух твєрого тїла пїд дїєю прикладених до нього сил обмежений їншими тїлами, то твєрде тїло буде невільним.

Обмеження на рухи твєрого тїла, що зберїгаються за будь-яких сил, прикладених до твєрого тїла, називаються *в'язями*.

В'язї, обмежуючи рух твєрого тїла, змїнюють стан його руху, який був би, якщо твєрде тїло було б вільним, тобто в'язї є джерелом сил, прикладених до тїла.

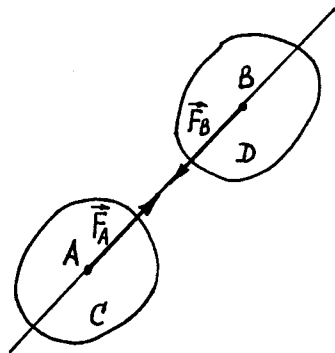


Рис. 1.21

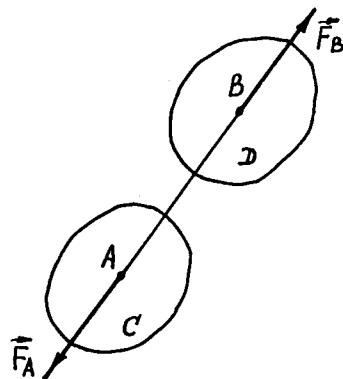


Рис. 1.22

¹ Аксіома про рївнїсть дїї та протидїї в динамїцї називається законом рївностї дїї та протидїї. Зазначимо, що розподїл основних положень теоретичнїй механїки на закони та аксіоми умовний.

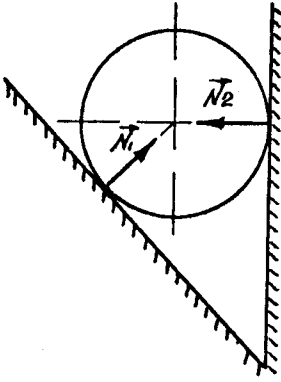


Рис. 1.23

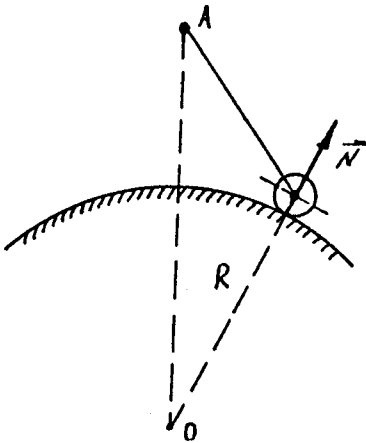


Рис. 1.24

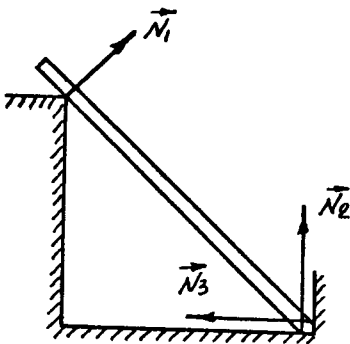


Рис. 1.25

Сила, з якою в'язь діє на тверде тіло, обмежуючи його рух у просторі, називається *силою реакції в'язі* або просто *реакцією*.

Сили, які характеризуються числовим значенням, напрямом дії та точкою прикладання і які при дії на тверде тіло можуть надати йому того чи іншого руху, називаються *активними*. Реакції в'язей такої властивості не мають, тому на відміну від активних сил вони називаються *пасивними*.

Розглянемо деякі види в'язей та їх реакції, які трапляються під час розв'язання задач механіки.

1. Якщо тіло спирається на гладеньку поверхню (без тертя), то сила реакції поверхні напрямлена по нормалі до цієї поверхні в точці дотику, тобто перпендикулярно до дотичної площини в даній точці (рис. 1.23 — 1.25). Реакція гладенької поверхні називається *нормальною реакцією*.

2. Якщо на тіло накладена в'язь у вигляді невагомої нитки, троса, ланцюга тощо, то сила реакції в'язі прикладена до тіла в точці його кріплення та напрямлена вздовж в'язі від точки кріплення до точки підвішування в'язі (рис. 1.26).

3. Якщо на тіло накладено в'язь у вигляді прямолінійного або криволінійного невагомого ідеального (без тертя в шарнірах) стрижня, то лінія дії реакції в'язі проходить для стрижня:

а) прямолінійного — вздовж стрижня (рис. 1.27);

б) криволінійного — вздовж прямої, що з'єднує кінцеві шарніри стрижня (рис. 1.28).

4. Якщо тіло спирається на рухомий шарнір (шарнірно-рухома опора), то сила реакції в'язі напрямлена по нормалі до площини, по якій котиться коток чи котки (рис. 1.29 і 1.30).

5. Якщо тіло спирається на нерухомий шарнір (шарнірно-нерухома опора), то лінія дії реакції шарніра може мати будь-який напрям у площині, перпендикулярній до осі шарніра, тобто немає можливості точно вказати напрям реакції цієї в'язі. Один із можливих варіантів конструкції цієї опори наведено на рис. 1.31. Опора складається з двох частин: нерухомого корпусу з віссю та рухомого корпусу, до якого кріпиться те

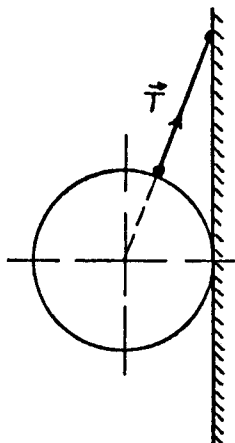


Рис. 1.26

чи інше матеріальне тіло. З рис. 1.31 випливає, що рухомий корпус має контакт з нерухомим корпусом шарніра через вісь шарніра y . Якщо знехтувати тертям, то реакція нерухомої осі напрямлена по нормалі до циліндричної поверхні у точці, де поверхня рухомого корпусу має контакт з віссю шарніра і розташована у площині xOz , тобто у площині, перпендикулярній до осі шарніра (див. рис. 1.31, вид А—А). Оскільки точка контакту не-

відома, то невідома і лінія дії цієї реакції. Тому реакція цієї в'язі подається у вигляді двох складових по координатних осях або однією реакцією та кутом α (рис. 1.32 і 1.33).

6. Якщо на тіло накладено в'язь у вигляді жорсткої нерухомої опори (жорстке защемлення), то дія такої в'язі на тіло складається з двох сил і моменту, тому що така в'язь перешкоджає не тільки лінійним переміщенням тіла, а й повороту його навколо точки закріплення (рис. 1.34)¹.

7. Якщо на тіло накладено в'язь у вигляді сферичного шарніра (рис. 1.35, а) або підп'ятника (рис. 1.35, б), то реакції таких в'язей, якщо знехтувати тертям, проходять через точку А, а їх лінії дії у просторі невідомі. Тому реакції цих в'язей подаються як три складові по координатних осях.

При розгляді рівноваги або руху твердих тіл у теоретичній механіці спираються на такі аксіоми про в'язі.

Аксіома про звільнення тіла від в'язей.
Не змінюючи механічного стану невільного твердого тіла, можна відкинути кожну накладену на нього в'язь, замінивши їх реакціями відповідних в'язей, і розглядати тіло як вільне.

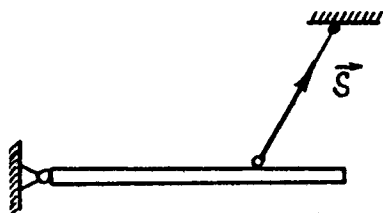


Рис. 1.27

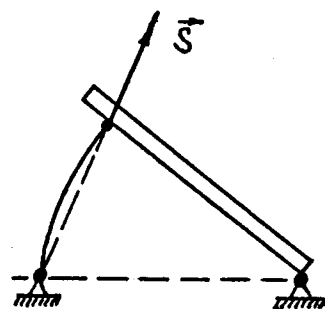


Рис. 1.28

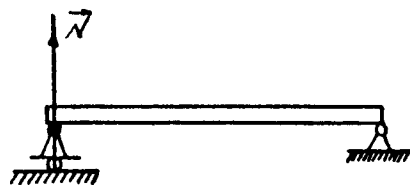


Рис. 1.29

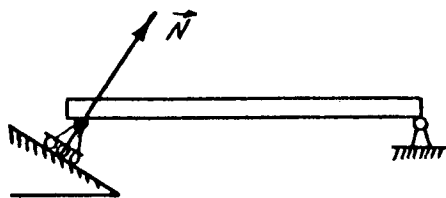


Рис. 1.30

¹ На рис. 1.34 зображено плоске жорстке защемлення. У випадку просторового жорсткого защемлення дія такої в'язі на тіло складається з трьох сил та трьох моментів (див. приклад 3.5 та задачу 8.28).

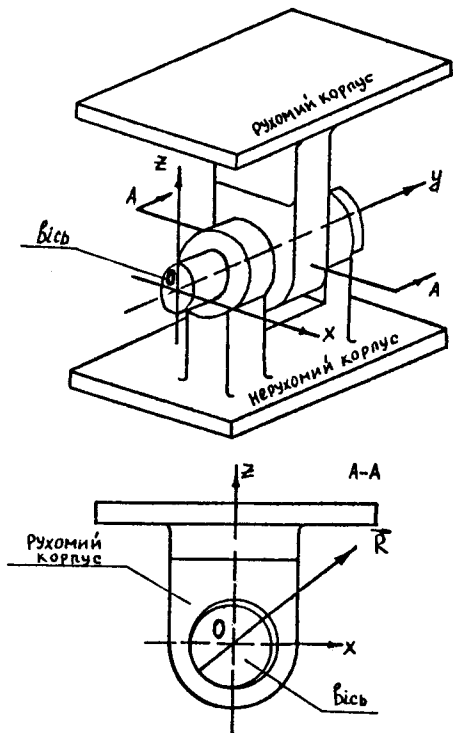


Рис. 1.31

Аксиома про накладення нових в'язей.
Рівновага твердого тіла не порушиться при накладанні на нього нових в'язей.

Аксиома затвердіння.
Рівновага деформованого тіла не порушиться, якщо жорстко зв'язати його точки та вважати тіло недеформованим. (Зауважимо, що ця аксіома виражає необхідну, але недостатню умову рівноваги тіл, що деформуються.)

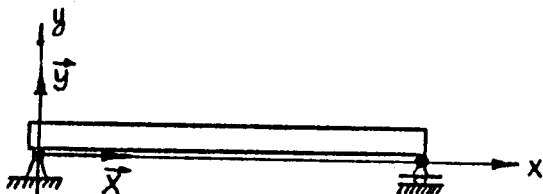


Рис. 1.32

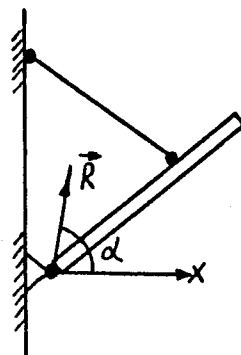


Рис. 1.33

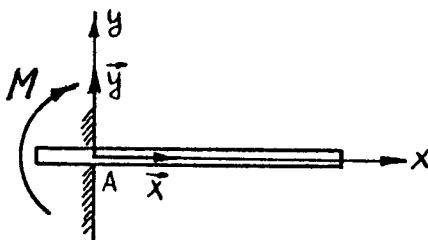


Рис. 1.34

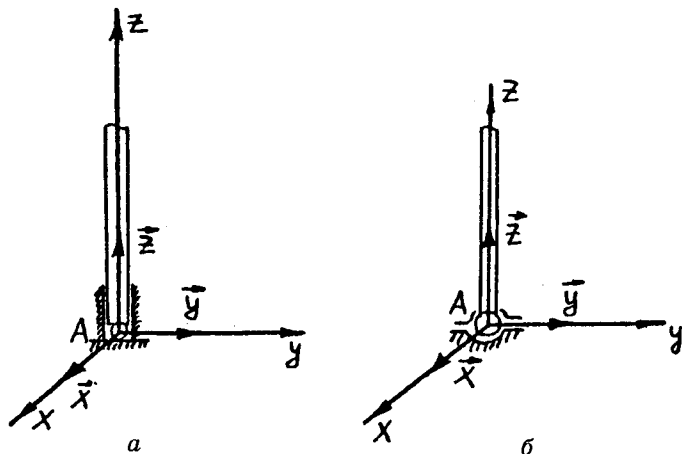


Рис. 1.35

1.9. Зовнішні та внутрішні сили. Метод перерізів

Класифікація сил за ознакою (зовнішні та внутрішні) застосовується у разі вивчення рівноваги чи руху матеріальних систем, які складаються з матеріальних точок, твердих тіл або частинок суцільного середовища.

Зовнішніми називаються сили, які виникають при взаємодії матеріальних точок, твердих тіл або частинок суцільного середовища даної системи з іншими матеріальними точками, твердими тілами або частинками суцільного середовища, що не належать до даної системи, рівновага чи рух якої вивчається.

Внутрішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками, твердими тілами або частинками суцільного середовища, що входять до складу даної системи, рівновага чи рух якої вивчається.

Внутрішні сили, згідно з аксіомою про дію та протидію, попарно рівні за модулем та діють уздовж однієї прямої у протилежні боки.

Розглянемо засіб, який дає можливість провести вивчення внутрішніх сил через вивчення зовнішніх сил.

Нехай, наприклад, необхідно визначити сили взаємодії частинок розтягнутого тонкого стрижня AB у деякій точці C (рис. 1.36). Для цього уявно розсікаємо стрижень перерізом, що проходить через точку C , на дві частини AC і CB . Сили \vec{S}_C та \vec{S}'_C на рис. 1.36, відповідно до аксіоми про звільнення тіла від в'язей, є силами, з якими частини стрижня AC та CB діють одна на одну в точці C , тобто є внутрішніми силами взаємодії частинок стрижня в точці C . З другого боку, для кожної з частин стрижня ці сили будуть зовнішніми. Цей засіб виділення сил взаємодії між частками неперервного середовища — внутрішніх сил — називається *методом перерізів*.

Метод перерізів застосовується не тільки в розглянутому простому випадку лінійного тіла, а й взагалі при вивченні внутрішніх сил у суцільних середовищах, у тому числі й у твердих тілах.

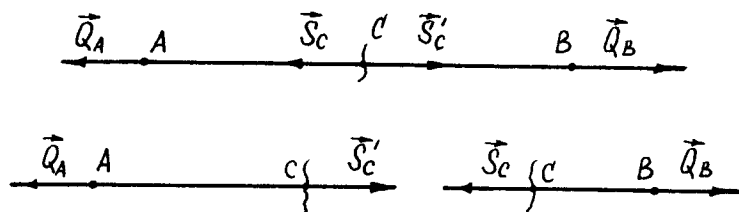


Рис. 1.36

1.10. Задачі статичи твердого тіла

З визначення розділу теоретичної механіки — статичи твердого тіла — випливають дві основні задачі:

1. Задача про еквівалентні перетворення сил: як дану складну систему сил замінити іншою, більш простою, еквівалентною їй?

2. Задача про рівновагу тіла: які умови має задовольняти система сил, прикладена до твердого тіла, щоб воно перебувало в рівновазі?

Перша основна задача актуальна не тільки для статички, а й для всієї механіки.

Друга задача має місце в основному у тих випадках, коли рівновага заздалегідь відома, наприклад коли відомо, що тверде тіло перебуває у стані рівноваги, яку забезпечують в'язі, накладені на тверде тіло. При цьому умови рівноваги встановлюють залежності між усіма силами, прикладеними до тіла. За допомогою цих умов можна визначити невідомі сили, наприклад реакції в'язей або інші.

Запитання для самоперевірки

1. Якої форми руху матерії стосуються закони теоретичної механіки?
2. Що розуміють під механічною формою руху матерії?
3. Якими є поняття про простір і час у теоретичній механіці?
4. Який зміст має поняття “система відліку” в теоретичній механіці?
5. Чи мають фізичне обґрунтування такі абстрактні поняття, як матеріальна точка, абсолютно тверде тіло та суцільне середовище?
6. Що розуміють під поняттям “сила”?
7. Які системи сил називаються еквівалентними та зрівноваженими?
8. Яка сила називається рівнодійною?
9. Що розуміють під рівновагою матеріальної точки та твердого тіла?
10. Як формулюється аксіома про дві сили?
11. Як формулюється аксіома про додавання та віднімання зрівноваженої системи сил?
12. За якої умови сила може розглядатися як ковзний вектор?
13. Як формулюється аксіома про паралелограм сил?
14. Якими є найпростіші дії над силами, за яких механічний стан твердого тіла не змінюється?
15. Як визначається графічно й аналітично рівнодійна двох непаралельних сил?
16. Що таке силовий (векторний) багатокутник?
17. Як розкласти силу за двома заданими напрямками?
18. Як розкласти силу за трьома взаємно перпендикулярними напрямками?
19. Як формулюється теорема про три сили?
20. За яких умов три непаралельні сили, прикладені до твердого тіла, зрівноважуються?
21. Чи можлива рівновага трьох непаралельних сил, які не розміщені в одній площині?
22. Що таке проекція сили на вісь?
23. Як визначити силу аналітично?

24. Що таке проекція сили на площину?
25. У чому полягає метод подвійного проекціювання сил?
26. Що таке момент сили відносно точки?
27. Як визначити момент сили відносно точки аналітично?
28. Що таке момент сили відносно осі і як його обчислити?
29. Яка залежність між моментом сили відносно осі і точки, що лежить на цій осі?
30. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
31. Чи змінюється момент сили відносно точки при перенесенні сили вздовж її лінії дії?
32. В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
33. Як формулюється теорема про момент рівнодійної відносно довільної точки?
34. Як формулюється теорема про момент рівнодійної відносно довільної осі?
35. Що таке головний вектор системи сил?
36. Що таке головний момент системи сил?
37. Чим головний вектор відрізняється від рівнодійної?
38. Як називається операція з визначення головного вектора та головного моменту системи сил?
39. Що таке розподілені сили?
40. Як визначити рівнодійну двох паралельних сил, напрямлених в один бік?
41. Як визначити рівнодійну двох паралельних сил, що напрямлені в протилежні боки та чисельно не рівні?
42. Що таке правило важеля?
43. Що таке центр паралельних сил?
44. Як визначити рівнодійну системи паралельних сил?
45. Як визначається рівнодійна паралельних розподілених сил, що напрямлені в один бік, при їх розподілі вздовж прямої, площі та по об'єму?
46. Як формулюється аксіома про рівність дії та протидії?
47. Що таке реакція в'язі? У чому полягає відмінність активних та пасивних сил?
48. Назвіть основні види в'язей, для яких лінії дії реакцій відомі.
49. Як формулюється аксіома про звільнення тіла від в'язей?
50. Якщо тіло, що деформується, перебуває у стані рівноваги під дією деякої системи сил, то чи будуть ці сили задовольняти умови рівноваги абсолютно твердого тіла?
51. Що таке зовнішні та внутрішні сили?
52. У чому полягає метод перерізів?
53. У чому полягають дві основні задачі статички твєрдого тїла?

Глава 2

ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ, ЩО ДІЄ НА ТВЕРДЕ ТІЛО

2.1. Еквівалентне перетворення системи збіжних сил

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, утворюють систему збіжних сил.

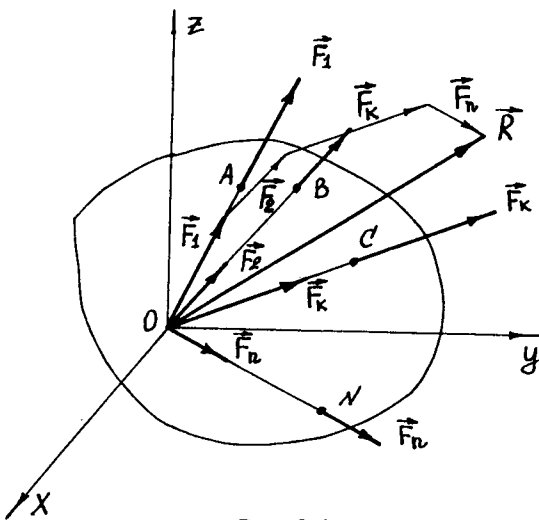


Рис. 2.1

Подамо розв'язок першої основної задачі статички твердого тіла для цієї системи, тобто проведемо еквівалентне перетворення цієї системи у більш просту.

Нехай задана збіжна система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, що прикладена до твердого тіла в точках A, B, \dots, N (рис. 2.1). Користуючись тим, що сила — вектор ковзний, переносимо всі сили в точку O . Складаючи сили за правилом паралелограма або правилом силового багатокутника (див. параграф 1.2), знайдемо геометричну суму сил системи:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (2.1)$$

Оскільки при перетвореннях системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ ми використовуємо засоби, які не приводять до зміни механічного стану твердого тіла, то знайдена сила є рівнодієюю цієї системи сил, тобто дію системи збіжних сил на тверде тіло можна замінити дією однієї сили \vec{R} , яка прикладена в точці перетину лінії дії сил системи і дорівнює геометричній сумі цих сил.

Знайдемо числове значення та напрям рівнодіючої \vec{R} , користуючись аналітичним визначенням сили. Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O (рис. 2.1). На підставі формул (1.9) та (1.10) дістанемо:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2}; \quad (2.2)$$

$$\cos(\widehat{\vec{R}, x}) = \frac{R_x}{R} = \frac{\sum_{k=1}^n F_{kx}}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{R}, y}) = \frac{R_y}{R} = \frac{\sum_{k=1}^n F_{ky}}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2}}; \quad (2.3)$$

$$\cos(\widehat{\vec{R}, z}) = \frac{R_z}{R} = \frac{\sum_{k=1}^n F_{kz}}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2}};$$

Рівності $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$, $R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}$, $R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}$ випливають з такої теореми: *проекція геометричної суми векторів на будь-яку вісь дорівнює алгебричній сумі проєкцій складових векторів на ту саму вісь.*

Дійсно, геометричну суму сил можна на основі формули (1.6) подати у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = (F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}) + (F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}) + \dots + \\ &+ (F_{nx}\vec{i} + F_{ny}\vec{j} + F_{nz}\vec{k}) = (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny})\vec{j} + \\ &+ (F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz})\vec{k} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^n F_{ky};$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{k=1}^n F_{kz},$$

що доводить цю теорему.

Зауважимо, що довести цю теорему можна іншим шляхом — геометричним. Геометричне доведення цієї теореми подано на рис. 2.2. Формула (2.2) визначає числове значення (модуль) рівнодійної сили \vec{R} , а формули (2.3) — напрям цієї рівнодійної відносно осей декартової системи координат.

Отже, рівнодійна системи збіжних сил може бути визначена геометрично за допомогою побудови силового багатокутника (рис. 2.1) та аналітично — через проекції сил на осі декартової системи координат.

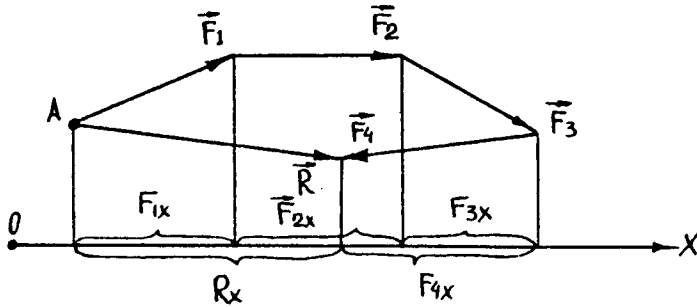


Рис. 2.2

2.2. Умови рівноваги системи збіжних сил

Дамо розв'язок другої основної задачі статички твердого тіла для збіжної системи сил, тобто визначимо умови, за яких діюча збіжна система сил буде зрівноваженою.

Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи сил дорівнювала нулю:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0}. \quad (2.4)$$

Умова (2.4) є механічною умовою рівноваги системи збіжних сил.

Необхідність умови (2.4) випливає з того, що система збіжних сил еквівалентна одній силі — рівнодійній \vec{R} . Очевидно, що під дією однієї сили тверде тіло може перебувати у стані рівноваги тільки тоді, коли ця сила дорівнює нулеві.

Достатність умови (2.4) випливає з такого: оскільки система сил має рівнодійну, що дорівнює нулеві, то діюча на тверде тіло система сил є зрівноваженою. Зрівноважена система не може змінити механічний стан твердого тіла. Якщо тіло перебувало у стані рівноваги до дії сил, то воно залишається у цьому стані і під дією цих сил.

Далі у главі 3 буде показано, що механічна умова рівноваги системи збіжних сил (2.4) випливає із загальної теореми статки твердого тіла про рівновагу довільної системи сил.

На підставі рівності (2.4) та двох способів визначення рівнодійної можна сформулювати геометричну та аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил.

Геометрична умова рівноваги. Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно й достатньо, щоб багатокутник, побудований із сил системи, був замкненим.

Аналітичні умови рівноваги. Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно й достатньо, щоб алгебричні суми проєкцій усіх сил системи на осі декартової системи координат дорівнювали нулю,

що випливає з аналітичного визначення рівнодійної \vec{R} , тобто

$$R = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2} = 0.$$

Звідси маємо

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (2.5)$$

З рівнянь (2.5) випливає, що у випадку системи збіжних сил, які розташовані в одній площині, наприклад xOy , з трьох умов залишаються тільки дві, тобто

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (2.6)$$

Якщо сили розташовані вздовж однієї осі, наприклад Ox , то будемо мати одну умову:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0. \quad (2.7)$$

Зауважимо, що умови рівноваги (2.5) — (2.7) називаються також рівняннями рівноваги, оскільки дають можливість визначати невідомі сили, що діють на тверде тіло у стані його рівноваги.

2.3. Методика розв'язання задач статички твердого тіла.

Приклади розв'язання задач з рівноваги збіжної системи сил.

Методичні вказівки

Розв'язання задач статички твердого тіла будується за таким загальним планом.

1. Вибирають тверде тіло (систему твердих тіл), рівновагу якого (яких) потрібно розглянути, щоб визначити невідомі сили, які діють на тверде тіло (систему твердих тіл), або інші невідомі величини.

2. Визначають вид в'язей (див. параграф 1.8). Звільняють тверде тіло (систему твердих тіл) від в'язей. Для цього застосовують аксіому про звільнення тіла від в'язей, згідно з якою дія в'язей замінюється відповідними реакціями. Прикладають до твердого тіла (твердих тіл) задані сили і реакції в'язей.

3. Визначають систему сил, що діє на тверде тіло (тверді тіла), та умови рівноваги, що відповідають цій системі.

4. З умов рівноваги (рівнянь рівноваги) системи сил, що діє на тверде тіло (тверді тіла), визначають невідомі сили або інші невідомі величини.

5. Аналізують одержані результати.

У цьому параграфі розглядатимуться задачі з рівноваги збіжної системи сил. Для їх розв'язання можна застосувати геометричну або аналітичні умови рівноваги.

Геометрична умова рівноваги застосовується тоді, коли загальна кількість сил, що діють на тверде тіло (заданих та шуканих), дорівнює трьом. При рівновазі трикутник, побудований з цих сил, мусить бути замкненим. З цього трикутника і визначають невідомі сили.

Аналітичними умовами рівноваги можна користуватися за будь-якої кількості сил, що діють на тверде тіло. Щоб скласти рівняння рівноваги, необхідно вибрати відповідну систему декартових координат. Вибір цієї системи довільний, але рівняння рівноваги будуть розв'язуватися простіше, якщо осі координат збігатимуться з лініями дії невідомих сил.

Додаткові методичні вказівки подано далі при розв'язання конкретних задач.

Приклад 2.1. Визначити вагу P теплообмінника, який можна підвісити в узлі B^1 двох рівних за довжиною крокв перекриття цеху, якщо допустима горизонтальна сила в узлах кріплення крокв з опорними стовпами (точки A та C) не може бути більшою ніж S (рис. 2.3, *a*). Вагою крокв знехтувати.

Розв'язання. Сила ваги \vec{P} теплообмінника розподіляється між двома кроквами AB та BC . Знайдемо ці сили. Для цього розкладаємо силу \vec{P} за двома напрямками (див. параграф 1.2), тобто вздовж прямих AB та AC (рис. 2.3, *b*). Маємо сили \vec{T}_{BA} та \vec{T}_{BC} , які рівні за модулем. Знайдемо числове значення

¹ Шарнір, що з'єднує два або більше стрижнів.

(модуль) цих сил. Оскільки паралелограм $BCKE$ — це ромб, то з трикутника

ΔBDO знайдемо $T_{BA} \cos \frac{\alpha}{2} = BO$. Проте $BO = \frac{1}{2} BK = \frac{P}{2}$, тому $\frac{P}{2} = T_{BA} \cos \frac{\alpha}{2}$,

$$\text{звідки } T_{BA} = T_{BC} = \frac{P}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

На підставі того, що сила є ковзним вектором, переносимо сили \vec{T}_{BA} та \vec{T}_{BC} уздовж прямих AB та BC у вузли A та C (рис. 2.3, б). Розкладаємо сили \vec{T}_{BA} та \vec{T}_{BC} за двома напрямками, тобто вздовж горизонтальної прямої AC та вздовж прямої, паралельної силі \vec{P} . Маємо дві сили: \vec{S} та \vec{Q} . З трикутника ΔAMN знайдемо числове значення сили \vec{S} :

$$S = T_{BA} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{P \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Звідси маємо

$$P = 2S \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 2S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

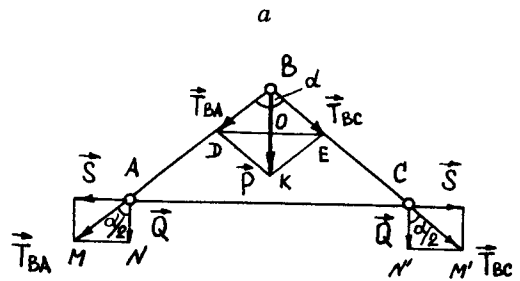
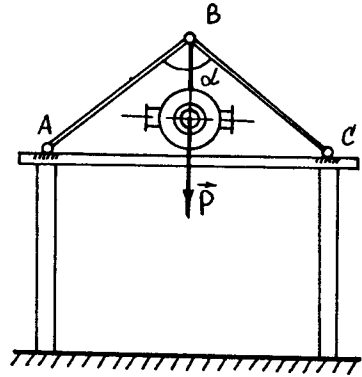


Рис. 2.3

Приклад 2.2. Для механізації вантажно-розвантажувальних робіт на складі готової продукції цукрового заводу розроблено конструкцію малогабаритного крана. Схему зображено на рис. 2.4.

Кран складається зі стріли AC , блоків A та B , троса ABD та двигуна D . Кран рівномірно підіймає або опускає вантаж, вагу якого позначено P . При цьому стріла AC відхиляється від вертикалі на кут φ . Нехтуючи вагою троса та стріли, а також вагою і розмірами блоків A та B , визначити натяг троса та зусилля в стрілі, якщо $BC = 1,5$ м і $AC = 4$ м.

Розв'язання. Визначення невідомих сил можна здійснити двома способами. При цьому необхідно зазначити, що під терміном *визначення сили* мається на увазі визначення числового значення сили, точки її прикладення, лінії дії та напрямку вздовж лінії дії, що впливає з векторного визначення сили.

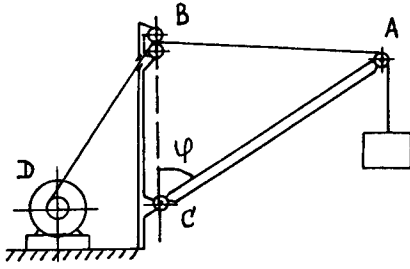


Рис. 2.4

перерізів, то у цьому випадку було б справедливим припущення, що трос і стріла стискаються).

Блок A під дією сил \vec{P} , \vec{S}_1 і \vec{S}_2 перебуває у стані рівноваги. Сили \vec{P} , \vec{S}_1 і \vec{S}_2 лежать в одній площині, лінії дії цих сил перетинаються в точці A , тобто на блок A діє плоска система збіжних сил.

Для визначення сил \vec{S}_1 та \vec{S}_2 можна застосувати геометричну або аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил. Оскільки на тверде тіло діють три сили, то доцільно скористатися геометричною умовою рівноваги.

Побудуємо силовий трикутник. Побудову починаємо з відомої сили \vec{P} . Зображуємо вектор сили \vec{P} та проводимо через його кінець і початок прямі, паралельні невідомим силам \vec{S}_1 та \vec{S}_2 . Точка перетину цих прямих визначає третю вершину силового трикутника. Орієнтація всіх векторів має бути такою, щоб силовий трикутник був замкненим (рис. 2.5, б).

Зазначимо, що дійсний напрям внутрішніх сил при використанні методу перерізів визначається з умов рівноваги системи сил. У нашому випадку — із силового трикутника. Проводячи перерізи та вказуючи відповідні внутрішні сили, ми, як правило, знаємо лише лінії їх дії (як лінії дії відповідних реакцій відкинутих частин), але не знаємо їх напрямів уздовж цих ліній. Тому, вказуючи внутрішні сили, початково напрямляємо їх або від перерізів (рис. 2.5, а), або до перерізів за лініями їх дії. Побудувавши силовий трикутник, коригуємо напрям внутрішніх сил.

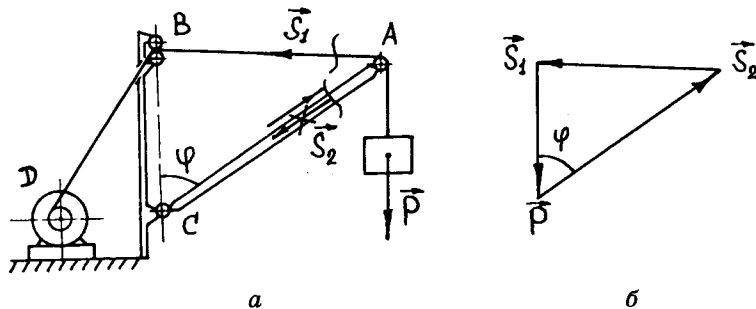


Рис. 2.5

Спосіб 1. Застосуємо метод перерізів, тобто вирізаємо уявно блок A (рис. 2.5, а) при довільному положенні AC . Внутрішні сили \vec{S}_1 (зусилля в тросі) та \vec{S}_2 (зусилля в стрілі) напрямляємо від перерізів уздовж троса та стріли (див. параграфи 1.8 і 1.9), тобто припускаємо, що трос та стріла розтягуються силами \vec{S}_1 та \vec{S}_2 (якщо сили \vec{S}_1 і \vec{S}_2 були б напрямлені стрілками до

перерізів, то у цьому випадку було б справедливим припущення, що трос і стріла стискаються).

Аналізуючи напрями сил \vec{S}_1 та \vec{S}_2 , що дає трикутник $\Delta\vec{P}\vec{S}_2\vec{S}_1$, та напрями цих сил на рис. 2.5, а, змінюємо напрям сили \vec{S}_2 на проти-

лежний. Припущення, що стріла розтягується, не справджується — стріла стискається силою \vec{S}_2 . Трос розтягується силою \vec{S}_1 .

Отже, напрями невідомих внутрішніх сил \vec{S}_1 (натяг троса) та \vec{S}_2 (зусилля в стрілі) визначено.

Числові значення сил \vec{S}_1 та \vec{S}_2 знайдемо зі силового трикутника $\Delta\vec{P}\vec{S}_2\vec{S}_1$. Оскільки трикутники $\Delta\vec{P}\vec{S}_2\vec{S}_1$ і ΔCAB подібні, то маємо співвідношення

$$\frac{P}{BC} = \frac{S_1}{AB} = \frac{S_2}{AC}.$$

Звідси

$$S_1 = \frac{P \cdot AB}{BC}; \quad S_2 = \frac{P \cdot AC}{BC},$$

де AC та BC — відомі (за умовою задачі). Знайдемо AB . На підставі теореми косинусів з трикутника ΔABC маємо

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos \varphi} = \\ &= \sqrt{1,5^2 + 4^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 4 \cos \varphi} = \sqrt{18,25 - 12 \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Тоді

$$S_1 = \frac{P\sqrt{18,25 - 12 \cos \varphi}}{1,5} \quad (\text{Н});$$

$$S_2 = \frac{4P}{1,5} = 2,67P \quad (\text{Н}).$$

Зусилля в стрілі не залежить від кута відхилення стріли від вертикалі, тобто за будь-яких положень стріли має сталі значення. Натяг троса залежить від кута відхилення стріли φ і зі збільшенням φ також збільшується.

Спосіб 2. Розглянемо рівновагу стріли AC при її довільному положенні (рис. 2.6, б). Аналізуємо в'язі, накладені на стрілу AC . Маємо два види в'язей: невагома нитка та нерухомий шарнір C .

Реакція нитки напрямлена вздовж нитки від точки A . Лінія дії реакції шарніра \vec{S} не визначена (див. параграф 1.8). Щоб її визначити, застосуємо теорему про три сили (див. параграф 1.2). Згідно з теоремою, лінія дії сили \vec{S} напрямлена вздовж стріли AC . Попередньо напрямляємо цю силу, як показано на рис. 2.6, б.

На стрілу AC діють три сили: \vec{P} , \vec{T} і \vec{S} , що лежать в одній площині, лінії дії цих сил перетинаються в точці A , тобто на стрілу AC діє плоска система збіжних сил.

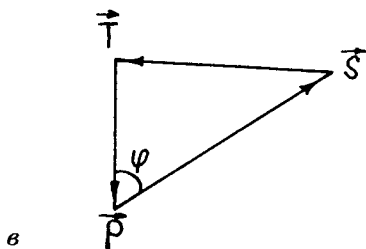
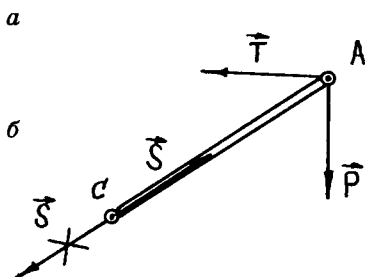
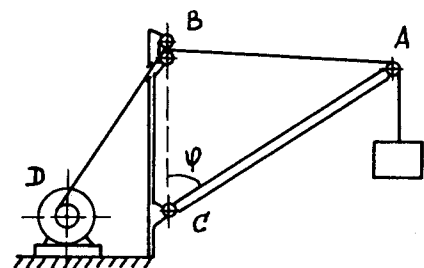


Рис. 2.6

Як у першому способі, застосуємо геометричну умову рівноваги збіжної системи сил, тобто будемо силовий трикутник (рис. 2.6, в).

Зауважимо, що дійсний напрям реакцій, тобто сил, з якими в'язі діють на тверде тіло, що розглядається у рівновазі, визначає силовий трикутник. Звільняючи тверде тіло від в'язей та замінюючи в'язі відповідними реакціями, ми, як правило, знаємо лише лінії дії реакції в'язей, але не знаємо напрямів реакцій уздовж цих ліній. Тому, замінюючи в'язь відповідною реакцією, початково напрямляємо реакцію в будь-який бік по лінії її дії. Побудувавши силовий трикутник, коригуємо напрям реакції (рис. 2.6, б, в).

Аналізуючи напрямні \vec{T} та \vec{S} , що дає трикутник $\Delta\vec{P}\vec{S}\vec{T}$, та напрямні цих сил на рис. 2.6, б, змінюємо напрям сили \vec{S} на протилежний.

Числові значення сил \vec{T} та \vec{S} знайдемо зі силового трикутника $\Delta\vec{P}\vec{S}\vec{T}$. Оскільки трикутники $\Delta\vec{P}\vec{S}\vec{T}$ і ΔCAB подібні, маємо співвідношення

$$\frac{P}{BC} = \frac{S}{AC} = \frac{T}{AB}.$$

Звідси

$$S_1 = \frac{P \cdot AB}{BC}; \quad S_2 = \frac{P \cdot AC}{BC},$$

де AC та BC відомі (за умовою задачі). Знайдемо AB . На підставі теореми косинусів з трикутника ΔABC дістанемо

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos \varphi} = \sqrt{18,25 - 12 \cos \varphi}.$$

Тоді

$$T = \frac{P \sqrt{18,25 - 12 \cos \varphi}}{1,5} \quad (\text{Н}); \quad S = \frac{4P}{1,5} = 2,67P \quad (\text{Н}).$$

Сили \vec{T} та \vec{S} — це реакції в точках A та C , тобто сили, з якими трос та шарнір діють на стрілу. Сила, що розтягує трос (натяг троса), та сила, яка діє на стрілу (зусилля в стрілі), чисельно дорівнюють реакціям нитки \vec{T} і шарніра \vec{S} , але протилежно напрямлені до цих реакцій. Звідси впливає, що трос розтягується, а стріла стискається.

Отже можна зробити висновок: зусилля в стрижнях, нитках, тросах, ланцюгах тощо можуть бути визначені або безпосередньо методом перерізів, або через відповідні реакції.

Приклад 2.3. Визначити сили, з якими однорідний матеріал, що має вагу $P = 20$ Н та форму кулі, діє на стінки щоклової дробарки. Тертям знехтувати. Кут захвату матеріалу $\varphi = 30^\circ$ (рис. 2.7).

Розв'язання. В задачі слід визначити сили, з якими матеріал діє на гладенькі поверхні в точках D та C . Невідомі сили знайдемо через реакції цих поверхонь. Розглянемо матеріал у стані рівноваги. На кульку діють сили: \vec{P} (вага кульки), \vec{N}_D (реакція гладенької поверхні MN у точці D) та \vec{N}_C (реакція гладенької поверхні AB у точці C). Сили \vec{P} , \vec{N}_D і \vec{N}_C утворюють збіжну плоску систему. Оскільки маємо три сили, то застосуємо

геометричну умову рівноваги системи сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник (рис. 2.8). Трикутник $\Delta \vec{P} \vec{N}_C \vec{N}_D$ прямокутний. Кут $\beta = \varphi$, а кут $\alpha = 90^\circ - \varphi$, що впливає з аналізу рис. 2.7 та 2.8.

Коригувати напрями сил \vec{N}_D та \vec{N}_C на рис. 2.7 не треба, бо вони збігаються з напрямками, що дає силовий трикутник.

У загальному випадку, щоб визначити числові значення невідомих сил з силового трикутника, використовують теорему синусів. У цій задачі, оскільки трикутник прямокутний, доцільніше скористатися поняттям синуса та косинуса, тобто

$$\cos \alpha = \frac{P}{N_C}; \quad \sin \alpha = \frac{N_D}{N_C}.$$

Звідси

$$N_C = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{P}{\cos(90^\circ - \varphi)} = \frac{P}{\cos 60^\circ} = \frac{20}{0,5} = 40 \text{ (Н)};$$

$$N_D = N_C \sin \alpha = N_C \sin(90^\circ - \varphi) = N_C \sin 60^\circ = 40 \cdot 0,866 = 34,6 \text{ (Н)}.$$

Сили, з якими матеріал діє на стінки дробарки, чисельно дорівнюють реакціям \vec{N}_D та \vec{N}_C , але направлені протилежно цим реакціям.

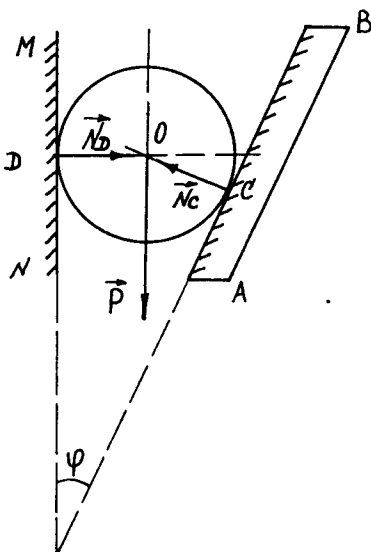


Рис. 2.7

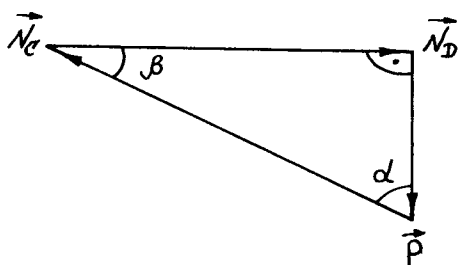


Рис. 2.8

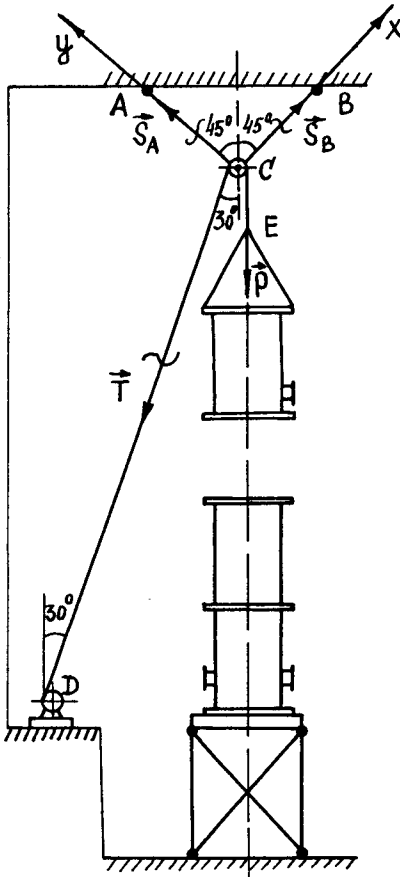


Рис. 2.9

Приклад 2.4. Монтаж ректифікаційної колони, що складається з окремих елементів (царг), здійснюється за схемою, наведеною на рис. 2.9. Для рівномірного піднімання елементів колони використовується кронштейн, що складається з двох стрижнів AC та BC , блока C та лебідки з тросом D . Нехтуючи вагою троса та стрижнів, вагою та розмірами блока, а також тертям у блоці, визначити зусилля у стрижнях. Вага елемента $P = 5$ кН.

Розв'язання. Застосуємо метод перерізів, тобто уявно вирізуємо блок (рис. 2.9). На блок C діють: сила \vec{S}_A (зусилля у стрижні AC), сила \vec{S}_B (зусилля у стрижні BC), сила \vec{T} (натяг троса) та сила \vec{P} (вага елемента).

Зауважимо, що, оскільки тертям у блоці нехтуємо, модуль сили \vec{T} дорівнює модулю сили \vec{P} .

На блок C діють чотири сили, які розташовані в одній площині. Лінії дії сил перетинаються в точці C (бо розмірами блока нехтуємо); отже, на блок C діє плоска збіжна система сил.

Оскільки кількість сил, які діють на блок C , більше трьох, користуємося аналітичними умовами рівноваги плоскої збіжної системи сил (див. параграф 2.2). Побудуємо систему декартових координат з початком у точці C (рис. 2.9) та складемо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил.

Зазначимо, що, будуючи систему координат, доцільно, якщо це можливо, провести осі координат так, щоб вони збіглися з лініями дії невідомих сил. У цьому випадку рівняння рівноваги будуть незалежними. Маємо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad S_B - P \cos 45^\circ - T \cos 15^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad S_A - P \sin 45^\circ - T \sin 15^\circ = 0. \quad (2)$$

З рівняння (1) визначаємо

$$S_B = P \cos 45^\circ + T \cos 15^\circ = P (\cos 45^\circ + \cos 15^\circ) = 5 (0,707 + 0,966) = 8,4 \text{ (кН)},$$

а з рівняння (2) —

$$S_A = P \sin 45^\circ + T \sin 15^\circ = P (\sin 45^\circ + \sin 15^\circ) = 5 (0,707 + 0,259) = 4,8 \text{ (кН)}.$$

При цьому, якщо з рівнянь рівноваги шукані сили визначаються зі знаком "+", то початково заданий напрям цих сил є дійсним, а якщо зі знаком "-", то слід змінити їх початковий напрям на протилежний.

У нашому випадку на рис. 2.9 зображено дійсні напрями сил \vec{S}_A та \vec{S}_B . Під дією цих сил стрижні розтягуються.

Приклад 2.5. Зберігаючи умови прикладу 2.4, визначити зусилля в кронштейні, що складається з трьох стрижнів, тобто в кожному з цих стрижнів (рис. 2.10).

Розв'язання. Застосуємо метод перерізів. Вирізуємо уявно блок C (рис. 2.10). На блок діють: сила \vec{S}_A (зусилля в стрижні AC), сила \vec{S}_C (зусилля в стрижні CM), сила \vec{S}_B (зусилля в стрижні CB), сила \vec{P} (вага елемента колони) та сила \vec{T} (натяг троса), що дорівнює за модулем силі \vec{P} . На блок діє плоска система збіжних сил.

Складемо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил (осі координат показано на рис. 2.10):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad S_B + S_C \cos 45^\circ - P \cos 45^\circ - T \cos 15^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad S_A + S_C \sin 45^\circ - P \sin 45^\circ - T \sin 15^\circ = 0. \quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) містять три невідомі, тобто кількість невідомих сил перевищує число рівнянь рівноваги, складених для їх визначення. Такі задачі називаються *статично невизначеними*. В'язі, які статично визначену задачу перетворюють на статично невизначену, називаються *зайвими в'язями*. Кількість зайвих в'язей визначає ступінь статичної невизначеності. У нашому випадку задача один раз статично невизначена.

Якщо до рівнянь (1) та (2) додати ще одне рівняння, яке виявляє зв'язок між силами \vec{S}_B , \vec{S}_C та \vec{S}_A , то задача може бути розв'язана. На підставі моделі абсолютно твердого тіла це зробити неможливо. Статично невизначені задачі розв'язуються на підставі іншої моделі — ідеально пружного тіла.

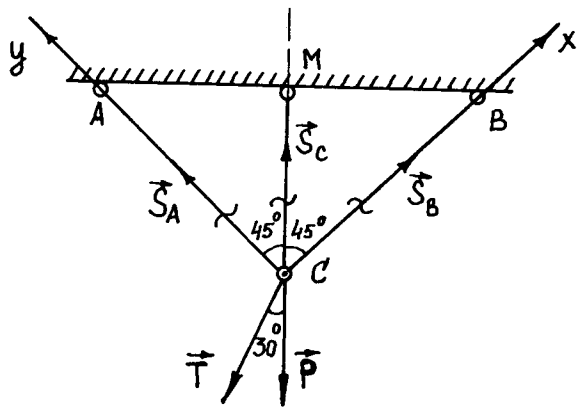


Рис. 2.10

Подамо найпростіший спосіб розв'язання цієї задачі¹, розглядаючи стрижні кронштейна як ідеально пружні тіла, деформація яких мала та підпорядковується закону Гука, тобто $F = c\Delta$, де F — діючі на тіло сили; c — жорсткість тіла; Δ — деформація тіла.

Складемо рівняння, яке виявляє зв'язок між силами \vec{S}_A , \vec{S}_B та \vec{S}_C , розглядаючи деформацію кронштейна в цілому, тобто побудуємо так звану діаграму переміщень. На рис. 2.11 така діаграма побудована у великому масштабі. Під дією сил \vec{P} і \vec{T} кожний зі стрижнів розтягується на величину Δ_i ; Δ_1 , Δ_2 та Δ_3 — відповідно деформації стрижнів AC , MC і BC . Деформація стрижнів приводить до того, що точка C займає нове положення (C' на рис. 2.11). Щоб знайти це нове положення точки C , необхідно уявно роз'єднати стрижні в точці C , надати їм відповідні деформації і потім, обертаючи кожен стрижень відносно шарнірів, з'єднати їх в одній точці C' . Оскільки деформації малі, то дуги кола, що мають місце

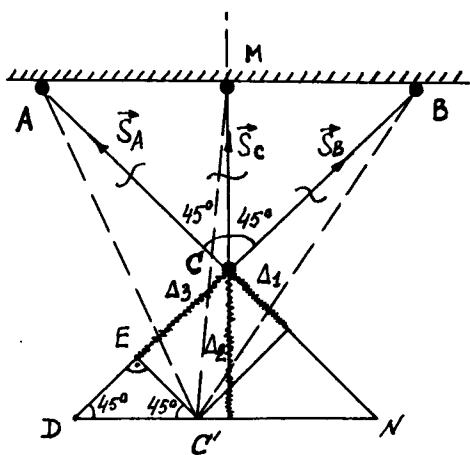


Рис. 2.11

при обертанні стрижнів, замінюються перпендикулярами до відповідних стрижнів. Так побудована діаграма переміщень на рис. 2.11; точки D і N знайдено додатково.

З рис. 2.11 випливає:

$$\Delta_2 = (\Delta_3 + DE) \cos 45^\circ = (\Delta_3 + \Delta_1) \cos 45^\circ. \quad (3)$$

Відповідно до закону Гука деформації стрижнів виражаємо через внутрішні

сили, тобто $\Delta_1 = \frac{S_A}{c_1}$; $\Delta_2 = \frac{S_C}{c_2}$; $\Delta_3 = \frac{S_B}{c_3}$, де c_1 , c_2 , c_3 — відповідно жорсткість стрижнів AC , MC та BC . Нехай жорсткість усіх стрижнів буде однакою: $c_1 = c_2 = c_3 = c$. Тоді

$$\Delta_1 = \frac{S_A}{c}; \quad \Delta_2 = \frac{S_C}{c}; \quad \Delta_3 = \frac{S_B}{c}. \quad (4)$$

Підставляючи рівності (4) у рівняння (3), здобудемо

¹ Докладніші відомості про розв'язання подібних статично невизначених задач можна знайти у курсі "Опір матеріалів".

$$\frac{S_C}{c} = \left(\frac{S_B}{c} + \frac{S_A}{c} \right) \cos 45^\circ;$$

$$S_C = (S_B + S_A) \cos 45^\circ; \quad (5)$$

$$1,41S_C = S_B + S_A.$$

Це і є шукане рівняння.

Розв'яжемо спільну систему рівнянь (1), (2) і (5), тобто

$$S_B + 0,707S_C - P(0,97 + 0,707) = 0;$$

$$S_A + 0,707S_C - P(0,707 + 0,26) = 0.$$

Звідси

$$S_B = 1,68P - 0,707S_C;$$

$$S_A = 0,97P - 0,707S_C.$$

Тоді

$$1,68P - 0,707S_C + 0,97P - 0,707S_C = 1,41S_C$$

і, отже,

$$S_C = \frac{0,71}{2,82} P = 0,25P = 0,25 \cdot 5 = 1,25 \text{ (кН)}.$$

Таким чином,

$$S_B = 1,68P - 0,707 \cdot 0,25P = 1,5P = 1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ (кН)};$$

$$S_A = 0,97P - 0,707 \cdot 0,25P = 0,79P = 0,79 \cdot 5 = 3,95 \text{ (кН)}.$$

Приклад 2.6. Теплообмінник бражної колони спирається на конструкцію, схему якої зображено на рис. 2.12. Конструкція складається з двох рам — ACB і $A'C'B'$ — і стяжок. На кожну з рам з боку теплообмінника передаються сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 . Точки прикладання цих сил — це точки E та E' .

Вважаючи закріплення рам у точках A , B , C , A' , B' та C' шарнірними, визначити реакції в цих шарнірах. Вагою рам знехтувати.

Розв'язання. Побудуємо схему однієї з рам (рис. 2.13). Зауважимо, що рами, подібні рамі на схемі, називають тришарнірними.

В задачі треба визначити реакції шарнірів A , B та C . Невідомі сили знайдемо, розглядаючи рівновагу рами.

При розв'язанні задач статики трапляються задачі, в яких тверді тіла з'єднані між собою, тобто утворюють систему твердих тіл. В'язі, що з'єднують тверді тіла, називаються внутрішніми в'язями на відміну від зовнішніх в'язей, які з'єднують систему твердих тіл з іншими тілами, що не входять до цієї системи.

Якщо після звільнення від зовнішніх в'язей система твердих тіл залишається жорсткою, то методика розв'язання цієї задачі не відрізняється від методики розв'язання задач з рівноваги твердого тіла.

то кожне тіло, що належить до цієї системи, теж перебуває у стані рівноваги. Тому додатково необхідно розглянути рівновагу будь-якого одного або кількох твердих тіл, що утворюють дану систему.

Спосіб 2. Роз'єднуємо систему твердих тіл на окремі тверді тіла по внутрішніх в'язях та розглядаємо рівновагу кожного твердого тіла окремо. Зазначимо, що реакції внутрішніх в'язей будуть попарно рівними і протилежними за напрямом.

Доцільність застосування того чи іншого способу розв'язання залежить від умов конкретної задачі.

Щоб визначити реакції рами, які позначаємо \vec{R}_A , \vec{R}_B та \vec{R}_C , застосуємо другий спосіб, тобто роз'єднуємо раму по шарніру C на дві частини і розглядаємо рівновагу кожної частини окремо (рис. 2.14, 2.15).

До правої частини рами прикладено дві сили, тобто реакція шарнірно-нерухомої опори B (нерухомий шарнір) \vec{R}_B та реакція нерухомого шарніра C — \vec{R}_C . Оскільки ця частина рами перебуває у стані рівноваги, то система сил \vec{R}_C та \vec{R}_B утворює найпростішу зрівноважену систему, тобто сили \vec{R}_C та \vec{R}_B рівні за модулем та діють у протилежних напрямках. Дамо початковий напрям цим реакціям, як показано на рис. 2.15.

До лівої частини рами прикладено три сили, тобто реакція шарнірно-нерухомої опори A (нерухомий шарнір) \vec{R}_A , активна сила \vec{P} та реакція нерухомого шарніра \vec{R}_C' (напрямок протилежним до напрямку \vec{R}_C). Згідно з теоремою про три сили, лінії дії цих сил перетинаються в одній точці. Знайдемо цю точку за напрямом двох сил, лінії дії яких відомі, тобто сил \vec{P} та \vec{R}_C' (рис. 2.14). Отже, сили, що діють на ліву частину рами, утворюють плоску збіжну систему сил. Оскільки кількість сил дорівнює трьом, то щоб визначити невідомі сили, застосуємо геометричну умову рівноваги цих сил.

Будуємо силувий трикутник $\Delta\vec{P}\vec{R}_A\vec{R}_C'$ (рис. 2.16), з якого на підставі теореми синусів знайдемо

$$\frac{R_A}{\sin \alpha} = \frac{R_C'}{\sin \beta} = \frac{P}{\sin \gamma}. \quad (1)$$

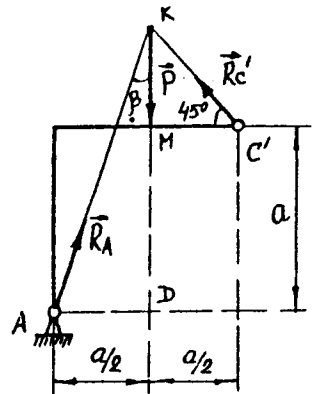


Рис. 2.14

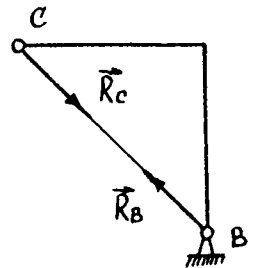


Рис. 2.15

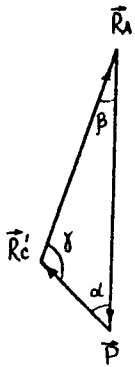


Рис. 2.16

Визначаємо кут α , β та γ . Кут $\alpha = 45^\circ$. З трикутника $\triangle ADK$ (див. рис. 2.14) знайдемо

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AD}{DK} = \frac{a \cdot 2}{2 \cdot 3a} = 0,333, \quad \beta = 18^\circ,$$

$$\text{де } DK = a + MK = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Кут } \gamma = (180^\circ - 45^\circ - 18^\circ) = 117^\circ.$$

Зі співвідношення (1) визначаємо:

$$R_A = P \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = P \frac{0,707}{0,89} = 0,79P;$$

$$R'_C = P \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = P \frac{0,31}{0,89} = 0,35P.$$

Числове значення реакції \bar{R}_B дорівнює числовому значенню реакції \bar{R}'_C та \bar{R}_C . Дійсний напрям реакцій \bar{R}_A , \bar{R}_B та реакцій \bar{R}'_C , \bar{R}_C подано на рис. 2.14—2.16.

Сила \bar{R}'_C є силою, з якою ліва частина рами діє на праву частину цієї рами, а сила \bar{R}_C є силою, з якою права частина рами діє на ліву частину. Згідно з аксіомою про рівність дії та протидії, ці сили рівні за модулем та діють по одній прямій у протилежні боки.

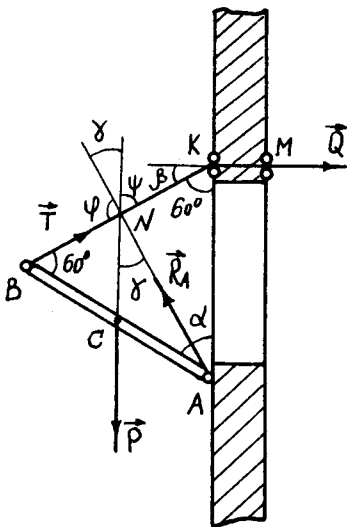


Рис. 2.17

Приклад 2.7. Кришка вентилятора однокамерної сушильної установки з киплячим шаром підіймається за допомогою троса, що проходить через блоки K та M (рис. 2.17). Визначити силу \bar{Q} , необхідну для підймання кришки, і реакцію шарніра A . Вага кришки $P = 400$ Н. Кут $\alpha = 60^\circ$, а кут $\beta = 30^\circ$. Тертям у блоках знехтувати.

Розв'язання. В задачі необхідно визначити силу \bar{Q} та реакцію шарніра A (шарнірно-нерухомої опори). Невідомі сили знайдемо, якщо розглянемо рівновагу кришки.

Аналізуємо в'язі, накладені на кришку. Маємо два види в'язей: шарнірно-нерухома опора та нитка. Звільняємо кришку від в'язей. Лінія дії реакції нитки відома. Лінія дії реакції шарнірно-

нерухомої опори (шарнір A) невідома. Щоб визначити лінію дії реакції опори A , застосуємо теорему про три сили. До кришки прикладено три сили: сила \vec{P} (вага кришки, точка прикладання C , тобто сила \vec{P} прикладена посередині AB); сила \vec{T} (реакція нитки, яка за модулем дорівнює силі \vec{Q} , оскільки тертям у блоках нехтуємо); сила \vec{R}_A (реакція опори A). Кришка в положенні, що подано на рис. 2.17, перебуває у стані рівноваги, а сили лежать в одній площині, тому лінії їх дії перетинаються в одній точці. Знайдемо цю точку (за відомими лініями дії двох сил: \vec{T} та \vec{P}), тобто точку N . Початково напрямляємо реакцію \vec{R}_A , як зображено на рис. 2.17.

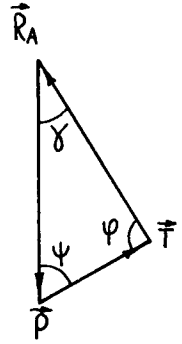


Рис. 2.18

Побудуємо силовий трикутник $\Delta\vec{P}\vec{T}\vec{R}_A$ (рис. 2.18). З трикутника за теоремою синусів маємо

$$\frac{P}{\sin \varphi} = \frac{T}{\sin \psi} = \frac{R_A}{\sin 90^\circ}. \quad (1)$$

Визначаємо кути φ , γ та ψ . З рис. 2.17 випливає:

$$\gamma = 30^\circ; \quad \varphi = 90^\circ; \quad \psi = 60^\circ.$$

З рівняння (1) визначаємо:

$$T = Q = \frac{P \sin \gamma}{\sin \varphi} = \frac{400 \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = 200 \text{ (Н)};$$

$$R_A = \frac{P \sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{400 \sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} = 346 \text{ (Н)}.$$

Дійсний напрям \vec{T} та \vec{R}_A подано на рис. 2.17.

Приклад 2.8. Горизонтальний адсорбер, вага якого становить $P = 60$ кН, опирається на виступи кам'яної кладки. Відстань між стінками кладки $l_1 = 1,6$ м. Радіус апарата $R = 1$ м. Рівнодійна сил ваги апарата \vec{P} проходить через точку C_1 на відстані від торців $a = 2$ м, $b = 3$ м (рис. 2.19). Нехтуючи тертям та припускаючи, що сили взаємодії між адсорбером та стінами кладки розподіляються за законом трапеції вздовж прямих AB та $A'B'$, визначити максимальну (q_1) та мінімальну (q_2) інтенсивність розподілених сил.

Розв'язання. Щоб визначити інтенсивність розподілених сил, що діють на кладку, необхідно, по-перше, визначити їх рівнодійну. Рівнодійна цих сил буде дорівнювати силі, що діє в площині S (рис. 2.19) у точках E та D . Тому розглядаємо рівновагу апарата в площині S (рис. 2.20).

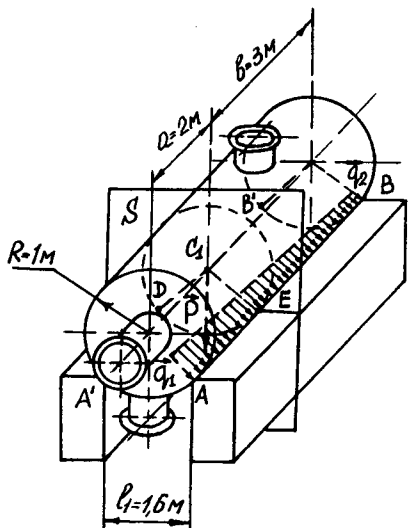


Рис. 2.19

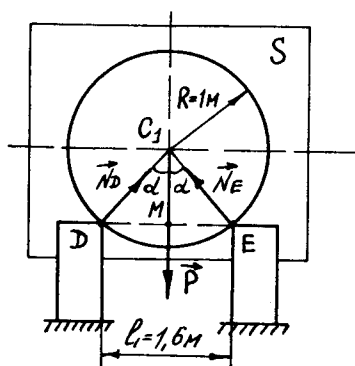


Рис. 2.20

лені по одній прямій у протилежні боки. Позначимо ці сили \vec{N}_D та \vec{N}_E .

Оскільки контакт апарата з кладкою відбувається вздовж прямих AB та $A'B'$ (рис. 2.19), то сили \vec{N}_D та \vec{N}_E є рівнодійними розподілених сил, що діють на кладку і розподілені за законом трапеції.

Визначимо максимальну та мінімальну інтенсивність розподілених сил (рис. 2.22).

Аналізуємо в'язі, накладені на апарат. Маємо один вид в'язей — гладеньку поверхню. Звільняємо апарат від в'язей. Маємо дві реакції: \vec{N}_D та \vec{N}_E (рис. 2.20).

На апарат діють три сили: \vec{P} , \vec{N}_D та \vec{N}_E . Сили лежать в одній площині. Лінії дії цих сил перетинаються в одній точці, тобто маємо плоску систему збіжних сил.

Побудуємо силіний трикутник (рис. 2.21). З трикутника випливає

$$N_D = N_E = \frac{P}{2 \cos \alpha}.$$

Визначаємо $\cos \alpha$ з трикутника ΔC_1EM (рис. 2.20), тобто

$$\sin \alpha = \frac{l_1}{2R} = \frac{0,8}{2} = 0,4;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,16} = 0,916.$$

Тоді

$$N_D = N_E = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{60}{2 \cdot 0,916} = 32,75 \text{ (кН)}.$$

Сили \vec{N}_D та \vec{N}_E є силами, з якими кладка діє на апарат у точках D та E у площині S . Згідно з аксіомою про рівність дії та протидії (див. параграф 1.8), сили, що діють на кладку в цих точках у площині S , дорівнюють за модулем силам \vec{N}_D та \vec{N}_E і напрямлені по одній прямій у протилежні боки.

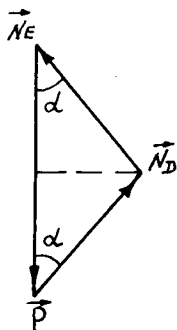


Рис. 2.21

На підставі рівнянь (1.32) та (1.33) маємо

$$N_{E'} = \int_0^l q(x) dx; \quad x_C = \frac{\int_0^l q(x) x dx}{\int_0^l q(x) dx}.$$

Зі співвідношення (рівняння прямої, що проходить через дві задані точки)

$$\frac{x - 0}{l - 0} = \frac{q(x) - q_1}{q_2 - q_1}$$

знайдемо

$$q(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{l} x.$$

Тоді

$$N_{E'} = \int_0^l \left[q_1 + \frac{(q_2 - q_1)}{l} x \right] dx = \frac{l}{2} (q_1 + q_2); \quad (1)$$

$$x_C = \frac{\int_0^l \left[q_1 + \frac{(q_2 - q_1)}{l} x \right] x dx}{\frac{l}{2} (q_1 + q_2)} = \frac{l}{3} \frac{(q_1 + 2q_2)}{(q_1 + q_2)}. \quad (2)$$

Оскільки $N_{E'} = N_E = 32,75$, $x_C = 2$, $l = 5$, то, підставляючи ці значення в рівняння (1) та (2), здобудемо:

$$32,75 = \frac{5}{2} (q_1 + q_2);$$

$$2 = \frac{5}{3} \left(\frac{q_1 + 2q_2}{q_1 + q_2} \right).$$

Розв'язуючи систему цих двох рівнянь, знайдемо: $q_1 = 10,51$ кН/м, $q_2 = 2,59$ кН/м.

Приклад 2.9. Для транспортування напівфабрикатів на м'ясокомбінатах використовують підвісний монорейковий транспорт, схему якого подано на рис. 2.23. Визначити зусилля у стрижнях AB , AC , AD , EK , EM та AE у двох положеннях вагонетки, вага якої дорівнює P . Перше положення вагонетки

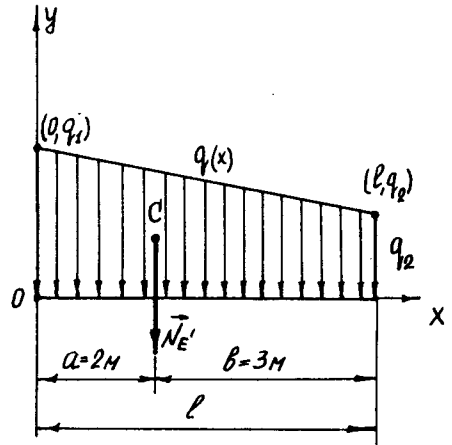


Рис. 2.22

(завантаження) подано на рис. 2.24, друге (розвантаження) — на рис. 2.25. Вагу стрижня AE (рейки) врахувати силою \vec{P}_1 , що дорівнює $0,1P$ і прикладена в точках A та E (рис. 2.23).

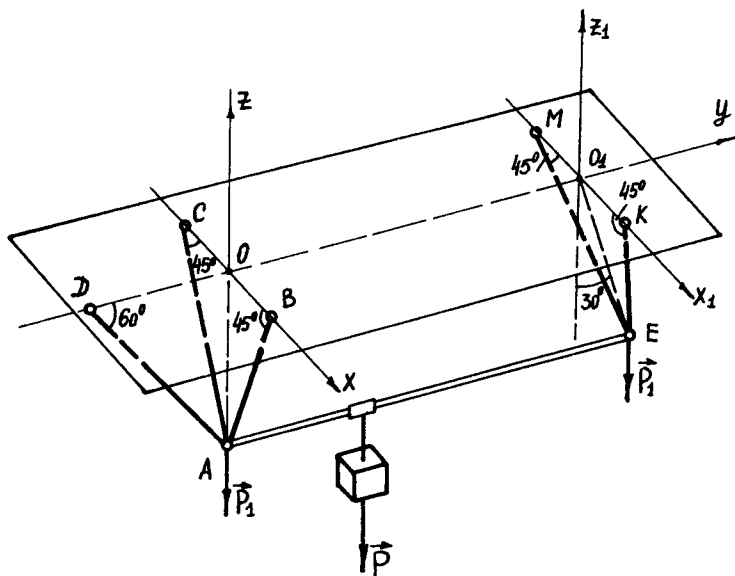


Рис. 2.23

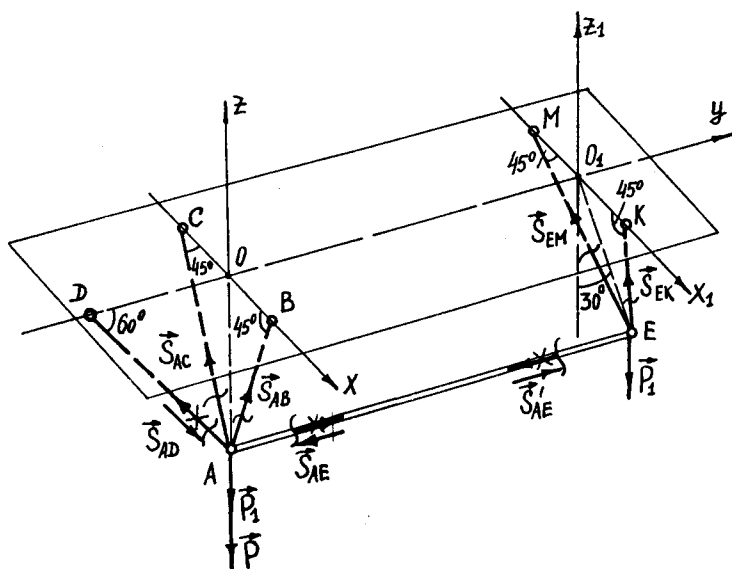


Рис. 2.24

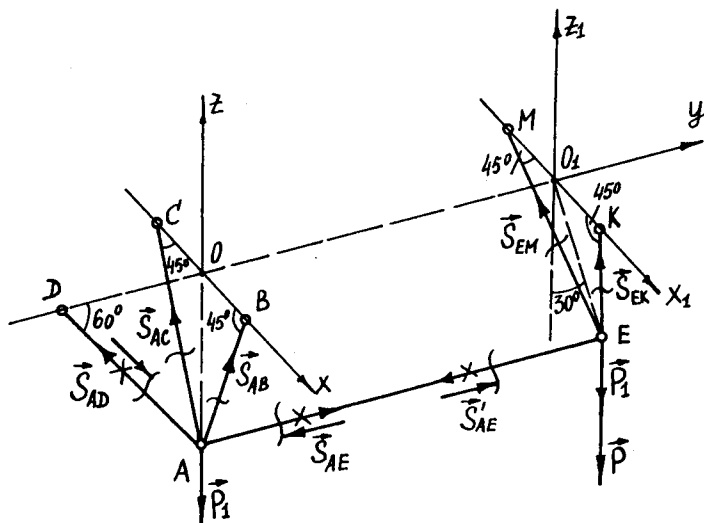


Рис. 2.25

Розв'язання. 1. Розглянемо перше положення вагонетки (рис. 2.24). Для визначення зусиль у стрижнях застосуємо метод перерізів. Маємо систему двох вузлів A та E , що перебувають у стані рівноваги під дією просторових збіжних систем сил (оскільки уся стрижнева конструкція перебуває у рівновазі).

Розглянемо вузол A . На вузол діють сили: \vec{P} , \vec{P}_1 (відомі сили — активні), а також \vec{S}_{AD} (зусилля у стрижні AD); \vec{S}_{AB} (зусилля у стрижні AB); \vec{S}_{AC} (зусилля у стрижні AC); \vec{S}_{AE} (зусилля у стрижні AE). Всі ці сили напрямлені від відповідних перерізів, тобто справедливе припущення, що стрижні розтягнені.

Побудуємо декартову систему координатних осей Oxy та складемо рівняння рівноваги просторової збіжної системи сил, що діє на вузол A (див. параграф 2.2):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad S_{AB} \cos 45^\circ - S_{AC} \cos 45^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad S_{AE} - S_{AD} \cos 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad S_{AD} \sin 60^\circ - P_1 - P + S_{AC} \sin 45^\circ + S_{AB} \sin 45^\circ = 0. \quad (3)$$

Маємо три рівняння, в яких чотири невідомі. Визначити ці невідомі з рівнянь (1)—(3) неможливо. Тому розглянемо рівновагу вузла E .

На вузол E діє активна сила \vec{P}_1 , а також \vec{S}'_{AE} (зусилля у стрижні AE); сила \vec{S}'_{AE} (за модулем дорівнює силі \vec{S}_{AE}); сила \vec{S}_{EK} (зусилля у стрижні EK); сила \vec{S}_{EM} (зусилля у стрижні EM).

Побудуємо декартову систему координатних осей $O_1x_1y_1z_1$ та складемо рівняння рівноваги, що діють на вузол E :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx_1} = 0; \quad S_{EK} \cos 45^\circ - S_{EM} \cos 45^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -S'_{AE} - S_{EK} \sin 45^\circ \sin 30^\circ - S_{EM} \sin 45^\circ \sin 30^\circ = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz_1} = 0; \quad -P_1 + S_{EM} \sin 45^\circ \cos 30^\circ + S_{EK} \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 0. \quad (6)$$

Зауважимо, що у випадках, коли кут між вектором сили та віссю координат невідомий, або його визначити важко, застосовують метод подвійного проєкціювання (див. параграф 1.3). У нашому випадку цей метод застосовано при визначенні проєкцій сил \vec{S}_{EK} та \vec{S}_{EM} на осі y та z_1 .

При застосовуванні цього методу слід:

а) визначити проєкцію сили на площину, де міститься вісь; у даному випадку, наприклад, знаходимо проєкцію сили \vec{S}_{EK} на площину yO_1z_1 (див. рис. 2.24), що чисельно дорівнює $(S_{EK})_{yO_1z_1} = S_{EK} \sin 45^\circ$;

б) визначити проєкцію вектора $(\vec{S})_{yO_1z_1}$ на вісь або на осі; у даному випадку знайдемо $(S_{EK})_y = (S_{EK})_{yO_1z_1} \sin 30^\circ = S_{EK} \sin 45^\circ \sin 30^\circ$, тобто проєкцію сили \vec{S}_{EK} на вісь y ; аналогічно знаходимо проєкції сил \vec{S}_{EK} та \vec{S}_{EM} на осі y та z_1 .

Розв'язуємо систему рівнянь (1)—(6). З рівняння (1) маємо

$$S_{AB} = S_{AC}.$$

З рівняння (2) маємо

$$S_{AD} = \frac{S_{AE}}{\cos 60^\circ}.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (3), здобудемо

$$S_{AE} \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} - P_1 - P + 2S_{AB} \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси

$$S_{AE} = \frac{(P_1 - P - 2S_{AB} \sin 45^\circ) \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}.$$

З рівняння (4) маємо

$$S_{EK} = S_{EM}.$$

Підставляючи це значення в рівняння (5), здобудемо

$$S'_{AE} = -2(S_{EK} \sin 45^\circ \sin 30^\circ).$$

Через те що $S_{AE} = S'_{AE}$,

$$\frac{(P_1 - P - 2S_{AB} \sin 45^\circ) \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = -2(S_{EK} \sin 45^\circ \sin 30^\circ).$$

Підставляючи в цю рівність числові дані, визначимо

$$S_{AB} = 0,778P + 0,707S_{EK}.$$

З рівняння (6) маємо

$$S_{EK} = \frac{P}{2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ} = 0,816P.$$

Тоді

$$S_{AB} = 0,778P + 0,707 \cdot 0,816P = 1,355P;$$

$$S_{AC} = S_{AB} = 1,355P;$$

$$S_{AE} = S'_{AE} = -2(S_{EK} \sin 45^\circ \sin 30^\circ) = -2(0,816P \cdot 0,707 \cdot 0,5) = -0,577P$$

(змінюємо напрям \vec{S}_{AE} та \vec{S}'_{AE} на рис. 2.24);

$$S_{EM} = S_{EK} = 0,816P;$$

$$S_{AD} = \frac{S_{AE}}{\cos 60^\circ} = -\frac{0,577P}{0,5} = -1,154P$$

(змінюємо напрям \vec{S}_{AD} на рис. 2.24).

Отже, у положенні завантажування вагонетки стрижні AC , AB , EK та EM розтягуються силами $S_{AC} = S_{AB} = 1,355P$; $S_{EK} = S_{EM} = 0,816P$. Стрижні AD та AE стискаються силами $S_{AD} = 1,154P$; $S_{AE} = 0,577P$.

2. Розглядаємо друге положення вагонетки (рис. 2.25).
Складемо рівняння рівноваги вузлів A та E :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad S_{AB} \cos 45^\circ - S_{AC} \cos 45^\circ = 0; \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad S_{AE} - S_{AD} \cos 60^\circ = 0; \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad S_{AD} - P_1 + S_{AC} \sin 45^\circ + S_{AB} \sin 45^\circ = 0; \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx_1} = 0; \quad S_{EK} \cos 45^\circ - S_{EM} \cos 45^\circ = 0; \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -S_{AE} - S_{EK} \sin 45^\circ \sin 30^\circ - S_{EM} \sin 45^\circ \sin 30^\circ = 0; \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz_1} = 0; \quad -(P_1 + P) + S_{EM} \sin 45^\circ \cos 30^\circ + S_{EK} \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 0. \quad (12)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (7)—(12), визначимо:

$$S_{EM} = S_{EK} = 0,898P \text{ (стрижні розтягуються);}$$

$$S_{AD} = 0,868P \text{ (стрижень стискається);}$$

$$S_{AB} = S_{AC} = 0,685P \text{ (стрижні розтягуються);}$$

$$S_{AE} = S'_{AE} = 0,434P \text{ (стрижень стискається);}$$

Запитання для самоперевірки

1. Яка система сил, прикладених до твердого тіла, називається збіжною?
2. Яким є розв'язок першої основної задачі статички твердого тіла для системи збіжних сил?
3. У чому сутність механічних, геометричних та аналітичних умов рівноваги системи збіжних сил?
4. За яким планом розв'язуються задачі статички твердого тіла?
5. В яких випадках при розв'язуванні задач статички твердого тіла слід застосовувати геометричні умови рівноваги збіжної системи сил, а в яких — аналітичні?
6. У чому полягає зміст визначення невідомих сил (реакцій в'язей) при розв'язуванні задач статички твердого тіла?
7. Як аналітично визначаються числові значення невідомих сил (реакцій в'язей) із силового трикутника?

8. Назвіть два способи визначення невідомих зусиль у стрижнях, нитках, тросах, ланцюгах тощо при розв'язанні задач статичного твердого тіла.

9. У чому сутність знаків “+” або “-” при числових значеннях невідомих сил (реакцій в'язей), які були визначені з рівнянь рівноваги даної системи сил?

10. В яких випадках задача статичного твердого тіла про знаходження невідомих сил буде статично визначеною, а в яких — невизначеною?

11. Що таке зайві в'язі?

12. У чому полягає найпростіший спосіб розв'язування статично невизначених задач з рівноваги деформованого тіла під дією збіжної системи сил?

13. Що таке внутрішні та зовнішні в'язі? Наведіть приклади внутрішніх та зовнішніх в'язей.

14. Назвіть способи розв'язування задач статичного твердого тіла на рівновагу системи твердих тіл.

Глава 3

ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ, ЩО ДІЄ НА ТВЕРДЕ ТІЛО

3.1. Лема¹ про дві сили

Систему двох довільно розташованих у просторі сил, що діють на тверде тіло, можна, не змінюючи механічного стану твердого тіла, замінити еквівалентною системою двох сил, одна з яких буде прикладена у довільному наперед заданому центрі.

Нехай на тверде тіло в точках A та B діють дві сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , що довільно розташовані у просторі (рис. 3.1). Виберемо в тілі довільну точку C та побудуємо

дві площини, одна з яких проходить через точку C та лінію дії сили \vec{F}_1 , а друга — через точку C та лінію дії сили \vec{F}_2 . Оскільки розглянуті площини мають спільну точку C , то вони або перетинаються, або зливаються. Візьмемо на лінії перетину площин другу довільну точку C' (якщо площини зливаються, то за точку C' можна взяти будь-яку точку в спільній площині).

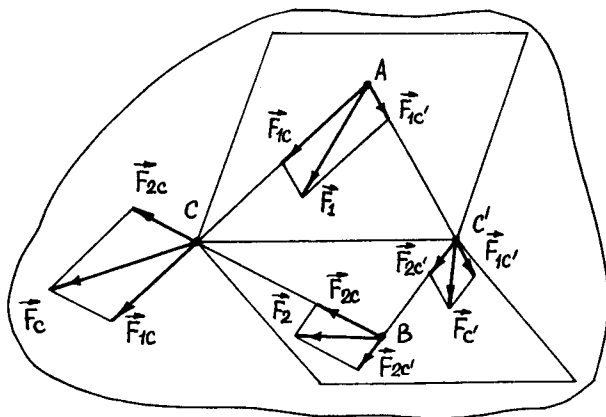


Рис. 3.1

¹ Допоміжне твердження, яке застосовується при доведенні однієї або кількох теорем.

Силу \vec{F}_1 розкладемо на дві сили, напрямлені вздовж прямих AC та AC' . Перенесемо складову \vec{F}_{1C} в точку C (сила \vec{F}_{1C}), а $\vec{F}_{1C'}$ — в точку C' (сила $\vec{F}_{1C'}$). Аналогічну дію проведемо з силою \vec{F}_2 . Маємо силу \vec{F}_{2C} , прикладену в точці C , та силу $\vec{F}_{2C'}$, прикладену в точці C' . Складаючи сили \vec{F}_{1C} , \vec{F}_{2C} та $\vec{F}_{1C'}$, $\vec{F}_{2C'}$, маємо дві сили: \vec{F}_C , що прикладена в точці C , та $\vec{F}_{C'}$, що прикладена в точці C' (рис. 3.1). Таким чином, система двох сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 замінена еквівалентною системою двох інших сил \vec{F}_C , $\vec{F}_{C'}$, одна з яких прикладена у довільній точці C .

3.2. Загальні теореми статички твердого тіла

Теорема I¹. Довільну систему сил, що діє на тверде тіло, можна, не змінюючи її дії на тверде тіло, замінити еквівалентною системою двох сил, одна з яких прикладена у довільному наперед заданому центрі. При цьому головний вектор та головний момент системи сил відносно центра зведення не змінюються.

Нехай на тверде тіло діє довільна система n сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$. Виберемо довільну точку C . На підставі леми про дві сили систему двох сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ може бути замінено системою двох інших сил $\{\vec{F}_{1C}, \vec{F}_{2C}\}$, перша з яких прикладена у точці C . Таким чином, система n сил замінюється системою n сил, одна з яких прикладена у точці C . Застосуємо далі лему до сил \vec{F}_{2C} і \vec{F}_3 та замінюємо їх двома іншими силами \vec{F}_{2C} та $\vec{F}_{3C'}$, перша з яких прикладена у точці C . Отже, ця система сил замінюється іншою системою сил, дві з яких прикладені у точці C , тобто

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{F}_{1C}, \vec{F}_{2C}, \vec{F}_{3C'}, \dots, \vec{F}_n\}.$$

Продовжуючи подібні операції, здобудемо систему n сил, $(n-1)$ з яких прикладені у точці C , тобто

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{F}_{1C}, \vec{F}_{2C}, \dots, \vec{F}_{n-1C}, \vec{F}_n\}.$$

Складаємо сили, що прикладені у точці C , одержуємо систему двох сил, одна з яких прикладена у точці C , тобто

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{F}_C, \vec{F}_n'\}.$$

¹ Леонард Ейлер (1707—1783) — швейцарський математик, механік, фізик та астроном, член Петербурзької АН, подав доведення цієї теореми в книзі “Теорія руху твердих або жорстких тіл” (1765).

Оскільки друга система сил одержана з першої за допомогою найпростіших дій із силами (див. параграф 1.2), то головний вектор та головний момент відносно довільного центра системи сил не змінюються, тобто

$$\begin{aligned}\vec{R}_O &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_C + \vec{F}'_n; \\ \vec{M}_O &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \vec{M}_O(\vec{F}_C) + \vec{M}_O(\vec{F}'_n).\end{aligned}$$

Теорема II. Для рівноваги довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор та головний момент системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю, тобто

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0}; \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \vec{0}. \quad (3.1)$$

Необхідність умов (3.1). Нехай система $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, що діє на тверде тіло, є зрівноваженою. Замінюємо цю систему сил еквівалентною системою двох сил, одна з яких прикладена у центрі O , тобто

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{F}_O, \vec{F}'_n\}.$$

Система двох сил $\{\vec{F}_O, \vec{F}'_n\}$, очевидно, є також зрівноваженою і, таким чином, згідно з аксіомою про дві сили (див. параграф 1.2), сили $\{\vec{F}_O, \vec{F}'_n\}$ рівні за величиною та напрямлені вздовж однієї прямої, що проходить через центр O , у протилежні боки. Тому

$$\begin{aligned}\vec{R}_O &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_O + \vec{F}'_n = \vec{0}; \\ \vec{M}_O &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \vec{M}_O(\vec{F}_O) + \vec{M}_O(\vec{F}'_n) = \vec{0}.\end{aligned}$$

Достатність умов (3.1). Нехай одна система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ є такою, що $\vec{R}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \vec{0}$. Замінюємо цю систему сил двома силами \vec{F}_O і \vec{F}'_n , одна з яких прикладена в центрі O . Згідно з теоремою I, головний вектор та головний момент нової системи сил відносно центра O $\vec{R}_O = \vec{F}_O + \vec{F}'_n = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_O) + \vec{M}_O(\vec{F}'_n) = \vec{0}$. З цих рівностей випливає, що сили \vec{F}_O та \vec{F}'_n рівні за модулем і напрямлені по одній прямій, що проходить через точку O , у протилежні боки. Згідно з аксіомою про дві сили, маємо, що система сил $\{\vec{F}_O, \vec{F}'_n\}$ і система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ еквівалентні нулю.

Зазначимо, що розглянута в главі 2 механічна умова рівноваги збіжної системи сил впливає безпосередньо з теореми II, оскільки головний вектор збіжної системи сил дорівнює за модулем та напрямом рівнодійній системі, а головний момент відносно точки перетину ліній дій цих сил дорівнює нулю. Тому для рівноваги цієї системи необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0}.$$

Теорема III. Для еквівалентності двох систем сил необхідно й достатньо, щоб їх головні вектори та головні моменти відносно довільного центра були геометрично рівні.

Необхідність. Нехай маємо дві системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ та $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k\}$, що є еквівалентними. Прикладемо до твердого тіла зрівноважену систему сил $\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n, -\vec{F}_1, \dots, -\vec{F}_n\}$, де сила \vec{F}_i чисельно дорівнює силі $(-\vec{F}_i)$ та має протилежний до неї напрям уздовж спільної лінії дії. З визначення еквівалентних систем сил впливає: якщо замінити систему сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, що входить до складу системи $\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n, -\vec{F}_1, \dots, -\vec{F}_n\}$, еквівалентною системою сил $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k\}$, то механічний стан твердого тіла не змінюється, тобто $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k, -\vec{F}_1, \dots, -\vec{F}_n\} \sim \vec{0}$. На підставі теореми II та еквівалентності нулю останньої системи сил маємо

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_k - \vec{F}_1 - \dots - \vec{F}_n &= \vec{0}, \\ \vec{M}_O(\vec{P}_1) + \dots + \vec{M}_O(\vec{P}_k) - \vec{M}_O(\vec{F}_1) - \dots - \vec{M}_O(\vec{F}_n) &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

або

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_k &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \\ \vec{M}_O(\vec{P}_1) + \dots + \vec{M}_O(\vec{P}_k) &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n). \end{aligned}$$

Достатність. Доведемо, що дві системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ та $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k\}$, які мають геометрично рівні головні вектори та головні моменти відносно довільного центра, еквівалентні, тобто

$$\begin{aligned} \vec{R}_O &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_k, \\ \vec{M}_O &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \vec{M}_O(\vec{P}_1) + \vec{M}_O(\vec{P}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{P}_k). \end{aligned}$$

З рівностей (3.2) випливає, що система сил $\{-\vec{F}_1, -\vec{F}_2, \dots, -\vec{F}_n, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_k\}$ є зрівноваженою і її можна додати до системи сил, що діє на тверде тіло, не змінюючи його механічного стану, тобто

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, -\vec{F}_1, -\vec{F}_2, \dots, -\vec{F}_n, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k\} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}.$$

Відкидаючи із системи

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, -\vec{F}_1, -\vec{F}_2, \dots, -\vec{F}_n, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k\}$$

зрівноважену систему сил

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, -\vec{F}_1, -\vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\},$$

маємо

$$\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k\} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\},$$

що і треба було довести.

Зауважимо, що на підставі теореми III можна довести теорему про момент рівнодійної системи сил (див. параграф 1.5) у загальному випадку сил, що діють на тверде тіло.

Так, якщо система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ має рівнодійну \vec{R} , тобто $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}$, то на підставі теореми III маємо:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n &= \vec{R}, \\ \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) &= \vec{M}_O(\vec{R}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

При цьому з рівностей (3.3) випливає, що у разі існування рівнодійної системи сил головний момент системи сил відносно довільного центра або перпендикулярний до головного вектора системи, або дорівнює нулю. Справедливе й обернене твердження.

3.3. Пара сил. Момент пари сил

Парою сил, прикладеною до твердого тіла, називається система двох рівних за модулем паралельних між собою сил, які напрямлені у протилежні боки вздовж різних прямих (рис. 3.2).

Площина S , що містить у собі сили пари, називається площиною дії пари сил або площиною пари. Найкоротша відстань h між лініями дії сил пари називається плечем пари сил.

З аксіоми про дві сили випливає, що система сил, яка створює пару, не перебуває у стані рівноваги. Крім того, з теореми III випливає, що пара сил на відміну від системи паралельних сил, які розглянуто раніше (див. параграф 1.7), не має рівнодійної, оскільки головний вектор сил пари дорівнює нулю.

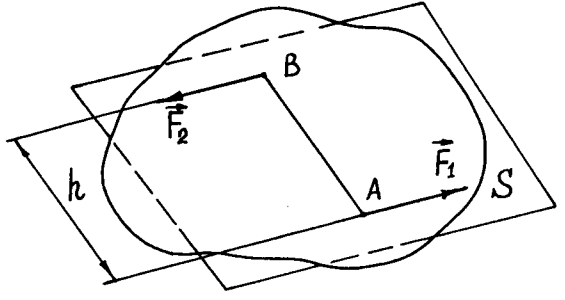


Рис. 3.2

Пара сил, яка діє на тверде тіло, намагається надати йому обертання¹. Щоб визначити, якою фізичною

величиною можна охарактеризувати обертальний ефект дії пари сил на тверде тіло, визначимо, чому дорівнює сума моментів сил, що складають пару відносно довільної точки тіла (рис. 3.3).

Згідно з визначенням моменту сили відносно довільної точки тіла O знаходимо

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_1) &= O\vec{B} \times \vec{F}_2 + O\vec{A} \times \vec{F}_1 = \\ &= O\vec{B} \times \vec{F}_2 - O\vec{A} \times \vec{F}_2 = (O\vec{B} - O\vec{A}) \times \vec{F}_2 = A\vec{B} \times \vec{F}_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

тому що

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad O\vec{B} - O\vec{A} = A\vec{B}.$$

Векторний добуток $\vec{M} = A\vec{B} \times \vec{F}_2$ називається **моментом пари сил**, тобто момент пари сил — вектор, перпендикулярний до площини дії пари сил, який дорівнює за модулем добутку модуля однієї з сил пари на довжину плеча пари і напрямлений в ту частину простору, звідки обертання тіла під дією пари видно проти ходу стрілки годинника (рис. 3.3).

З визначення моменту пари сил випливає, що момент пари сил не залежить від положення точки O , відносно якої визначаються моменти сил пари, тобто момент пари сил є вектором вільним.

Модуль (числове значення) моменту пари сил позначають $|\vec{M}|$ або M та визначають за формулою

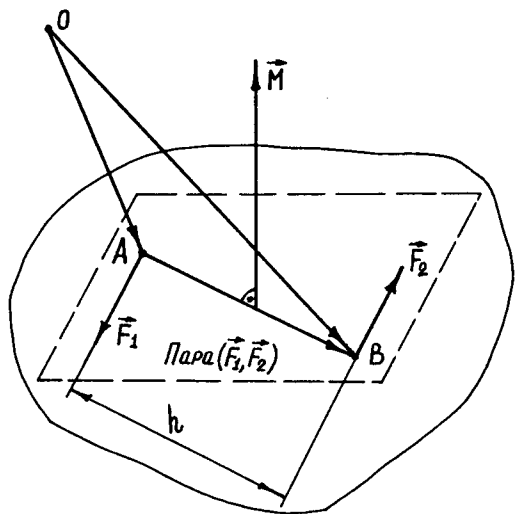


Рис. 3.3

¹ Обґрунтування цього твердження подано у розділі “Динаміка”.

$$M = F_1 h = F_2 h, \quad (3.5)$$

де h — плече пари сил (рис. 3.3).

Одиницею моменту пари сил, як і моменту сили відносно точки або осі, в системі СІ є ньютон-метр [Н·м].

3.4. Теорема про еквівалентність пар сил. Рівновага системи пар сил

Теорема. *Пари сил, що мають геометрично рівні моменти, еквівалентні.*

Ця теорема є окремим випадком теореми III (див. параграф 3.2), оскільки головний момент системи сил, що утворюють пару, дорівнює моменту пари сил, а головний вектор дорівнює нулю.

Розглянута теорема дає підставу стверджувати, що момент пари сил повністю характеризує дію пари сил на тверде тіло. Дії над парами сил можна замінити еквівалентними векторними операціями над їх моментами. Звідси та на підставі того, що момент пари сил — вектор вільний, впливають такі властивості пари сил. Не змінюючи дії даної пари сил на тверде тіло, можна:

- 1) повертати цю пару сил у площині її дії на будь-який кут і в будь-який бік;
- 2) переносити її у площині її дії в будь-яке місце;
- 3) переносити цю пару сил у площину, що є паралельною площині її дії;
- 4) змінити числові значення сил, що утворюють пару, і її плече, не змінюючи моменту пари.

Система пар сил еквівалентна одній парі сил з моментом, що дорівнює геометричній сумі моментів пар сил системи, тобто

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k. \quad (3.6)$$

На підставі розглянутого визначимо умови рівноваги системи пар сил, що діють на тверде тіло. Оскільки будь-яка система пар сил еквівалентна одній парі сил з моментом, що дорівнює геометричній сумі моментів пар сил системи пар $\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k$, то при рівновазі має бути $\vec{M} = \vec{0}$ (див. параграф 3.2, теорема II), тобто

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k = \vec{0}, \quad (3.7)$$

тобто багатокутник, побудований із векторів моментів пар сил (див. параграф 1.2), що діють на тверде тіло, має бути замкненим.

Аналітичні умови рівноваги знайдемо, взявши до уваги, що аналітичне визначення вектора \vec{M} можна подати у вигляді (див. параграф 1.3)

$$M = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_{kz}\right)^2}, \quad (3.8)$$

де $\sum_{k=1}^n M_{kx}$, $\sum_{k=1}^n M_{ky}$, $\sum_{k=1}^n M_{kz}$ — відповідно проекції вектора геометричної суми

векторів моментів пар сил системи пар \vec{M} на осі декартової системи координат (див. параграф 2.1, теорема про проекцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь).

Оскільки при рівновазі $\vec{M} = \vec{0}$, то з останньої формули отримуємо:

$$\sum_{k=1}^n M_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_{kz} = 0. \quad (3.9)$$

Здобуті рівності є аналітичними умовами рівноваги системи пар сил, що діють на тверде тіло.

3.5. Еквівалентне перетворення довільної просторової системи сил

Подамо розв'язання першої основної задачі статки стосовно довільної просторової системи сил на підставі такої теореми.

Теорема про зведення довільної системи сил до довільного центра. *Довільну систему сил, не змінюючи механічного стану твердого тіла, можна замінити трьома силами, одна з яких чисельно та за напрямом збігається з головним вектором системи і прикладається в довільному наперед заданому центрі O , а дві інші утворюють пару сил з моментом, що дорівнює головному моменту системи відносно вибраного центра.*

Нехай на тверде тіло діє довільна система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$. Головний вектор системи та головний момент відносно довільного центра O

$$\vec{R}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n).$$

Згідно з теоремою, система трьох сил $\{\vec{P}_O, \vec{P}_1, \vec{P}_2\}$ має головний вектор

$$\vec{P}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

і головний момент відносно центра O

$$\vec{M}_O(\vec{P}_O) + \vec{M}_O(\vec{P}_1) + \vec{M}_O(\vec{P}_2) = \vec{M},$$

де \vec{M} — момент пари сил (\vec{P}_1, \vec{P}_2) . Оскільки $\vec{P}_O = \vec{R}_O$ та $\vec{M}_O = \vec{M}$, то на підставі теореми III

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{P}_O, \vec{P}_1, \vec{P}_2\},$$

що і треба було довести.

Отже, довільну просторову систему сил, що діє на тверде тіло, можна, не змінюючи механічного стану твердого тіла, замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, прикладеної в довільно вибраній точці тіла (центрі зведення), і дорівнює головному вектору даної системи сил і одній парі сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил системи відносно вибраного центра зведення, тобто

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{M}_O = \vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k). \quad (3.10)$$

На рис. 3.4 за центр зведення взято точку O , тобто початок декартової системи координат.

Зазначимо, що розглянутий метод еквівалентного перетворення довільної системи сил не є єдиним. Подібний до розглянутого результат еквівалентного перетворення довільної системи сил можна отримати за допомогою іншого методу — методу Пуансо¹. Розглянемо його.

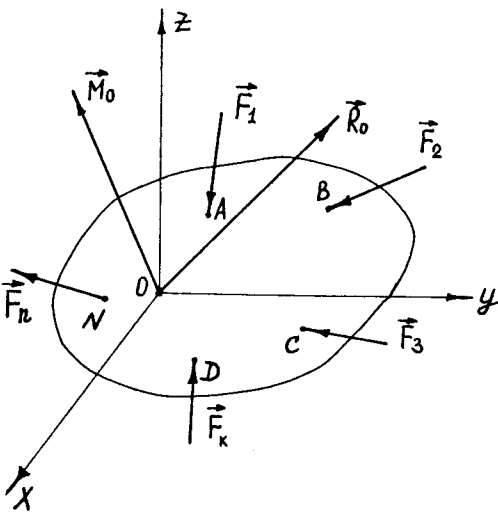


Рис. 3.4

Лема про паралельне перенесення сили. Силу, що діє на тверде тіло, не змінюючи механічного стану тіла, можна перенести паралельно самій собі у будь-яку точку цього тіла, прикладаючи при цьому пару сил з моментом, що дорівнює моменту сили, яка переноситься відносно точки, куди сила переноситься.

Нехай до твердого тіла в точці A прикладена сила \vec{F} (рис. 3.5). У довільній точці B цього тіла прикладемо найпростішу зрівноважену систему сил так, що модулі сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 дорівнюватимуть модулю сили \vec{F} , а лінії їх дії будуть паралельними заданій силі. Сили \vec{F} та \vec{F}_2 утворюють пару сил з моментом \vec{M} , що чисельно дорівнює $M = M_B(\vec{F}) = Fh$, а сила \vec{F}_1 , що за модулем дорівнює силі \vec{F}_1 , стає прикладеною в точці B тіла.

Теорема про зведення довільної системи сил до довільного центра (теорема Пуансо). Довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, яка прикладена в довільно вибраній точці тіла (центрі зведення), і дорівнює головному вектору даної системи сил і одній парі сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил системи відносно вибраного центра зведення.

¹ Луї Пуансо (1777—1859) — французький інженер, механік та математик, професор, член Паризької АН.

Нехай на тверде тіло діє довільна система сил (рис. 3.6). На підставі леми про паралельне перенесення сили переносимо всі сили в довільну точку O (центр зведення). Маємо систему збіжних сил, прикладених у точці O , та систему векторів моментів пар сил, також прикладених у точці O (рис. 3.7). Складаючи сили та моменти пар сил за правилом паралелограма або векторного багатокутника, знайдемо силу \vec{R}_O та пару з моментом \vec{M}_O (рис. 3.8), тобто

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k). \quad (3.11)$$

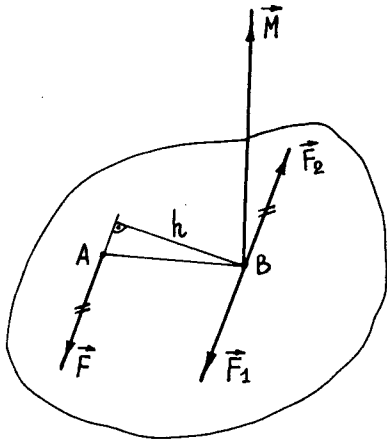


Рис. 3.5

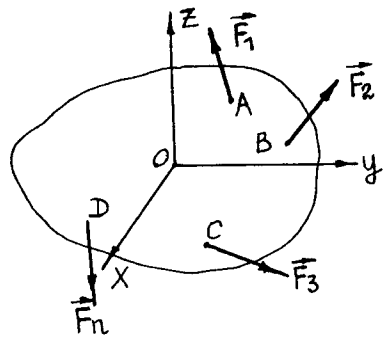


Рис. 3.6

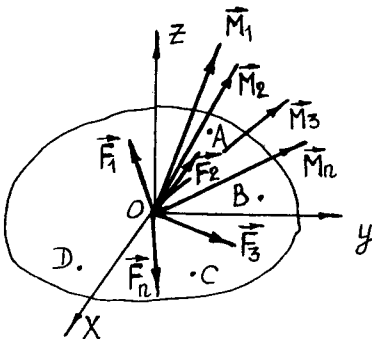


Рис. 3.7

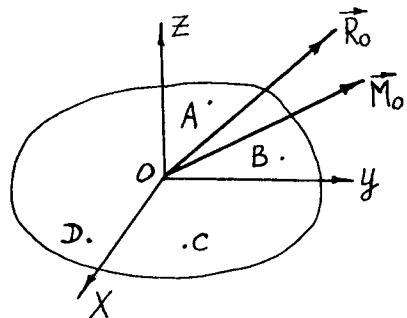


Рис. 3.8

3.6. Статичні інваріанти систем сил

Вище (див. параграф 1.6) зазначалося, що головний вектор довільної системи сил визначається за формулою

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (3.12)$$

і зі зміною центра зведення не змінюється.

Головний момент довільної системи сил відносно довільного центра зведення визначається за формулою

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k) \quad (3.13)$$

і зі зміною центра зведення змінюється. Зміна головного моменту при зміні центра зведення визначається за формулою

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{R}_O), \quad (3.14)$$

де \vec{M}_O та \vec{M}_{O_1} — головні моменти системи сил відносно центрів зведення O та O_1 . Другий доданок у правій частині формули (3.14) є моментом головного вектора системи сил, що прикладений у центрі зведення O , відносно нового центра зведення O_1 .

Помножимо скалярно обидві частини рівності (3.14) на вектор \vec{R}_O , тобто

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{R}_O = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{R}_O) \cdot \vec{R}_O.$$

Оскільки вектор $\vec{M}_{O_1}(\vec{R}_O)$ перпендикулярний до вектора \vec{R}_O , то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже,

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{R}_O = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_O, \quad (3.15)$$

тобто скалярний добуток головного моменту системи сил \vec{M}_O на головний вектор системи \vec{R}_O зі зміною центра зведення не змінюється.

Отже, зі зміною центра зведення не змінюється головний вектор та скалярний добуток головного моменту на головний вектор, тобто ці величини інваріантні відносно вибору центра зведення.

Першим статичним інваріантом називається головний вектор системи сил; його позначають

$$\vec{J}_1 = \vec{R}_O. \quad (3.16)$$

Другим статичним інваріантом називається скалярний добуток головного моменту системи сил на головний вектор; його позначають

$$J_2 = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_O. \quad (3.17)$$

Надамо рівності (3.15) такого вигляду:

$$M_{O_1} R_{O_1} \cos(\widehat{\vec{M}_{O_1}, \vec{R}_{O_1}}) = M_O R_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{R}_O}). \quad (3.18)$$

Кожний з цих добутків є проекцією головного моменту на напрям головного вектора. Отже, зі зміною центра зведення проекція головного моменту на напрям головного вектора не змінюється.

На підставі цього твердження другому статичному інваріанту можна надати інший вигляд:

$$J_2 = M_O R_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{R}_O}). \quad (3.19)$$

Косинус кута між векторами \vec{M}_O та \vec{R}_O визначається за формулою, що впливає з рівностей (3.17) та (3.19):

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{R}_O}) = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}_O}{M_O R_O}. \quad (3.20)$$

Якщо вектори \vec{M}_O та \vec{R}_O на підставі рівняння (1.6) подати у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{R}_O &= R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}^1; \\ \vec{M}_O &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}, \end{aligned}$$

то формула (3.20) набирає більш зручного для практичного застосування вигляду:

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{R}_O}) = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}_O}{M_O R_O} = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{M_O R_O}, \quad (3.21)$$

де $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$, $R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}$, $R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}$ — проекції головного вектора \vec{R}_O на осі декартової системи координат [визначені на підставі теореми про проекцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь (див. параграф 2.1)]; $M_x = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)$, $M_y = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)$, $M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)$ — проекції головного моменту \vec{M}_O на осі декартової системи координат [визначені на підставі теореми про проекцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь (див. параграф 2.1)].

¹ Тут і далі при позначенні проекцій головного вектора \vec{R}_O та головного моменту \vec{M}_O на осі декартової системи координат індекс O для спрощення запису опускається.

3.7. Динамічний гвинт¹.

Зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта

Динамічним гвинтом називається сукупність сили і пари сил, що лежить у площині, перпендикулярній до сили.

Розрізняють *правий* та *лівий динамічний гвинти*. На рис. 3.9, а зображено правий динамічний гвинт, що складається з сили \vec{R}_O (головний вектор системи сил) та пари сил (\vec{P}_1, \vec{P}_2) з моментом \vec{M}^* ; на рис. 3.9, б — лівий гвинт, що складається з тих самих елементів.

Доведемо, що довільну просторову систему сил можна звести до динамічного гвинта, тобто до еквівалентної системи, що складається із сили та пари сил, момент якої колінеарний силі.

Теорема про зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта. Якщо другий статичний інваріант довільної просторової системи сил не дорівнює нулю, то цю систему сил можна звести до динамічного гвинта.

Дійсно, нехай у довільній точці O (рис. 3.10, а) довільна просторова система сил зведена до сили, що дорівнює головному вектору системи \vec{R}_O , та до пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту системи сил \vec{M}_O . За умовою теореми $J_2 = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_O \neq 0$, тобто обидва вектори \vec{R}_O та \vec{M}_O не дорівнюють нулю і не є перпендикулярними один до одного. Розкладемо вектор \vec{M}_O за двома напрямками (рис. 3.10, а): за напрямом лінії дії головного вектора \vec{R}_O та за напрямом прямої, що є перпендикулярною до лінії дії головного вектора. Маємо складові вектори вектора \vec{M}_O : \vec{M}^* (момент пари сил, що розміщений у площині, перпендикулярній до лінії дії головного вектора \vec{R}_O); \vec{M}_1 (момент пари сил, що розміщений у площині, де лежить лінія дії головного вектора \vec{R}_O). Складову \vec{M}_1 можна подати у вигляді пари сил $(\vec{R}'_O, \vec{R}''_O)$ (рис. 3.10, б), прийнявши $\vec{R}'_O = \vec{R}''_O = \vec{R}$. Силу \vec{R}'_O прикладемо у центрі зведення O , а силу \vec{R}''_O — у точці O^* (рис. 3.10, б).

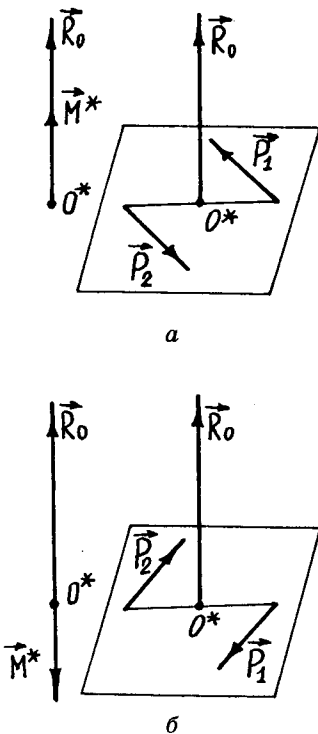


Рис. 3.9

¹ Це поняття введено в механіку Л. Пуансо.

Сили \vec{R}_O , \vec{R}'_O утворюють зрівноважену систему сил, яку можна відкинути. Отже, система векторів \vec{R}_O та \vec{M}_O зведена до двох інших векторів (рис. 3.10, а): \vec{M}^* (прикладений у точці O); $\vec{R}''_O = \vec{R}_O$ (прикладений у точці O^*). Оскільки момент пари сил \vec{M}^* — вектор вільний, то його можна перенести у точку O^* (рис. 3.10, з). Маємо силу \vec{R}''_O , що дорівнює головному вектору системи \vec{R}_O і прикладена у точці O^* , та пару сил з моментом \vec{M}^* , що розташований у площині, перпендикулярній до сили \vec{R}''_O , тобто маємо правий динамічний гвинт. Якщо кут між векторами \vec{R}_O та \vec{M}_O (рис. 3.10, а) буде тупим, то аналогічним чином здобудемо лівий динамічний гвинт.

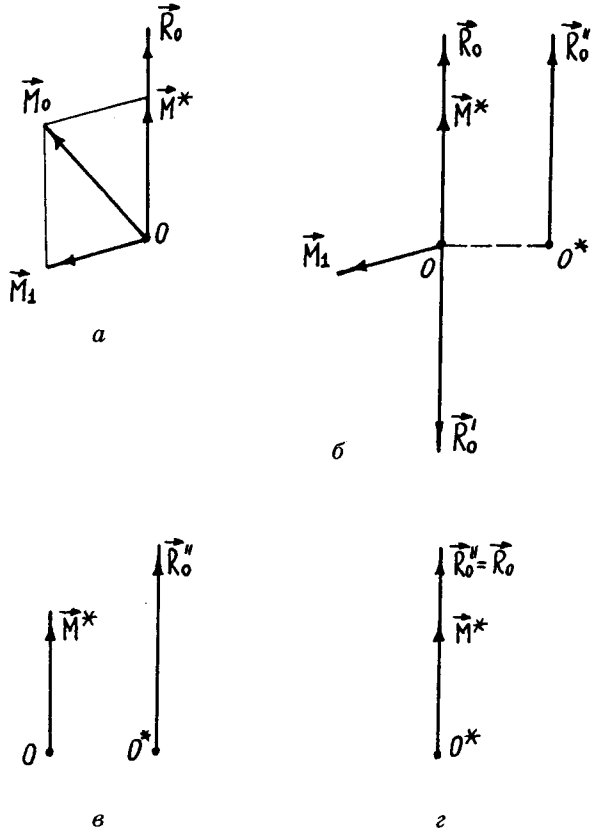


Рис. 3.10

Проекція вектора моменту пари сил \vec{M}^* на напрям головного вектора \vec{R}_O визначається за формулою

$$M^* = M_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{R}_O}) = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}_O}{R_O} = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{R_O}. \quad (3.22)$$

Точка O^* не є єдиною, де довільна система сил зводиться до динамічного гвинта. Дійсно, силу можна переносити вздовж її лінії дії, а момент пари сил \vec{M}^* є вектором вільним, отже, система сил може бути зведена до динамічного гвинта у всіх точках прямої, що проходить через точку O^* і є лінією дії сили $\vec{R}''_O = \vec{R}_O$. Ця пряма називається *центральною віссю системи сил*. Знайдемо рівняння центральної осі.

Нехай O^* (рис. 3.11) — це точка центральної осі. Тоді для цієї точки головний вектор \vec{R}_O та момент \vec{M}^* колінеарні один до одного. На підставі формули (3.14) момент \vec{M}^* можна подати у вигляді

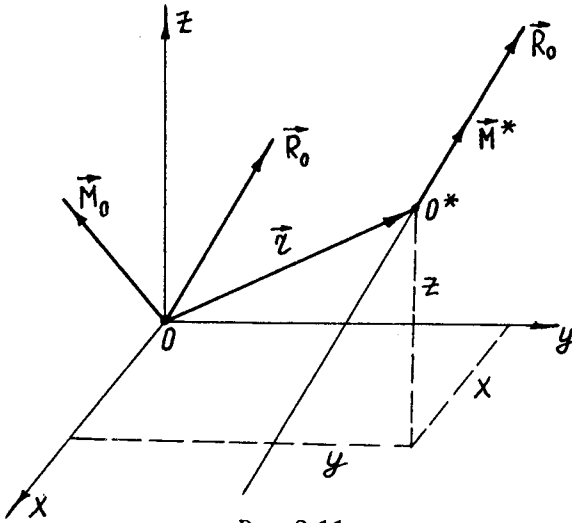


Рис. 3.11

$$\vec{M}^* = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R}_O,$$

де \vec{r} — радіус-вектор між точкою O та точкою O^* .

Умова колінеарності головного вектора та момента \vec{M}^* для точки O^* має вигляд

$$p\vec{R}_O = \vec{M}^*,$$

де p — параметр гвинта, що має розмірність довжини.

Отже,

$$p\vec{R}_O = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R}_O. \quad (3.23)$$

Нехай R_x, R_y, R_z та M_x, M_y, M_z — відповідно проекції головного вектора та головного моменту відносно центра зведення на осі декартової системи координат; тоді на підставі рівняння (1.6)

$$\begin{aligned} \vec{R}_O &= R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}, \\ \vec{M}_O &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}. \end{aligned}$$

Нехай координатами точки O^* , що лежить на центральній осі, є x, y, z , тоді радіус-вектор \vec{r} можна подати у вигляді [див. рівняння (1.6)]

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Підставляючи вирази \vec{R}_O, \vec{M}_O та \vec{r} у рівняння (3.23), маємо

$$\begin{aligned} p(R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}) &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \\ &= [M_x - (yR_z - zR_y)] \vec{i} + [M_y - (zR_x - xR_z)] \vec{j} + [M_z - (xR_y - yR_x)] \vec{k}. \end{aligned}$$

Порівнюючи коефіцієнти при ортах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, матимемо

$$pR_x = M_x - (yR_z - zR_y);$$

¹ Див. примітку на с. 89.

$$pR_y = M_y - (zR_x - xR_z);$$

$$pR_z = M_z - (xR_y - yR_x).$$

Звідси

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z}. \quad (3.24)$$

Рівняння (3.24) і є шуканим рівнянням центральної осі довільної просторової системи сил.

3.8. Окремі випадки еквівалентного перетворення довільної просторової системи сил

З розглянутих у попередніх параграфах понять випливає, що довільна система сил може бути замінена більш простою системою, еквівалентною даній. Ця система складається з однієї сили, що дорівнює головному вектору \vec{R}_O сил системи, які діють на тверде тіло, та з однієї пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту \vec{M}_O цієї системи сил. Вектори \vec{R}_O та \vec{M}_O називаються *елементами зведення системи сил*. Залежно від значення елементів зведення та статичних інваріантів можна виділити ряд окремих випадків подальшого зведення довільної системи сил до ще більш простої системи, еквівалентній даній. Розглянемо ці випадки.

1. Якщо $J_2 = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_O \neq 0$, то система сил зводиться до динамічного гвинта. При цьому можливі такі випадки:

а) $\cos(\overline{\vec{M}_O, \vec{R}_O}) = \pm 1$ [формула (3.21)]. Динамічний гвинт складається з сили, що дорівнює головному вектору системи \vec{R}_O , та з пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту \vec{M}_O системи сил. Вектори \vec{R}_O та \vec{M}_O колінеарні і напрямлені вздовж центральної осі. Центральна вісь [формула (3.24)] проходить через центр зведення O . Модуль (числове значення) головного вектора \vec{R}_O визначається за формулою (3.27), а головного моменту \vec{M}_O — за формулою (3.28);

б) $0 < \cos(\overline{\vec{M}_O, \vec{R}_O}) < \pm 1$ [формула (3.21)]. Динамічний гвинт складається з сили, що дорівнює головному вектору системи \vec{R}_O , та з пари сил з найменшим моментом \vec{M}^* системи сил. Вектори \vec{R}_O та \vec{M}^* колінеарні та напрямлені вздовж центральної осі [формула (3.24)], яка проходить через деяку точку O^* . Модуль (числове значення) головного вектора \vec{R}_O визначається за формулою (3.27), а проекція моменту пари сил \vec{M}^* на напрям головного вектора \vec{R}_O — за формулою (3.22).

2. Якщо $J_2 = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_O = 0$, то можливі такі випадки:

а) $\vec{R}_O = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$. Оскільки головний вектор \vec{R}_O є інваріантом, то він дорівнює нулю для будь-якого центра зведення. При $\vec{R}_O = \vec{0}$ за формулою (3.14) головний момент системи \vec{M}_O також не змінюється при зміні центра зведення. Звідси випливає, що система сил зводиться до пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту системи сил \vec{M}_O . Модуль (числове значення) моменту пари \vec{M}_O визначається за формулою (3.28);

б) $\vec{R}_O \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$. Система сил має рівнодійну силу \vec{R} , що геометрично дорівнює головному вектору системи сил \vec{R}_O . Лінія дії рівнодійної проходить через центр зведення O . Модуль (числове значення) рівнодійної визначається за формулою (3.27);

в) $\vec{R}_O \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, але $\cos(\vec{M}_O, \vec{R}_O) = 0$ [формула (3.21)]. Система сил зводиться до рівнодійної сили, що геометрично дорівнює головному вектору системи сил \vec{R}_O . Лінія дії рівнодійної не проходить через центр зведення O , а проходить через деяку другу точку O' , що розміщена у площині, перпендикулярній до головного моменту системи \vec{M}_O .

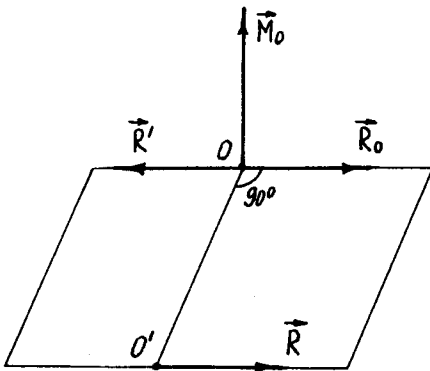


Рис. 3.12

Дійсно, якщо $\vec{M}_O \perp \vec{R}_O$, то пара сил, момент якої дорівнює \vec{M}_O , і сила \vec{R}_O лежать в одній площині (рис. 3.12). Вибираючи сили пари \vec{R} та \vec{R}' такими, що дорівнюють за модулем головному вектору системи \vec{R}_O , і розташовуючи їх, як подано на рис. 3.12, матимемо систему трьох сил: \vec{R}_O , \vec{R}' та \vec{R} . Сили \vec{R}' та \vec{R}_O утворюють зрівноважену систему сил, яку можна відкинути. Залишається сила \vec{R} — рівнодійна системи сил. Лінія дії рівнодійної сили \vec{R} проходить через точку O' . Відстань між точками O та O' вздовж перпендикуляра до головного вектора системи \vec{R}_O визначається за формулою

$$OO' = \frac{|\vec{M}_O|}{R_O}. \quad (3.25)$$

3.9. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Наведемо розв'язок другої основної задачі статички твердого тіла для довільної просторової системи сил, тобто визначимо умови, за яких довільна просторова система сил, що діє на тверде тіло, буде зрівноваженою.

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно й достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю:

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0}; \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \vec{0}. \quad (3.26)$$

Умови (3.26) безпосередньо випливають з теореми II (див. параграф 3.2) і називаються **механічними умовами рівноваги довільної просторової системи сил**.

Визначимо аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил. На підставі формули (1.9) та теореми про проекцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь (див. параграф 2.1) маємо:

$$R_O = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2}; \quad (3.27)$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)\right)^2}, \quad (3.28)$$

де $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$, $R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}$, $R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}$ — відповідно проекції головного вектора довільної просторової системи сил \vec{R}_O на осі x , y та z декартової системи координат; $M_x = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)$, $M_y = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)$, $M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)$ — відповідно проекції головного моменту довільної просторової системи сил \vec{M}_O на осі x , y та z декартової системи координат.

Ураховуючи умови (3.26),

$$R_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2} = 0;$$

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)\right)^2} = 0.$$

Звідси визначаємо аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; & \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; & \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; & \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

З рівнянь (3.29) випливає, що для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно й достатньо, щоб алгебричні суми проєкцій усіх сил системи на декартовій осі координат та алгебричні суми моментів цих сил відносно цих координатних осей дорівнювали нулю.

У випадку просторової системи паралельних сил, наприклад, у випадку, коли усі сили паралельні осі z , умови (3.29) набирають вигляду:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0. \quad (3.30)$$

Зауважимо, що розглянуті в параграфі 2.2 аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил є окремим випадком умов (3.29).

Якщо на тверде тіло окрім сил діють пари сил з моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$, то при цьому вигляд перших трьох рівнянь умов рівноваги (3.29) не змінюється, оскільки сума проєкцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю. Останні три рівняння цієї умови на підставі рівнянь (3.9) (див. параграф 3.4) набирають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_{kx} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_{ky} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_{kz} &= 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

де $\sum_{k=1}^n M_{kx}$, $\sum_{k=1}^n M_{ky}$, $\sum_{k=1}^n M_{kz}$ — відповідно алгебричні суми проєкцій векторів моментів пар сил, що діють на тверде тіло, на осі декартової системи координат.

3.10. Приклади розв'язання задач статички твердого тіла з рівноваги довільної просторової системи сил. Методичні вказівки

Приклад 3.1. Визначити тиск барабана барабанної сушарки при сушінні цукру-піску на підшипники опор та колове зусилля Q в точці M зубчастого вінця барабана. Схему барабана сушарки подано на рис. 3.13. Центральна вісь барабана сушарки відхилена від горизонталі на кут, що дорівнює 6° . Вага барабана $P = 60$ кН. Лінія дії сили \vec{P} проходить через точку O_1 (рис. 3.13, a, z). На барабан також діє сила \vec{G} , яка характеризує опір цукру-піску при рівномірному обертанні барабана. Лінія дії сили \vec{G} вертикальна і проходить через точку E у перерізі S (рис. 3.13, a, e). За модулем $G = 30$ кН. Силами тертя знехтувати.

Розв'язання. У задачі потрібно визначити тиск барабана сушарки на підшипники опор та колове зусилля Q , необхідне для рівномірного обертання барабана. Невідомі сили знайдемо, якщо розглянемо рівновагу барабана (під рівновагою барабана ми розуміємо не тільки спокій, а і його рівномірне обертання). Аналізуємо в'язі, накладені на барабан. Маємо один вид в'язей — гладенькі поверхні (за умовою задачі тертям нехтуємо). Звільняємо барабан від в'язей (рис. 3.13 a, b, d). До барабана прикладено сили \vec{P} , \vec{Q} , \vec{G} , \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \vec{N}_3 , \vec{N}_4 , \vec{N}_5 та \vec{N}_6 , які утворюють довільну просторову систему сил.

Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O (рис. 3.13, a). Складемо рівняння рівноваги довільної просторової системи сил (див. параграф 3.9), що діють на барабан сушарки:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad -N_1 \sin 35^\circ + N_2 \sin 35^\circ - N_3 \sin 35^\circ + N_4 \sin 35^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad -N_5 - N_6 + P \sin 6^\circ + G \sin 6^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \quad N_1 \cos 35^\circ + N_2 \cos 35^\circ + N_3 \cos 35^\circ + N_4 \cos 35^\circ - \\ &- Q - G \cos 6^\circ - P \cos 6^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0; \quad N_1 \cos 35^\circ \cdot 2 + N_2 \cos 35^\circ \cdot 2 + N_3 \cos 35^\circ \cdot 8 + N_4 \cos 35^\circ \cdot 8 - \\ &- N_5 \cdot 1,2 \cos 35^\circ - N_6 \cdot 1,2 \cos 35^\circ - G \cos 6^\circ \cdot 4 - P \cos 6^\circ \cdot 5 - Q \cdot 5 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) &= 0; \quad -G \cos 6^\circ \cdot 0,85 + Q \cdot 1,2 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) &= 0; \quad N_5 \cdot 1,2 \sin 35^\circ - N_6 \cdot 1,2 \sin 35^\circ - G \sin 6^\circ \cdot 0,85 + N_1 \sin 35^\circ \cdot 2 - \\ &- N_2 \sin 35^\circ \cdot 2 + N_3 \sin 35^\circ \cdot 8 - N_4 \sin 35^\circ \cdot 8 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

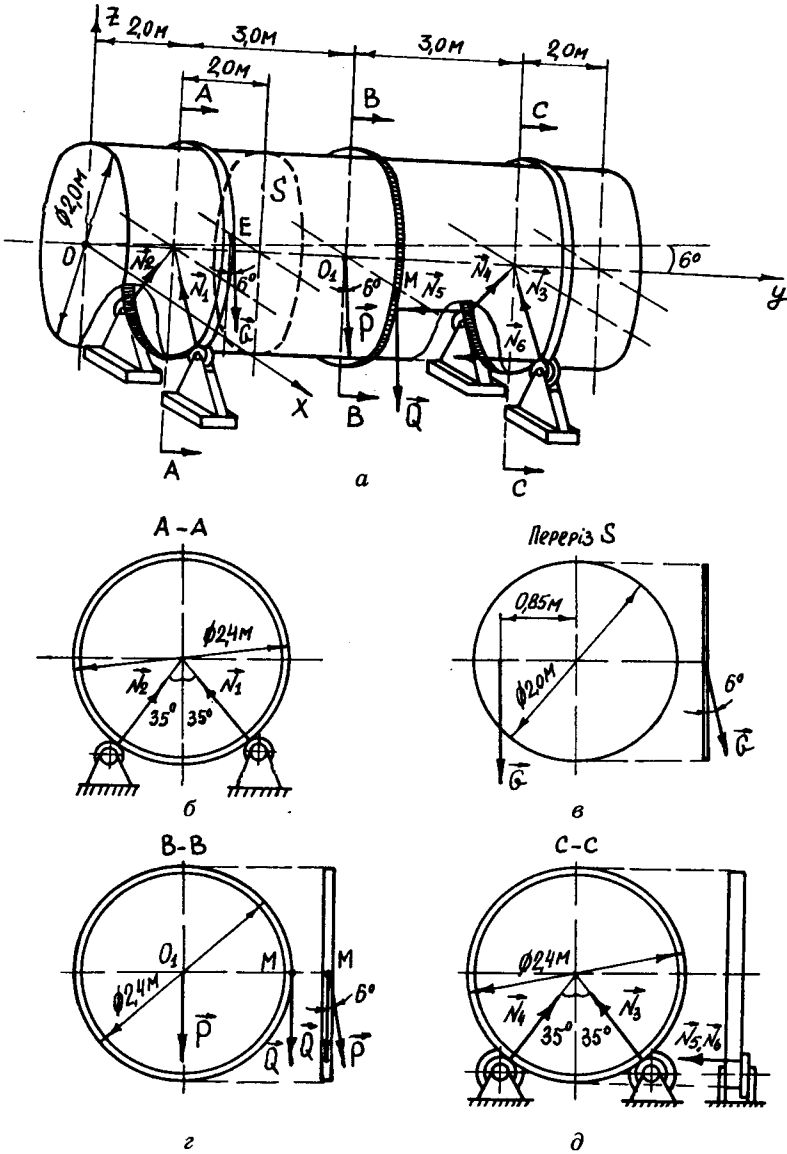


Рис. 3.13

Зазначимо, що моменти сил $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3, \vec{N}_4, \vec{P}$ та \vec{G} відносно осей координат визначені на підставі теореми про момент рівнодійної системи сил відносно осі (див. параграф 1.5).

З урахуванням числових значень система рівнянь (1) набирає вигляду:

$$-N_1 + N_2 - N_3 + N_4 = 0;$$

$$N_5 + N_6 - 9,4 = 0;$$

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - \frac{Q}{\cos 35^\circ} - 109,3 = 0;$$

$$2N_1 + 2N_2 + 8N_3 + 8N_4 - 1,2N_5 - 1,2N_6 - 510 - \frac{Q \cdot 5}{\cos 35^\circ} = 0;$$

$$-25,36 + Q \cdot 1,2 = 0;$$

$$1,2N_5 - 1,2N_6 + 2N_1 - 2N_2 + 8N_3 - 8N_4 - 4,64 = 0.$$

З рівнянь системи (1) визначити усі невідомі сили неможливо. Однак задача з визначення сил не є статично невизначеною (див. приклад 2.5), оскільки між реакціями \vec{N}_1 , \vec{N}_2 та \vec{N}_3 , \vec{N}_4 існують такі залежності:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2; \\ N_3 &= N_4, \end{aligned} \quad (2)$$

що пояснюється симетричним розташуванням опор барабана.

Розв'язуючи систему рівнянь (1) з урахуванням рівнянь (2), знайдемо:

$$N_1 = N_2 = 35,9 \text{ (кН)};$$

$$N_3 = N_4 = 31,7 \text{ (кН)};$$

$$N_5 = 6,63 \text{ (кН)};$$

$$N_6 = 2,76 \text{ (кН)};$$

$$Q = 21,13 \text{ (кН)}.$$

Сили тиску на підшипники опор барабана чисельно дорівнюють реакціям \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \vec{N}_3 , \vec{N}_4 , \vec{N}_5 та \vec{N}_6 , але протилежно напрямлені до цих реакцій.

Приклад 3.2. Для обслуговування сепаратора очистки зерна від домішок потрібна площадка, яка б підіймалася над рівнем підлоги. Планується виготовити площадку у вигляді прямокутної жорсткої плити з трьома ніжками (рис. 3.14). Вага плити \vec{Q} . Лінія дії сили \vec{Q} прохо-

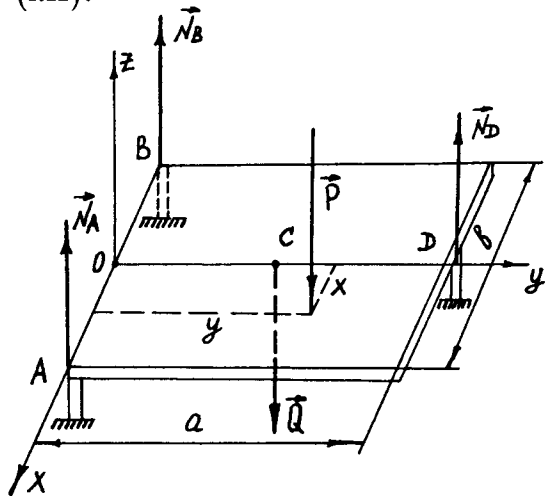


Рис. 3.14

дить через центр плити. Визначити, за якого співвідношення між числовими значеннями сил \bar{Q} та \bar{P} (сила ваги людини, що обслуговує сепаратор) площадка не буде перекидатися за будь-якого положення людини на ній.

Розв'язання. Для визначення співвідношення між Q та P розглянемо рівновагу плити. Аналізуємо в'язі, накладені на плити. Маємо один вид в'язей — гладеньку поверхню. Звільняємо плити від в'язей. Прикладаємо задані сили та реакції до плити. При цьому точку прикладання сили \bar{P} визначаємо координатами x та y в системі декартових координат, поданих на рис. 3.14.

На плити діють сили \bar{Q} , \bar{P} , \bar{N}_A , \bar{N}_B та \bar{N}_D , що утворюють просторову систему паралельних сил. Складемо рівняння рівноваги просторової системи паралельних сил (див. параграф 3.9), що діють на плити:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \quad N_A + N_B + N_D - Q - P = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) &= 0; \quad -Q \frac{a}{2} - Py + N_D a = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) &= 0; \quad -N_A \frac{b}{2} + N_B \frac{b}{2} + Px = 0. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{Px}{b} - \frac{Py}{2a} + \frac{Q}{4} + \frac{P}{2}; \\ N_B &= -\frac{Px}{b} - \frac{Py}{2a} + \frac{Q}{4} + \frac{P}{2}; \\ N_D &= \frac{Py}{a} + \frac{Q}{2}. \end{aligned}$$

Щоб плита не перекидалася, необхідно, щоб виконувалися умови

$$N_A \geq 0; \quad N_B \geq 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{Px}{b} - \frac{Py}{2a} + \frac{Q}{4} + \frac{P}{2} = 0; \\ N_B &= -\frac{Px}{b} - \frac{Py}{2a} + \frac{Q}{4} + \frac{P}{2} = 0. \end{aligned}$$

Звідси $Q > 2P$.

Приклад 3.3. Визначити зусилля в стрижнях стрижневої конструкції, що підтримує ректифікаційну колону спиртового виробництва. Конструкція складається з шести стрижнів та плити (рис. 3.15, а, б). Вага колони та плити дорівнює P . Лінія дії сили \vec{P} проходить через центр плити (точка C на рис. 3.15, б). Вагою стрижнів знехтувати.

Розв'язання. У задачі треба визначити зусилля у стрижнях. Невідомі сили знайдемо, якщо розглянемо рівноваги колони з плитою.

Аналізуємо в'язі, що накладені на колону з плитою. Маємо один вид в'язей — невагомий стрижень. Звільняємо колону з плитою від в'язей. Прикладаємо задану силу та реакції стрижнів до плити (рис. 3.15, б). Маємо сили \vec{P} , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{S}_3 , \vec{S}_4 , \vec{S}_5 та \vec{S}_6 , що утворюють довільну просторову систему сил.

Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O (рис. 3.15, б) та складемо рівняння рівноваги довільної просторової системи сил (див. параграф 3.9):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S_4 \cos \alpha - S_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -S_2 \sin^2 \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad S_1 - S_3 - S_5 - S_6 - S_2 \cos \alpha - S_4 \sin \alpha - P = 0;$$

(1)

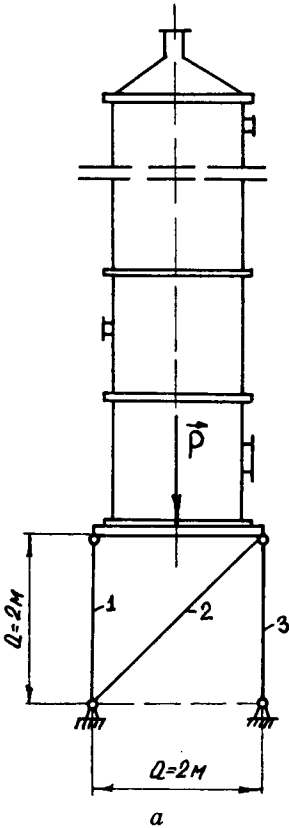
$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \frac{a}{2} - S_3 a - S_5 a - S_2 \cos \alpha \cdot a - S_4 \sin \alpha \cdot a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad P \frac{a}{2} + S_1 a + S_3 a + S_4 \sin \alpha \cdot a + S_2 \cos \alpha \cdot a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad S_4 \sin \alpha \cdot a = 0.$$

Зауважимо, що проекції сили \vec{S}_2 на осі x та y визначено методом подвійного проєкціювання (див. параграф 1.3), а моменти сил \vec{S}_2 та \vec{S}_4 відносно осей x , y та z — на підставі теореми про момент рівнодійної системи сил (див. параграф 1.5).

Ураховуючи числові значення a , $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$, система рівнянь (1) набирає вигляду:



$$\begin{aligned} S_2 = S_4 = 0; \\ -S_1 - S_3 - S_5 - S_6 - P = 0; \\ -P - 2S_3 - 2S_5 = 0; \\ P + 2S_1 + 2S_3 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

З рівнянь системи (2) випливає, що

$$S_1 = S_3 = S_5 = S_6 = -\frac{P}{4}, \quad S_2 = S_4 = 0.$$

Оскільки з рівнянь рівноваги шукані сили визначено зі знаком “-”, то їх дійсний напрям є протилежним напрямку, поданому на рис. 3.15. Змінюємо напрям сил $\vec{S}_1, \vec{S}_3, \vec{S}_5$ та \vec{S}_6 на протилежний (рис. 3.15, б).

Шукані зусилля в стрижнях чисельно дорівнюють відповідним реакціям, але напрямлені протилежно до них, тобто стрижні 1, 3, 5 та 6 стискаються.

Приклад 3.4. На горизонтальний вал редуктора ба-
рабанної сушарки, який знаходиться у підшипниках А і В (рис. 3.16), насаджені перпендикулярно до осі вала шків з радіусом $r = 20$ см і зубчасте колесо. Валу на-

дає рівномірного обертального руху пас, накинута на шків. Колове зусилля \vec{Q} , що прикладено у точці D зубчастого колеса, за модулем дорівнює $Q = 25$ кН. Нехтуючи вагою вала зубчастого колеса та шківів, визначити реакції підшипників А і В та натяг T_1 ведучої гілки паса, якщо відомо, що він у два рази більший за натяг T_2 веденої гілки.

Розв’язання. У задачі треба визначити реакції підшипників А і В та натяг ведучої гілки паса. Невідомі сили знайдемо, якщо розглянемо рівновагу вала, оскільки при рівномірному обертанні вала сили, що діють на нього, утворюють зрівноважену систему сил.

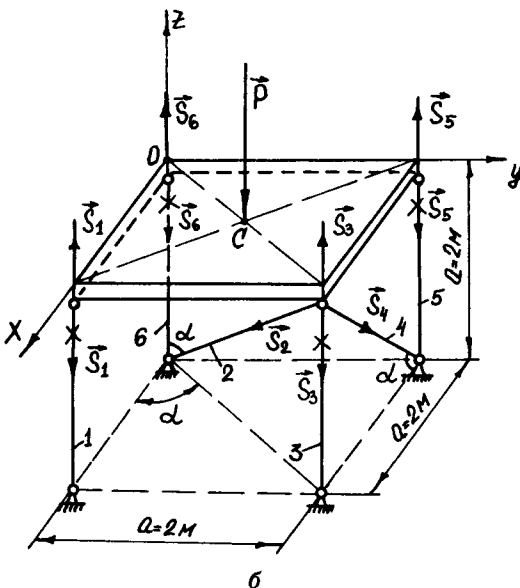


Рис. 3.15

Аналізуємо в'язі, накладені на вал. Маємо один вид в'язей — нерухомий шарнір (шарнірно-нерухома опора). Звільняємо вал від в'язей. Прикладаємо задані сили та реакції підшипників до вала (рис. 3.16).

На вал діють сили \vec{Q} , \vec{T}_1 , \vec{T}_2 , \vec{X}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B та \vec{Z}_B , що утворюють довільну просторову систему сил.

Побудуємо систему декартових координат з початком у точці А (рис. 3.16) та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на вал (див. параграф 3.9):

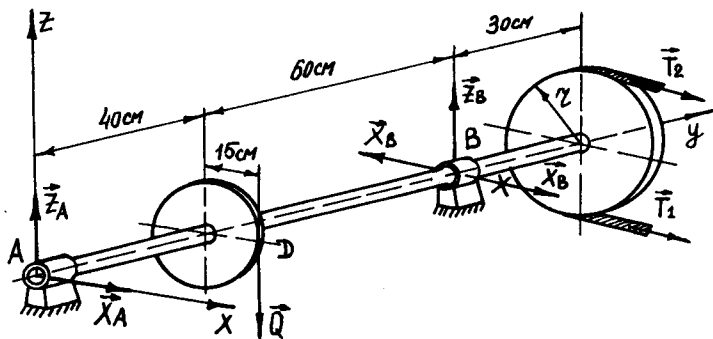


Рис. 3.16

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad X_A + X_B + T_1 + T_2 = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad 0 \equiv 0^1; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \quad Z_A - Q + Z_B = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0; \quad -Q \cdot 40 + Z_B \cdot 100 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) &= 0; \quad Q \cdot 15 + T_2 r - T_1 r = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) &= 0; \quad -X_B \cdot 100 - T_2 \cdot 130 - T_1 \cdot 130 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Підставляючи у рівняння системи (1) числові значення Q , r та враховуючи, що $T_1 = 2T_2$, знайдемо:

$$\begin{aligned} X_A &= 16,87 \text{ (кН)}; \\ X_B &= -73,12 \text{ (кН)}; \\ Z_A &= 15 \text{ (кН)}; \\ Z_B &= 10 \text{ (кН)}; \\ T_1 &= 37,5 \text{ (кН)}; \\ T_2 &= 18,75 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

¹ Оскільки сили, що діють на вал, є перпендикулярними до осі.

Оскільки реакція X_B визначена зі знаком “-”, то змінюємо напрям сили \vec{X}_B на протилежний (рис. 3.16).

Дійсний напрям реакцій \vec{X}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B та \vec{Z}_B подано на рис. 3.16.

Приклад 3.5. Визначити зусилля в перерізі S бруса, поданого на рис. 3.17. На брус діють сили \vec{Q} , \vec{F} та \vec{P} . За модулем $Q = 800$ Н, $F = 750$ Н та $P = 1000$ Н.

Розв’язання. Брус перебуває у стані рівноваги. Для визначення невідомих зусиль застосуємо метод перерізів (див. параграф 1.9), тобто перерізаємо брус перерізом S на дві частини (рис. 3.17).

Розглянемо рівновагу правої частини. У кожній точці перерізу S діють внутрішні сили, що утворюють довільну просторову систему сил. Беручи точку O за центр зведення, замінюємо цю систему сил еквівалентною системою,

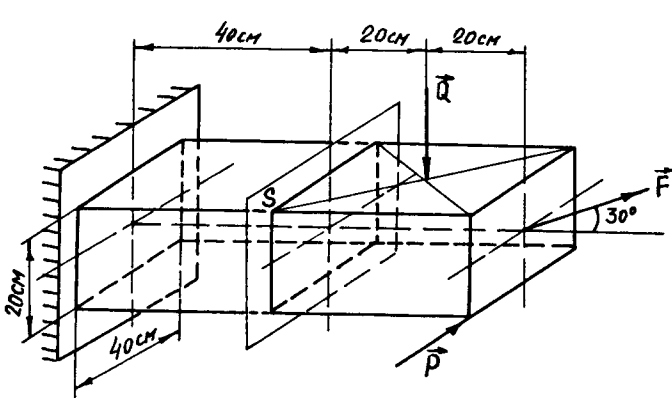


Рис. 3.17

що складається з головного вектора \vec{R}_O та головного моменту \vec{M}_O .

Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O (рис. 3.18) та розкладемо вектори \vec{R}_O та \vec{M}_O за напрямками осей координат x , y та z . Маємо три сили \vec{R}_x , \vec{R}_y , \vec{R}_z та три пари сил з моментами M_x , M_y та M_z (рис. 3.19).

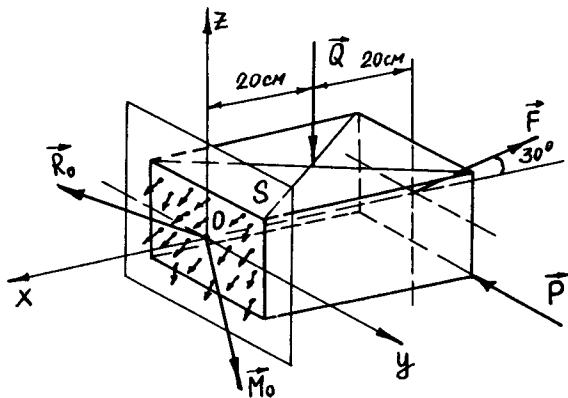


Рис. 3.18

Зауважимо, що на рис. 3.19 подано не вектори-моменти \vec{M}_x , \vec{M}_y та \vec{M}_z , а еквівалентні пари сил, які розміщені у площинах, перпендикулярних до відповідних векторів \vec{M}_x , \vec{M}_y та \vec{M}_z . Ці пари сил подано у вигляді кругової стрілки, а моменти цих пар позначено M_x , M_y та M_z .

Оскільки розглянута частина бруса перебуває у стані рівноваги, то сили і пари сил, що діють на частину бруса, утворюють зрівноважену довільну просторову систему сил. Складемо рівняння рівноваги цієї системи сил (див. параграф 3.9):

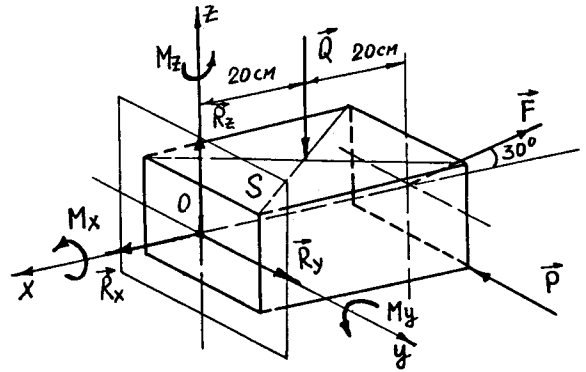


Рис. 3.19

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; R_x - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; R_y - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; R_z - Q + F \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; M_x - P \cdot 0,1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; M_y - Q \cdot 0,2 + F \sin 30^\circ \cdot 0,4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; M_z - P_1 \cdot 0,4 = 0.$$

Звідси

$$R_x = F \cos 30^\circ = 750 \cdot 0,866 = 649,5 \text{ (Н)};$$

$$R_y = P = 1000 \text{ (Н)};$$

$$R_z = Q - F \sin 30^\circ = 800 - 750 \cdot 0,5 = 425 \text{ (Н)};$$

$$M_x = P \cdot 0,1 = 1000 \cdot 0,1 = 100 \text{ (Н} \cdot \text{м)};$$

$$M_y = Q \cdot 0,2 - F \sin 30^\circ \cdot 0,4 = 800 \cdot 0,2 - 750 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 160 - 150 = 10 \text{ (Н} \cdot \text{м)};$$

$$M_z = P \cdot 0,4 = 1000 \cdot 0,4 = 40 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Дійсний напрям шуканих сил та пар сил збігається з напрямом цих сил та пар сил, що поданий на рис. 3.19.

Зауважимо, що знайдені зусилля у перерізі S бруса називають так:

R_x — поздовжня сила;

R_y та R_z — поперечні сили;

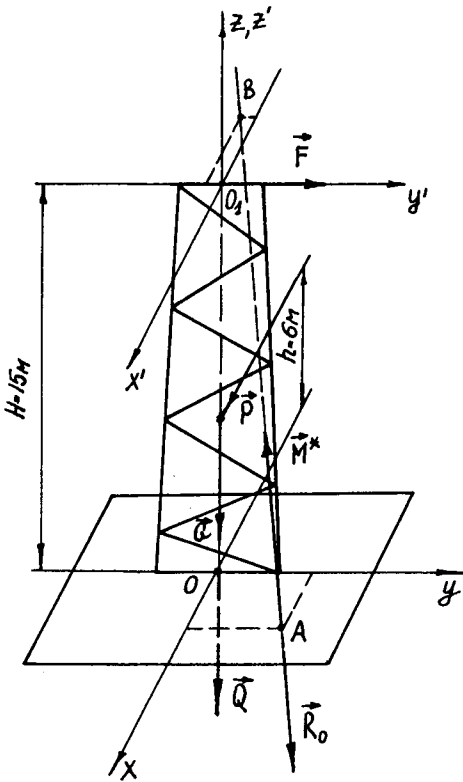


Рис. 3.20

M_x та M_y — згинальні моменти;
 M_z — крутильний момент.

На закінчення зазначимо, що той самий результат здобудемо, якщо розглянемо рівновагу лівої частини бруса, але у цьому разі попередньо потрібно буде визначити реакції опори бруса (просторове жорстке зацмелення). Тому при визначенні зусиль у перерізах брусів, подібних до розглянутого (ці бруси називають консольними), доцільніше розглядати рівновагу частин, що розташовані між перерізом та вільним кінцем бруса.

Приклад 3.6. Вага освітлювальної опори кагатного поля цукрового заводу $G = 80$ кН. Опора встановлена на бетонному фундаменті, вага якого $Q = 60$ кН. До опори прикладені сила натягу троса (трос натягнений між опорами; до троса підвішені освітлювальні прилади) $F = 20$ кН та рівнодійна сил тиску вітру $P = 50$ кН; обидві сили горизонтальні та розташовані у взаємно перпендикулярних площинах (рис. 3.20). $H = 15$ м, $h = 6$ м. Визначити результуючу реакцію ґрунту, в якому укладений фундамент опори.

Розв'язання. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O (рис. 3.20). Беремо за центр зведення точку O і визначаємо головний вектор та головний момент системи сил, що діють на опору (див. параграф 3.9):

$$R_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2};$$

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)\right)^2},$$

де

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = P = 50 \text{ (кН)};$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = F = 20 \text{ (кН)};$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = -(Q + G) = -140 \text{ (кН)};$$

$$M_x = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = -F \cdot H = 20 \cdot 15 = -300 \text{ (кН} \cdot \text{м)};$$

$$M_y = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = P \cdot h = 50 \cdot 6 = 300 \text{ (кН} \cdot \text{м)};$$

$$M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Тоді

$$R_0 = \sqrt{50^2 + 20^2 + (-140)^2} = 150 \text{ (кН)};$$

$$M_0 = \sqrt{(-300)^2 + 300^2} = 424,3 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

На підставі формули (3.21) визначаємо косинус кута між вектором \vec{R}_0 та \vec{M}_0 :

$$\cos(\widehat{\vec{M}_0, \vec{R}_0}) = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{M_0 R_0} = \frac{-300 \cdot 50 + 300 \cdot 20}{150 \cdot 424,3} = -0,1414.$$

Оскільки $0 < \cos(\widehat{\vec{M}_0, \vec{R}_0}) < \pm 1$, система сил зводиться до динамічного гвинта, що складається із сили \vec{R}_0 та пари сил з моментом \vec{M}^* (див. параграф 3.8).

За формулою (3.22) визначаємо проекцію вектора моменту пари сил \vec{M}^* на напрям головного вектора, тобто

$$\vec{M}^* = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{R_0} = \frac{-300 \cdot 50 + 300 \cdot 20}{150} = -60 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Знак “-” показує, що система сил зводиться до лівого динамічного гвинта, тобто вектори \vec{R}_0 та \vec{M}^* напрямлені вздовж центральної осі у протилежні сторони.

Складаємо рівняння центральної осі системи сил, тобто рівняння (3.24):

$$\begin{aligned} \frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} &= \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = \\ &= \frac{-300 - [y(-140) - z \cdot 20]}{50} = \frac{300 - [z \cdot 50 - x(-140)]}{20} = \frac{-(x \cdot 20 - y \cdot 50)}{-140}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} 7x + 2,8y + 2,9z &= 21; \\ x - 22,1y - 2,8z &= -42; \\ 20x - y + 7z &= 42. \end{aligned} \quad (1)$$

Знайдемо точки перетину центральної осі з площиною xOy та $x'O_1y'$ (рис. 3.20). Для цього в рівняння (1) підставимо спочатку $z = 0$, а потім $z = 15$:

$$\begin{aligned} x_A = 2,2; y_A = 2; z_A = 0; \\ x_B = -3,16; y_B = -0,14; z_B = 15. \end{aligned}$$

Центральну вісь та динамічний гвинт системи сил \vec{Q} , \vec{F} та \vec{P} зображено на рис. 3.20.

Результуюча реакція ґрунту згідно з аксіомою про рівність дії та протидії також буде складатися з динамічного гвинта, тобто з сили, що за модулем дорівнює $R_o = 150$ кН, та пари сил з моментом, що за модулем дорівнює $M^* = 60$ кН·м, але напрям цих елементів гвинта буде протилежним напрямку на рис. 3.20.

Запитання для самоперевірки

1. Як формулюється лема про дві сили?
2. Як формулюється загальна теорема статички твердого тіла про дві сили (теорема I)?
3. Як формулюється загальна теорема статички твердого тіла про рівновагу довільної системи сил (теорема II)?
4. Як формулюється загальна теорема статички твердого тіла про еквівалентність систем сил (теорема III)?
5. Як на підставі теореми про еквівалентність систем сил довести теорему про момент рівнодійної системи сил у загальному випадку сил?
6. Яка система сил називається парою сил?
7. Чому пара сил не має рівнодійної?
8. Що таке момент пари сил і як його обчислити?
9. Як визначається точка прикладання вектора-моменту пари сил?
10. Як формулюється теорема про еквівалентність пар?
11. Яка фізична величина повністю характеризує пару сил?
12. Які основні властивості пари сил?
13. Сформулюйте умови рівноваги системи пар сил, що діють на тверде тіло (механічні, геометричні та аналітичні).
14. Як формулюється теорема про зведення довільної системи сил до довільного центра?

15. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
16. Як формулюється теорема про зведення довільної системи сил до довільного центра (теорема Пуансо)?
17. Які існують інваріанти системи сил?
18. Що таке динамічний гвинт?
19. Сформулюйте теорему про зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта.
20. Що таке центральна вісь системи сил?
21. Назвіть окремі випадки еквівалентного перетворення довільної просторової системи сил.
22. У чому сутність механічних та аналітичних умов рівноваги довільної просторової системи сил?

Глава 4

ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ, ЩО ДІЄ НА ТВЕРДЕ ТІЛО

4.1. Еквівалентні перетворення довільної плоскої системи сил

Сили, довільно розташовані в одній площині, утворюють **довільну плоску систему сил**.

Подамо розв'язок першої основної задачі статички твердого тіла для довільної плоскої системи сил, тобто проведемо еквівалентні перетворення цієї системи у більш просту.

Нехай задано систему сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, що прикладена до твердого тіла в точках A, B, \dots, N . Сили системи довільно розташовані в одній площині S (рис. 4.1). Виберемо довільну точку O (центр зведення) і на підставі теореми про зведення довільної системи сил до центра (точки) (див. параграф 3.5) замінимо довільну плоску систему сил еквівалентною системою, що складається із сили \vec{R}_O (головний вектор) та пари сил з моментом \vec{M}_O (головний момент). Головний вектор дорівнює геометричній сумі сил системи:

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (4.1)$$

а головний момент — геометричній сумі векторів моментів сил системи відносно центра зведення:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k). \quad (4.2)$$

Лінія дії головного вектора \vec{R}_O розташована у площині S , а лінія дії вектора моменту \vec{M}_O перпендикулярна до площини S (рис. 4.1).

Оскільки другий статичний інваріант (див. параграф 3.6) довільної плоскої системи сил дорівнює нулю:

$$I_2 = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_O = 0,$$

то подальше спрощення довільної плоскої системи сил зводиться до таких випадків (див. параграф 3.8):

а) $\vec{R}_O = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$. Система сил еквівалентна парі сил з моментом, що дорівнює головному моменту системи сил \vec{M}_O ;

б) $\vec{R}_O \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$. Система сил має рівнодійну силу \vec{R} , що геометрично дорівнює головному вектору системи сил \vec{R}_O . Лінія дії рівнодійної проходить через центр зведення O ;

в) $\vec{R}_O \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$. Система сил зводиться до рівнодійної сили, що геометрично дорівнює головному вектору системи сил \vec{R}_O . Лінія дії рівнодійної проходить через деяку точку O' ; відстань між точками O (центр зведення) та O' вздовж перпендикуляра до головного вектора системи сил \vec{R}_O визначається за формулою (3.25).

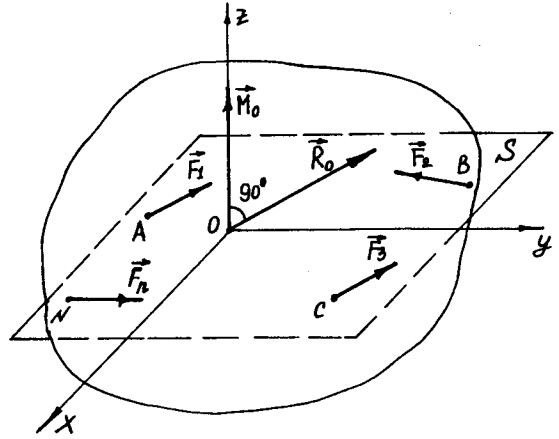


Рис. 4.1

4.2. Алгебрична величина моменту сили відносно точки та моменту пари сил

Розглядаючи поняття моменту сили відносно точки (див. параграф 1.4) та моменту пари сил (див. параграф 3.3), ми виявили, що це вектори, перпендикулярні до площини дії моменту сили відносно точки і площини дії пари сил. Якщо на тіло діє довільна плоска система сил, то зручно сполучити площину, в якій розташовані сили та пари сил, з площиною рисунка. У цьому разі вектори моменту сили відносно точки і моменту пари сил будуть розташовані перпендикулярно до площини рисунка. Якщо розглядати площину рисунка як координатну площину декартової системи координат, наприклад xOy , то вектори моменту сили відносно точки і моменту пари сил будуть колінеарні осі z і повністю визначатимуться своїми проекціями на цю вісь. Тому в плоских системах сил момент сили відносно точки і момент пари сил визначаються алгебричною величиною моменту сили відносно точки та алгебричною величиною моменту пари сил.

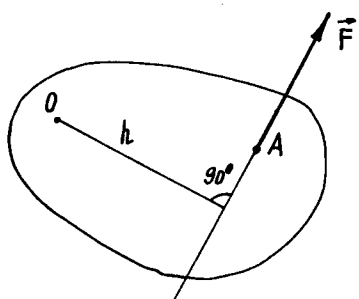


Рис. 4.2

Алгебрична величина моменту сили відносно точки — добуток зі знаком “+” або “-” модуля сили на найкоротшу відстань між лінією дії сили та точкою, відносно якої визначається момент сили (плече моменту сили відносно точки) (рис. 4.2):

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (4.3)$$

Якщо під дією сили тіло обертається відносно даної точки проти ходу стрілки годинника, то моменту сили відносно точки у рівності (4.3) надається знак “+”. У протилежному разі — знак “-”.

Алгебрична величина моменту пари сил — добуток зі знаком “+” або “-” модуля однієї з сил пари на довжину плеча пари (див. рис. 3.2):

$$M = \pm F_1 h = \pm F_2 h. \quad (4.4)$$

При визначенні знака моменту пари сил застосовують правило знаків для моменту сили відносно точки, тобто при обертанні тіла під дією пари сил проти ходу стрілки годинника моменту пари сил надається знак “+”. У протилежному разі — знак “-”.

Зауважимо, що розглянута в параграфі 3.4 теорема про еквівалентність пар сил для пар сил, що розміщені в одній площині, має іншу редакцію: “пари сил, що мають алгебрично рівні моменти, тобто моменти пар, чисельно рівні та напрямлені в один бік (мають один і той самий знак), еквівалентні”.

А з рівності $\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k$ [формула (3.6)] випливає, що система пар сил еквівалентна одній парі сил з моментом, що дорівнює алгебричній сумі моментів пар сил системи:

$$M = \sum_{k=1}^n M_k,$$

оскільки у випадку пар сил, що розташовані в одній площині, визначення геометричної суми векторів моментів цих пар зводиться до алгебричної операції.

На підставі розглянутого головний момент довільної плоскої системи сил визначається за формулою

$$M_O = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k), \quad (4.5)$$

тобто головний момент довільної плоскої системи сил дорівнює алгебричній сумі моментів сил системи відносно довільної точки (центра зведення).

На рис. 4.3 зображено тверде тіло, довільна плоска система сил, що діє на це тіло, головний вектор \vec{R}_O та головний момент M_O системи сил, визначені на рис. 4.1 після сполучення площини S з площиною рисунка.

На рис. 4.3 пару сил, момент якої дорівнює головному моменту довільної плоскої системи сил, подано у вигляді кругової стрілки, яка визначає напрям можливого обертання твердого тіла під дією цієї пари сил, а момент цієї пари сил позначено M_o . Таке зображення пари сил впливає з властивостей пари сил, що розглянуті в параграфі 3.4.

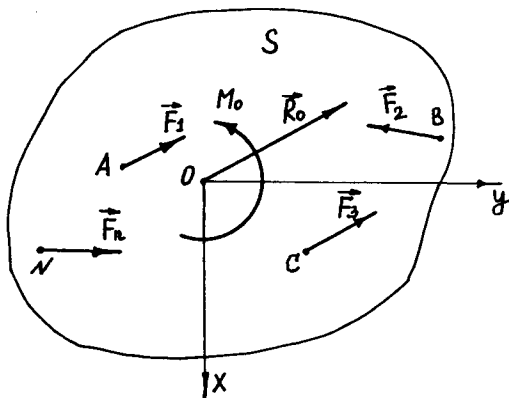


Рис. 4.3

4.3. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Подамо розв'язок другої основної задачі статички твердого тіла для довільної плоскої системи сил, тобто визначимо умови, за яких діюча на тверде тіло довільна плоска система сил буде зрівноваженою.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю:

$$\vec{R}_o = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0}; \quad M_o = \sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.6)$$

Умови (4.6) безпосередньо впливають з теореми II (див. параграф 3.2) і називаються *механічними умовами рівноваги довільної плоскої системи сил*.

Визначимо *аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил*. На підставі формули (1.9) та теореми про проекцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь (див. параграф 2.1)¹

$$R_o = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2}, \quad (4.7)$$

де $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$, $R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}$ — відповідно проекції головного вектора довільної плоскої системи сил \vec{R}_o на осі x та y декартової системи координат (осі x та y визначають площину, де розташовані сили системи).

Враховуючи умови (4.6),

$$R_o = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2} = 0;$$

¹ При позначенні проекцій головного вектора \vec{R}_o на осі декартової системи координат індекс O для спрощення опускається.

$$M_O = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Звідси визначаємо аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.8)$$

З рівнянь (4.8) випливає, що для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб алгебричні суми проєкцій усіх сил системи на кожну з двох осей декартової системи координат (осі, що визначають площину, де розміщені сили системи) та алгебрична сума моментів цих сил відносно будь-якого центра (точки), що лежить у площині дії сил системи, дорівнювали нулю.

Зауважимо, що рівняння (4.8) безпосередньо впливають з рівнянь рівноваги довільної просторової системи сил [див. рівняння (3.29)]. Дійсно, якщо розглядати площину, де розташовані сили довільної плоскої системи, як координатну площину декартової системи координат, наприклад xOy , то алгебрична сума проєкцій сил системи на вісь z дорівнюватиме нулю (сили перпендикулярні до осі), а також дорівнюватимуть нулю алгебричні суми моментів сил системи відносно осей x та y (сили або паралельні осям, або їх перетинають). Отже, з шести рівнянь залишається тільки три:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0,$$

оскільки для плоскої системи сил, що розташована у координатній площині xOy , справедлива рівність $\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k)$, де точка O — початок системи координат.

Рівняння (4.8) називаються *основною формою рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил*, оскільки не накладають ніяких обмежень ні на розташування осей системи координат, ні на положення центра (точки), відносно якої визначаються моменти сил системи.

Наведемо додаткові форми рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил. Перша додаткова форма рівнянь рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0. \quad (4.9)$$

З рівнянь (4.9) випливає, що для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб алгебричні суми моментів усіх сил системи відносно будь-яких двох центрів (точок) A та B і алгебрична сума проєкцій сил системи на вісь x , не перпендикулярну до прямої AB , дорівнювали нулю.

Необхідність рівнянь (4.9) впливає з того, що при рівновазі довільної плоскої системи сил алгебрична сума моментів усіх сил системи відносно довільного центра і алгебрична сума проєкцій цих сил на будь-який напрям у площині дії сил дорівнюють нулю, тобто якщо будь-яке рівняння (4.9) не виконується, то або

$$\vec{R} \neq \vec{0}, \text{ або } \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) \neq 0; \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) \neq 0 \text{ і рівноваги не буде.}$$

Розглянемо достатність рівнянь (4.9). Якщо виконуються тільки дві перші умови рівнянь (4.9), то головний момент системи дорівнює нулю. Як було доведено (див. параграф 4.1), така система сил еквівалентна одній силі — рівнодійній. Лінія дії цієї рівнодійної проходить через точки A та B . Проте

згідно з третьою умовою має бути $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$. Оскільки вісь x не перпен-

дикулярна до прямої AB , то остання умова може бути виконана тільки тоді, коли рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, тобто коли довільна плоска система сил буде зрівноваженою.

Друга додаткова форма рівнянь рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.10)$$

З рівнянь (4.10) випливає, що для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб алгебричні суми моментів усіх сил системи відносно будь-яких трьох центрів (точок) A , B та C , що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю.

Необхідність рівнянь (4.10) очевидна, оскільки при рівновазі алгебрична сума моментів усіх сил системи відносно довільного центра дорівнює нулю. Достатність рівнянь (4.10) випливає з того, що якщо при одночасному виконанні цих умов дана система сил не була б зрівноваженою, то вона мала б рівнодійну, лінія дії якої одночасно проходила б через точки A , B та C , що неможливо, тому що ці точки не лежать на одній прямій. Отже, при виконанні умов (4.10) довільна плоска система сил буде зрівноваженою.

У випадку плоскої системи паралельних сил, наприклад, у випадку коли усі сили паралельні осі y , основна форма рівнянь рівноваги має вигляд

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.11)$$

Додаткова форма рівнянь рівноваги плоскої системи паралельних сил набирає вигляду:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.12)$$

При цьому точки A та B не повинні лежати на прямій, яка паралельна лініям дії сил системи.

На закінчення зауважимо: якщо на тверде тіло окрім сил діють ще пари сил, що розташовані у площині дії сил, з моментами M_1, M_2, \dots, M_n , то вигляд перших двох рівнянь умов рівноваги (4.8) не змінюється, оскільки сума проєкцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю. Останнє рівняння цієї умови на підставі рівнянь (3.9) набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_k = 0, \quad (4.13)$$

де $\sum_{k=1}^n M_k$ — алгебрична сума моментів пар.

Аналогічно змінюють вигляд, подібно до розглянутого, рівняння рівноваги (4.9)—(4.12).

4.4. Визначення натягу важкої підвішеної нитки

Задача про визначення натягу в підвішеній важкій нитці пов'язана з проблемою розрахунку на міцність тросів та ліній електропередач.

При визначенні натягу нитки візьмемо такі припущення: нитка ідеально гнучка та нерозтяжна; провисання нитки відбувається тільки як результат різниці між її довжиною L та відстанню між точками кріплення нитки.

Оскільки нитка ідеально гнучка, то сила натягу в будь-якому перерізі нитки напрямлена перпендикулярно до цього перерізу і має напрям уздовж дотичної до кривої провисання нитки.

Відстань по горизонталі між точками кріплення нитки називається прольотом; проліт позначають l .

Якщо провисання нитки мале порівняно з її прольотом, то довжина кривої провисання мало відрізняється (не більш 10 %) від довжини прольоту l . У цьому разі з достатньою для практики точністю можна вважати, що вага нитки рівномірно розподілена не по її довжині, а вздовж прольоту l . Цю категорію ниток ми і будемо розглядати. Розглянуте припущення про закон розподілу навантаження спрощує розрахунок ниток, але при цьому робить його наближеним. Так, якщо при точному розрахунку (навантаження розподілено вздовж кривої) крива провисання буде ланцюговою лінією¹, то при наближеному розв'язанні крива провисання виявляється квадратною параболою.

Розглянемо визначення натягу нитки у двох випадках.

1. Нитка, що має постійний переріз, навантажена власною вагою і підвішена у двох точках A та B , що розташовані на одному рівні (рис. 4.4).

¹ Див. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — Т. III. — М.: Наука, 1973. — 25 с.

Під дією власної ваги нитка провисає за кривою AOB . Оскільки нитка має постійний переріз, то її вага розподіляється рівномірно по довжині прольоту (на підставі припущення, викладеного вище), тобто нитка навантажена рівномірно розподіленими паралельни-

ми силами з інтенсивністю $\bar{q} \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$.

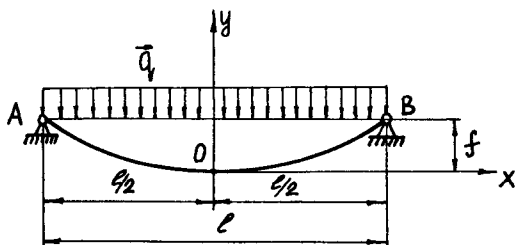


Рис. 4.4

Для визначення натягу нитки застосуємо метод перерізів (див. параграф 1.9), тобто вирізаємо уявно перерізом, що проходить через точку O , ліву частину нитки (рис. 4.5, а). На виділену частину діють такі сили: паралельні рівномірно розподілені сили, інтенсивність яких дорівнює \bar{q} , горизонтальна сила натягу \vec{H} (сила, з якою ліва відкинута частина нитки діє на залишену частину) та сила натягу нитки у перерізі опори B . Ця сила напрямлена вздовж дотичної до кривої провисання нитки у точці B та визначається як геометрична сума реакцій опори B :

$$T = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}. \quad (4.14)$$

Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O (рис. 4.5, а). Позначаючи стрілу провисання нитки (відстань вздовж вертикалі між точками O та B) через f , складаємо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил, що діють на частину нитки:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_B - H = 0; \quad (4.15)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_B - Q = 0; \quad (4.16)$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -Hf + Q \frac{l}{4} = 0, \quad (4.17)$$

де $Q = q \frac{l}{2}$ [за формулою (1.32)] (див. параграф 1.7)); $\frac{l}{4}$ — плече моменту сили \vec{Q} відносно точки B [формула (1.33)].

З рівнянь (4.15) — (4.17) маємо:

$$H = \frac{Ql}{4f} = \frac{ql^2}{8f}; \quad (4.18)$$

$$X_B = H = \frac{ql^2}{8f}; \tag{4.19}$$

$$Y_B = \frac{ql}{2}. \tag{4.20}$$

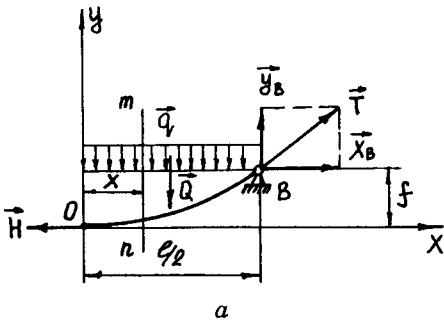
Тоді на підставі формул (4.14), (4.19) та (4.20)

$$T = \sqrt{\left(\frac{ql^2}{8f}\right)^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2}. \tag{4.21}$$

Отже, сила натягу нитки змінюється вздовж кривої провисання. У нижній точці кривої (точка O) сила натягу має мінімальне значення H , а у точці кріплення нитки вона досягає максимального значення T .

Для визначення H та T необхідно знати стрілу провисання нитки f , а для цього треба мати рівняння кривої провисання.

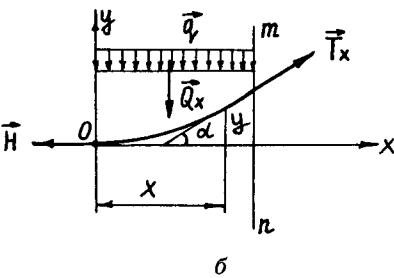
Для визначення рівняння кривої провисання нитки уявно вирізаємо частину нитки, що розміщена між початком координат O та перерізом $m - n$ (рис. 4.5, б). Для цієї частини складемо такі рівняння рівноваги:



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -H + T_x \cos \alpha = 0; \tag{4.22}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad T_x \sin \alpha - Q_x = 0, \tag{4.23}$$

де $Q_x = qx$.



Вилучаючи з рівнянь (4.22) та (4.23) T_x , знайдемо, враховуючи формулу (4.18),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8fx}{l^2}.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8fx}{l^2}.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи здобуте диференціальне рівняння, знайдемо

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} + c.$$

Рис. 4.5

Сталу c знайдемо з умови, що $y = 0$ при $x = 0$, тобто $c = 0$.

Тоді

$$y = \frac{4fx^2}{l^2}. \quad (4.24)$$

Враховуючи рівність (4.18), формула (4.24) набирає вигляду

$$y = \frac{qx^2}{2H}. \quad (4.25)$$

З рівностей (4.24) та (4.25) випливає, що кривою провисання нитки є парабола. Тепер можна визначити залежність стріли провисання f від L та l .

Як відомо, елемент довжини кривої

$$dS = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Оскільки $\frac{dy}{dx} = \frac{8fx}{l^2}$, маємо

$$dS = dx \left(1 + \frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Розкладемо вираз $\left(1 + \frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^{\frac{1}{2}}$ у ряд за формулою бінома Ньютона¹ та, обмежуючись першими двома членами розкладання, знайдемо

$$dS \approx dx \left(1 + \frac{32f^2x^2}{l^4}\right). \quad (4.25a)$$

Інтегруючи це рівняння:

$$S = \int_{-l/2}^{+l/2} \left(1 + \frac{32f^2x^2}{l^4}\right) dx,$$

здобудемо

$$S = L = l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2}\right).$$

¹ $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n$ ($|x| < 1$).

Звідси

$$f = \sqrt{\frac{3}{8}l(L-l)}. \quad (4.26)$$

2. Нитка, що має постійний переріз, навантажена власною вагою і закріплена у точках A та B , що розташовані на різних рівнях (рис. 4.6).

Якщо точки кріплення нитки розташовані на різних рівнях, то, підставляючи в рівняння (4.25) значення $x = -a$ та $x = b$, знайдемо f_1 та f_2 :

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H}; \quad f_2 = \frac{qb^2}{2H}. \quad (4.27)$$

Звідси з другого виразу визначаємо натяг H :

$$H = \frac{qb^2}{2f_2}, \quad (4.28)$$

а поділяючи перший вираз на другий, знаходимо

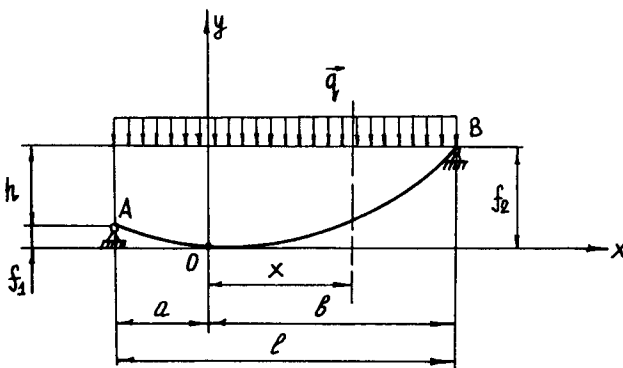


Рис. 4.6

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{або } a = \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}.$$

Беручи до уваги, що $a + b = l$, маємо

$$b \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} = l, \quad \text{або } b = \frac{l}{1 \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}}.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (4.28), остаточно визначимо

$$H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_2} \pm \sqrt{f_1})^2}. \quad (4.29)$$

Сили натягу в точках A і B на підставі формули (4.21)

$$T_A = \sqrt{H^2 + q^2a^2}; \quad T_B = \sqrt{H^2 + q^2b^2}. \quad (4.30)$$

Знаки в знаменнику формули (4.29) вказують на те, що можуть бути дві основні форми провисання нитки. Перша форма — при меншому значенні H (знак “+” перед другим коренем). У цьому випадку вершина параболи розташована між опорами A та B нитки (рис. 4.7).

При більшому натягу H (знак “-” перед другим коренем) вершина параболи розташована з лівого боку від опори A . Маємо другу форму кривої (рис. 4.7).

Може бути і третя (проміжна) форма провисання, що відповідає умові $f_1 = 0$; тоді початок координат O_3 збігається з точкою A (рис. 4.7).

Форма провисання нитки залежатиме від співвідношення довжини нитки по кривій та довжини прольоту.

На закінчення зазначимо: якщо нитка буде навантажена не тільки власною вагою, а й будь-яким іншим рівномірно розподіленим по її довжині або довжині прольоту навантаженням, то під \bar{q} слід розуміти сумарну інтенсивність навантаження. Якщо ж додаткове до власної ваги навантаження буде значно більшим за власну вагу, то \bar{q} буде інтенсивністю цього навантаження.

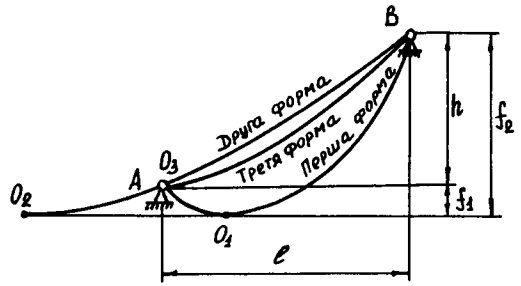


Рис. 4.7

4.5. Розрахунок плоских ферм

Фермою називається геометрично незмінна конструкція, утворена прямолінійними стрижнями, які з'єднані між собою кінцями за допомогою шарнірів (рис. 4.8).

Шарнірні з'єднання стрижнів ферми називаються **вузлами ферми**. Якщо осі усіх стрижнів ферми розташовані в одній площині, то така ферма називається **плоскою**. Ми будемо розглядати тільки плоскі ферми.

Найпростішою геометрично незмінною фермою є трикутник, що складається із трьох стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами, або вузлами A , B , та C (рис. 4.9, а).

Якщо з'єднати шарнірами чотири стрижні, то матимемо не ферму, а механізм (рис. 4.9, б). Щоб зробити це шарнірне з'єднання стрижнів фермою, достатньо перетягти його по одній із діагоналей стрижнем (рис. 4.9, в).

Простіші ферми будують так: послідовно приєднують до стрижневого трикутника по два стрижні, які не розташовані на одній прямій і збігаються у новому вузлі ферми (рис. 4.8). Серед різних типів ферм розрізняють два основних види: 1) ферми, що не мають зайвих стрижнів; 2) ферми із зайвими

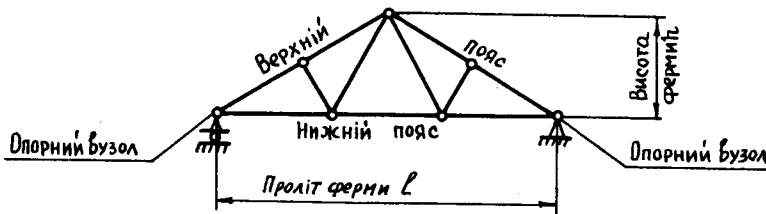


Рис. 4.8

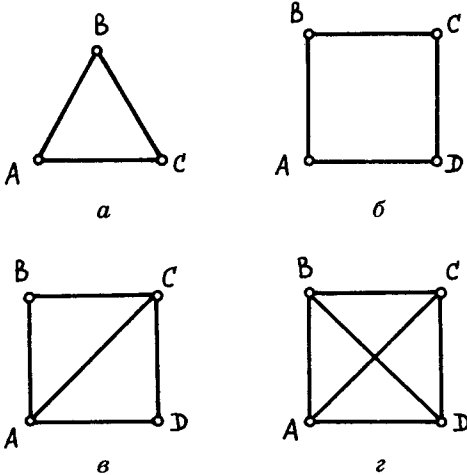


Рис. 4.9

стрижнями. Прикладом ферми без зайвих стрижнів є трикутна ферма (рис. 4.8, 4.9, а). Прикладом ферми із зайвими стрижнями є ферма, зображена на рис. 4.9, г.

Оскільки при побудові геометрично незмінної ферми до основного трикутника приєднують один вузол з двома стрижнями, то всього у фермі буде N стрижнів та n вузлів. Тому щоб одержати усі інші вузли ферми, потрібно $2n - 3$ стрижня. Отже, число стрижнів будь-якої ферми визначатиметься за формулою

$$N = 2n - 3. \quad (4.31)$$

Якщо $N < 2n - 3$, то система шарнірно зчленованих кінцями стрижнів буде змінною стрижневою системою і, отже, не буде фермою (рис. 4.9, б). Якщо $N > 2n - 3$, то ферма буде мати зайві стрижні. Такі ферми називають *внутрішньо статично невизначеними*.

Статична невизначеність ферми може бути і зовнішньою. Якщо ферма опорними вузлами спирається на одну шарнірно-нерухому та одну шарнірно-рухому опори (рис. 4.8), то вона має три зовнішні в'язі. Така ферма буде *зовнішньо визначеною*. Якщо, наприклад, ферма буде спиратися опорними вузлами на шарнірно-нерухомі опори, то така ферма буде *зовнішньо статично невизначеною*. Далі ми будемо розглядати тільки зовнішню і внутрішню визначені ферми, тобто такі, для яких справедлива рівність (4.31).

Здійснити розрахунок ферми означає визначити реакції опор ферми та зусиль в її стрижнях, які виникають під дією сил, прикладених до ферми.

При розрахунках ферм приймають такі припущення:

- 1) зовнішні сили, що діють на ферму, прикладені тільки у вузлах ферми;
- 2) вага стрижнів ферми мала порівняно із зовнішніми силами, що діють на ферму, тобто вагою стрижнів можна знехтувати;
- 3) вузли ферми є ідеальними шарнірами (тобто сили тертя у вузлах відсутні).

За таких припущень сила, що діє з боку будь-якого вузла на прилеглий до вузла стрижень (зусилля в стрижні), завжди напрямлена вздовж прямої, що проходить через кінці цього стрижня. Тому стрижні або розтягуються, або стискаються під дією цих сил.

Розглянемо два способи визначення зусиль у стрижнях ферми: спосіб вирізання вузлів та спосіб перерізів (спосіб Ріттера)¹.

¹ А. Ріттер (1826—1908) — відомий німецький механік у галузі розрахунків стрижневих конструкцій (ферм).

I. Спосіб вирізання вузлів. Розглянемо ферму, що подана на рис. 4.10. Перевіряємо, чи є ферма статично визначеною. Кількість вузлів ферми $n = 8$. Кількість стрижнів $N = 13$. Підставляючи ці значення у формулу (4.31), збудемо $13 = 2 \cdot 8 - 3$, тобто тотожність. Ферма статично визначена.

Знайдемо реакції опор ферми. Аналізуємо в'язі, накладені на ферму. Маємо два види в'язей: шарнірно-рухома та шарнірно-нерухома опори. Звільняємо ферму від в'язей та замінюємо в'язі відповідними реакціями (див. параграф 1.8). Реакцію опори A подаємо двома складовими. До ферми прикладені сили \vec{P} та реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B$, що утворюють довільну плоску систему сил.

Побудуємо систему декартових координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -P - X_A = 0; \tag{4.32}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - 9P = 0; \tag{4.33}$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad Y_B \cdot 12 - 2P \cdot 3 - 2P \cdot 6 - 2P \cdot 9 - 2P \cdot 12 + P \frac{3 \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 0. \tag{4.34}$$

З рівнянь (4.32)—(4.34) визначаємо X_A, Y_A та Y_B :

$$\begin{aligned} X_A &= -P; \\ Y_A &= 4,14P; \\ Y_B &= 4,86P. \end{aligned}$$

Зауважимо, що визначення реакції опор ферми при її розрахунку з використанням комп'ютерів (див. главу 7) не обов'язково. При ручному розрахунку насамперед потрібно обов'язково визначити реакції опор ферми.

Нумеруємо вузли ферми цифрами I, II, III і т.д., а стрижні — цифрами 1, 2, 3 і т.д. (рис. 4.10). Для визначення зусиль в стрижнях уявно вирізаємо вузли ферми. Починати необхідно з опорних вузлів, тобто того опорного вузла,

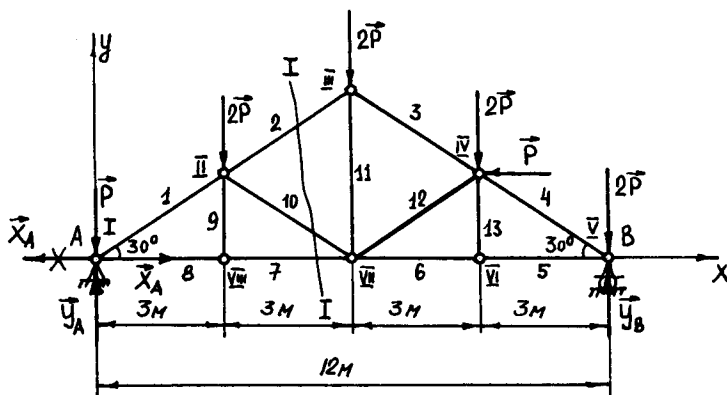


Рис. 4.10

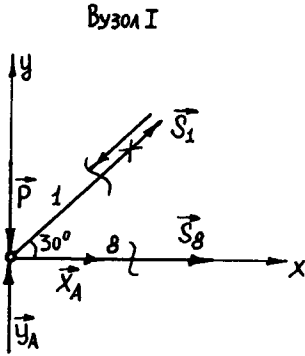


Рис. 4.11

в якому збігаються тільки два стрижні. У нашому випадку можна починати розрахунки або з вузла I, або з вузла V.

Уявно вирізаємо вузол I (опорний вузол, рис. 4.10 і 4.11) і складаємо рівняння рівноваги сил, що діють на вузол. Невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла), тобто слушне припущення, що стрижні 1 та 8 розтягнені. Сили (зусилля) в стрижнях позначаємо \vec{S}_1 та \vec{S}_8 . Оскільки сили, що діють на вузол I, утворюють збіжну плоску систему сил, то рівняння рівноваги сил, що діють на вузол, мають вигляд:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A + S_8 + S_1 \cos 30^\circ = 0; \quad (4.35)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - P + S_1 \sin 30^\circ = 0. \quad (4.36)$$

З рівнянь (4.35) та (4.36) визначаємо S_1 та S_8 :

$$S_1 = \frac{P - Y_A}{\sin 30^\circ} = \frac{P - 4,14P}{0,5} = -6,28P;$$

$$S_8 = -X_A - S_1 \cos 30^\circ = -P - (-6,28P) \cos 30^\circ = -P + 6,28P \cdot 0,866 = 4,44P.$$

Коригуємо напрям сил \vec{S}_1 та \vec{S}_8 . Величина сили \vec{S}_8 здобута з рівнянь рівноваги зі знаком "+", тому напрям \vec{S}_8 на рис. 4.11 є дійсним напрямом цієї сили. Оскільки сила \vec{S}_8 напрямлена від перерізу, то стрижень 8 розтягується. Величина сили \vec{S}_1 здобута зі знаком "-", тому припущення про те, що стрижень 1 розтягується, не виправдовується. Змінюємо напрям сили \vec{S}_1 на протилежний (рис. 4.11). Оскільки сила \vec{S}_1 напрямлена до перерізу, то стрижень 1 стискається. Отже, визначається вид деформації відповідних стрижнів.

Тепер можна переходити до наступного вузла, але обов'язково до такого, в якому збігаються не більше двох стрижнів з невідомими зусиллями. У нашому випадку це вузол VIII (рис. 4.10). Уявно вирізаємо вузол VIII (рис. 4.12). На вузол діють

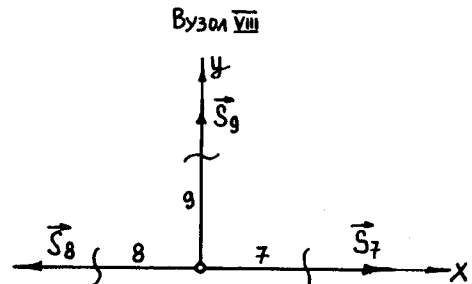


Рис. 4.12

сили \vec{S}_9 , \vec{S}_7 та \vec{S}_8 . Сили \vec{S}_9 та \vec{S}_7 — невідомі зусилля у стрижнях 9 та 7, тому ці сили, на підставі згаданого вище припущення, напрямляємо від перерізів. Що ж до сили \vec{S}_8 , то її потрібно напрямити так, щоб стрижень 8 був розтягнений, що показує попередній розрахунок. Направляємо силу \vec{S}_8 також від перерізу (рис. 4.12). Складаємо рівняння рівноваги сил, що діють на вузол VIII:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; S_7 - S_8 = 0; \quad (4.37)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; S_9 = 0. \quad (4.38)$$

З рівнянь (4.37) та (4.38) маємо:

$$\begin{aligned} S_7 &= S_8 = 4,44P; \\ S_9 &= 0. \end{aligned}$$

Вирізаючи послідовно вузли ферми, знайдемо зусилля в усіх стрижнях ферми. Як бачимо, спосіб вирізання вузлів є громіздким, крім того, він не дає можливості визначити зусилля в окремому стрижні ферми без проведення попереднього визначення зусиль в інших стрижнях. Так, щоб визначити зусилля в стрижні 11 (рис. 4.10), необхідно розглянути додатково рівновагу трьох вузлів.

II. Спосіб перерізів. Цей спосіб зручно застосовувати для визначення зусиль в окремих стрижнях ферми, зокрема при перевірних розрахунках.

При визначенні зусиль у стрижнях ферми способом перерізів розрахунок здійснюють за такою схемою.

1. Визначають реакції опор ферми (обов'язково).

2. Уявно перерізають ферму перерізом на дві частини так, щоб були перерізними не більш як три стрижні. Ці три стрижні не повинні збігатися в одній точці.

3. Розглядають рівновагу тієї частини ферми, до якої прикладено менше сил. Другу частину ферми уявно вилучають. Дію вилученої частини ферми замінюють відповідними зусиллями в стрижнях. Ці сили напрямляють від перерізів, тобто справедливе припущення, що перерізані стрижні розтягуються. Складають рівняння рівноваги цієї частини ферми і визначають невідомі зусилля.

При застосуванні способу перерізів, оскільки сили, що діють на цю частину ферми, утворюють довільну плоску систему сил, використовують першу або другу додаткову форми рівнянь рівноваги плоскої системи сил. Перша додаткова форма рівнянь рівноваги використовується тоді, коли два із перерізнаних стрижнів паралельні.

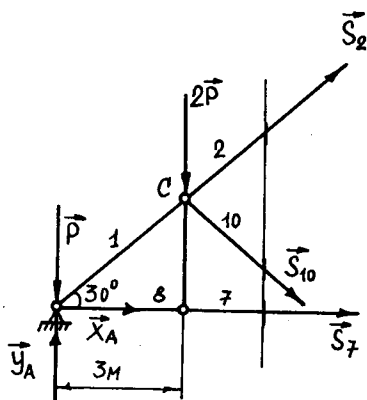


Рис. 4.13

Центри моментів при складанні рівнянь рівноваги (ці точки називаються точками Ріттера) необхідно взяти у точках перетину стрижнів, що беруться по двоє з трьох переріжаних.

На підставі розглянутого визначимо зусилля в стрижні 7 ферми, що подана на рис. 4.10.

Перерізаємо ферму перерізом I—I (див. рис. 4.10). Розглянемо рівновагу лівої частини. Для цього зображаємо її окремо (рис. 4.13). Припускаючи, що перерізані стрижні 2, 10 та 7 розтягнені, напрямляємо сили \vec{S}_2 , \vec{S}_{10} та \vec{S}_7 від перерізів. Для визначення зусилля в стрижні 7 складаємо рівняння моментів відносно точки C (рис. 4.13):

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; S_7 \frac{3 \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + X_A \frac{3 \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + P \cdot 3 - Y_A \cdot 3 = 0.$$

Звідси знайдемо

$$S_7 = \frac{\left(3Y_A - X_A \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} - P \cdot 3 \right) \cos 30^\circ}{3 \sin 30^\circ} = \frac{4,14 \cdot 3P - 3P - 1,73P}{1,73} = 4,44P.$$

4.6. Приклади розв'язання задач з рівноваги довільної плоскої системи сил. Методичні вказівки

Приклад 4.1. Визначити максимальну товщину h_{\max} шару цукрового буряка, який може зняти тракторна лопата (самохідний тракторний навантажувач)

при завантажуванні ковша, якщо вага тракторної лопати $P = 110$ кН. Сила опору руху тракторної лопати за модулем $R = 10$ кН, а сила опору шару буряка \vec{R}_1 прикладена у точці B (рис. 4.14). Зусилля потягу при навантажуванні тракторної лопати $T = 25$ кН.

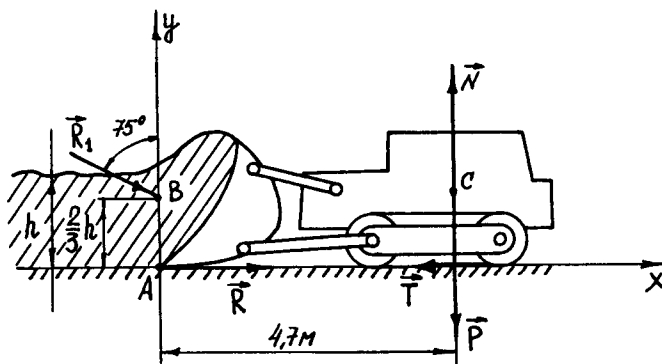


Рис. 4.14

Розв'язання. У задачі слід визначити товщину шару цукрового буряка, який може зняти тракторна лопата при завантажуванні ковша. Невідому величину h_{\max} знайдемо, якщо розглянемо рівновагу тракторної лопати при її завантажуванні. Аналізуємо в'язі. Маємо дві в'язі: шар буряка та поверхня, по якій переміщується тракторна лопата. Звільняємо тракторну лопату від в'язей. Реакція шару цукрового буряка дорівнює силі \vec{R}_1 , реакція поверхні складається з двох сил: сили \vec{N} (напряmlена по нормалі до поверхні) та сили \vec{R} (сила опору руху тракторної лопати).

Сили \vec{R}_1 , \vec{R} , \vec{T} , \vec{P} та \vec{N} , що діють на тракторну лопату, утворюють довільну плоску систему сил.

Побудуємо систему координатних осей з початком у точці A (рис. 4.14) та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_1 \sin 75^\circ + R - T = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -R_1 \cos 75^\circ - P + N = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad N \cdot 4,7 - P \cdot 4,7 - R_1 \sin 75^\circ \cdot \frac{2}{3} h = 0. \quad (3)$$

З рівняння (1) визначаємо R_1 :

$$R_1 = \frac{T - R}{\sin 75^\circ} = \frac{25 - 10}{0,966} = 15,5 \text{ (кН)}.$$

З рівняння (2) визначаємо N :

$$N = R_1 \cos 75^\circ + P = 15,5 \cdot 0,259 + 110 = 114 \text{ (кН)}.$$

З рівняння (3) визначаємо h_{\max} :

$$h_{\max} = \frac{(4,7N - 4,7P)3}{R_1 \sin 75^\circ \cdot 2} = \frac{(4,7 \cdot 114 - 4,7 \cdot 110)}{15,5 \cdot 0,966 \cdot 2} = 1,88 \text{ (м)}.$$

Приклад 4.2. Ківш скіпового підйомника вапнякової печі рівномірно підіймається по рейках, які викладені на похилій площині, за допомогою лебідки з тросом. Схему підйомника подано на рис. 4.15. Вага ковша з вантажем $G = 3,5$ кН. Визначити тиск колес ковша в точках A і B на рейки та натяг троса, якщо $AC = 0,6$ м. Розмірами колес, вагою троса та тертям знехтувати.

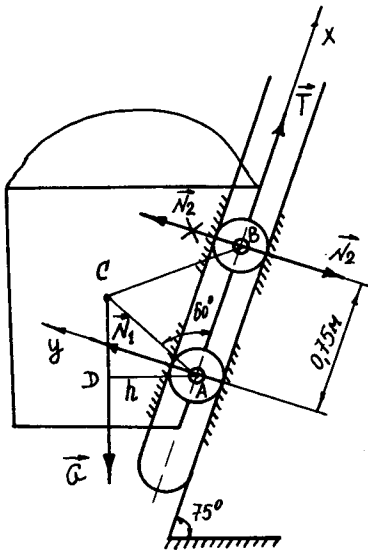


Рис. 4.15

Розв'язання. У задачі треба визначити тиск колес на рейки та натяг троса. Невідомі сили знайдемо, якщо розглянемо рівновагу ковша. Аналізуємо в'язі. Маємо два види в'язей: невагома нитка та гладенька поверхня. Звільняємо ківш від в'язей.

До ковша прикладені сили \vec{G} , \vec{N}_1 , \vec{N}_2 та \vec{T} , що утворюють довільну плоску систему сил.

Побудуємо систему координатних осей з початком у точці А та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad T - G \sin 75^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_1 + N_2 - G \cos 75^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad N_2 \cdot 0,75 + Gh = 0. \quad (3)$$

З рівняння (1) визначаємо натяг троса T :

$$T = G \sin 75^\circ = 3,5 \cdot 0,966 = 3,38 \text{ (кН)}.$$

З рівняння (3) визначаємо реакцію N_2 :

$$N_2 = \frac{Gh}{0,75} = -\frac{G \cdot AC \sin 45^\circ}{0,75} = -\frac{3,5 \cdot 0,6 \cdot 0,707}{0,75} = -1,98 \text{ (кН)},$$

де $h = AC \sin 45^\circ$, оскільки кут $\angle ACD$ трикутника $\triangle ACD$ дорівнює 45° .

Змінюємо напрям реакції \vec{N}_2 на протилежний.

З рівняння (2) визначаємо реакцію \vec{N}_1 :

$$N_1 = G \cos 75^\circ - N_2 = 3,5 \cdot 0,259 - (-1,98) = 2,88 \text{ (кН)}.$$

Дійсний напрям реакцій \vec{N}_1 , \vec{N}_2 та сили натягу троса подано на рис. 4.15.

Згідно з аксіомою про рівність дії та протидії сили тиску коліс на рейки за модулем дорівнюють реакціям \vec{N}_1 та \vec{N}_2 , але протилежно напрямлені.

Приклад 4.3. Поперечний переріз греблі водозбірного ставу спиртового заводу має вигляд трапеції (рис. 4.16). На греблю діють рівнодійні сил тиску води \vec{Q} та \vec{F} . За модулем $Q = 2$ МН, $F = 1,3$ МН. Сила ваги прямокутної частини греблі за модулем $G_1 = 3$ МН, а сила ваги трикутної частини греблі

$G_2 = 1,5$ МН. Лінії дії сил \vec{G}_1 та \vec{G}_2 проходять через точки C_1 та C_2 . Визначити рівнодійну силу реакції ґрунту, на який спирається гребля, якщо $H = 4$ м, $h = 2,4$ м, $a = 5$ м, $b = 10$ м, $\alpha = 23^\circ$.

Розв'язання. Проведемо еквівалентне перетворення довільної плоскої системи сил, що діють на греблю, з метою спрощення. Побудуємо систему координатних осей з початком у точці O (рис. 4.16). Візьмемо за центр зведення початок координат O та визначимо головний вектор R_o та головний момент M_o системи сил за формулами (4.5) та (4.7):

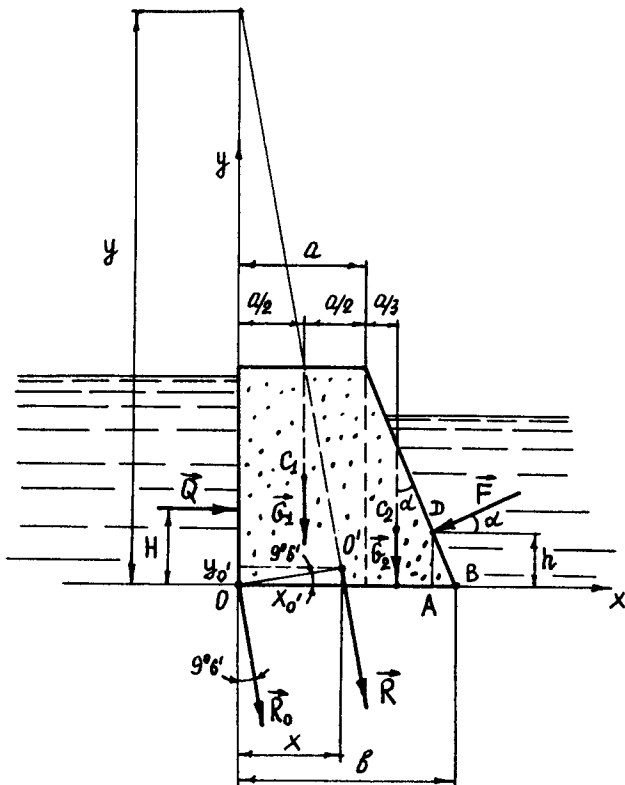


Рис. 4.16

$$R_o = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2}; \quad (1)$$

$$M_o = \sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k), \quad (2)$$

де

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = Q - F \cos \alpha = 2,0 - 1,3 \cdot 0,92 = 0,804 \text{ (МН)};$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = -G_1 - G_2 - F \sin \alpha = -3,0 - 1,5 - 1,3 \cdot 0,39 = -5,0 \text{ (МН)};$$

$$\sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k) = -Q \cdot H - G_1 \frac{a}{2} - G_2 \frac{4a}{3} + F \cos \alpha \cdot h - F \sin \alpha \cdot OA =$$

$$= -2,0 \cdot 4 - 3,0 \cdot \frac{5}{2} - 1,5 \cdot \frac{4 \cdot 5}{3} + 1,3 \cdot 0,9 \cdot 2,4 - 1,3 \cdot 0,39 \cdot 9 =$$

$$= -8,0 - 7,5 - 10,0 + 2,8 - 4,6 = -27,3 \text{ (МН} \cdot \text{м)},$$

де момент сили \vec{F} визначений на підставі теореми про момент рівнодійної системи сил (див. параграф 1.5); $OA = 10 - h \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 4.16).

Підставляємо значення $\sum_{k=1}^n F_{kx}$, $\sum_{k=1}^n F_{ky}$ та $\sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k)$ в рівняння (1) та (2):

$$R_o = \sqrt{0,804^2 + 5,0^2} = 5,1 \text{ (МН)};$$

$$M_o = -27,3 \text{ (МН} \cdot \text{м)}.$$

Оскільки $\vec{R}_o \neq \vec{0}$ та $M_o \neq 0$, система сил, що діє на греблю, зводиться до рівнодійної сили. За модулем рівнодійна сила дорівнює головному вектору системи: $R = R_o = 5,1$ МН. Лінія дії рівнодійної сили проходить через точку O' . Знайдемо цю точку. Для цього визначаємо напрямлені косинуси вектора \vec{R}_o (див. параграф 1.3):

$$\cos(\widehat{\vec{R}_o, x}) = \frac{R_x}{R_o} = \frac{\sum_{k=1}^n F_{kx}}{R_o} = \frac{0,804}{5,1} = 0,1584;$$

$$\cos(\widehat{\vec{R}_o, y}) = \frac{R_y}{R_o} = \frac{\sum_{k=1}^n F_{ky}}{R_o} = -\frac{5,0}{5,1} = -0,9874.$$

Звідси маємо

$$(\widehat{\vec{R}_o, x}) = 80^\circ 54'; \quad (\widehat{\vec{R}_o, y}) = 189^\circ 6'.$$

Положення головного вектора подано на рис. 4.16.

Визначаємо відстань між точками O та O' вздовж перпендикуляра до головного вектора \vec{R}_o за формулою (3.25):

$$OO' = \frac{|M_o|}{R_o} = \frac{27,3}{5,1} = 5,38 \text{ (м)}.$$

Тепер визначимо координати точки O' :

$$x_{o'} = OO' \cos 9^\circ 6' = 5,38 \cdot 0,9874 = 5,3 \text{ (м)};$$

$$y_{o'} = OO' \sin 9^\circ 6' = 5,38 \cdot 0,1582 = 0,85 \text{ (м)}.$$

Зауважимо, що при визначенні положення точки O' на перпендикулярі до головного вектора \vec{R}_o необхідно мати на увазі, що знак моменту рівнодійної сили \vec{R} відносно точки O має збігатися зі знаком головного моменту M_o .

Положення рівнодійної сили \vec{R} довільної плоскої системи сил, що діють на греблю, подано на рис. 4.16.

Положення рівнодійної сили \vec{R} можна визначити іншим шляхом — на підставі рівнянь (1.18) та (1.19):

$$M_z(\vec{R}) = M_o(\vec{R}) = xR_y - yR_x,$$

де

$$M_z(\vec{R}) = -M_o = -27,3 \text{ (МН} \cdot \text{м)};$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = -5,0 \text{ (МН)};$$

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0,804 \text{ (МН)}.$$

Звідси

$$5x + 0,804y = 27,3,$$

де x, y — координати точки перетину лінії дії рівнодійної сили з осями координат.

З рівняння знаходимо: при $x = 0$ $y = 33,95$ м; при $y = 0$ $x = 5,45$ м. Лінію дії рівнодійної сили зображено на рис. 4.16.

Рівнодійна реакція ґрунту діє вздовж лінії дії рівнодійної довільної плоскої системи сил \vec{R} , що діють на греблю, але протилежно напрямлена до цієї сили.

Приклад 4.4. Теплообмінник спирається на кронштейн, прикріплений до колони за допомогою п'яти болтів (рис. 4.17). Вага теплообмінника $P = 2$ кН. Визначити сили, що діють на кожний болт з'єднання, якщо $l = 0,8$ м. Тертям знехтувати.

Розв'язання. На підставі леми про паралельне перенесення сили (див. параграф 3.5) переносимо

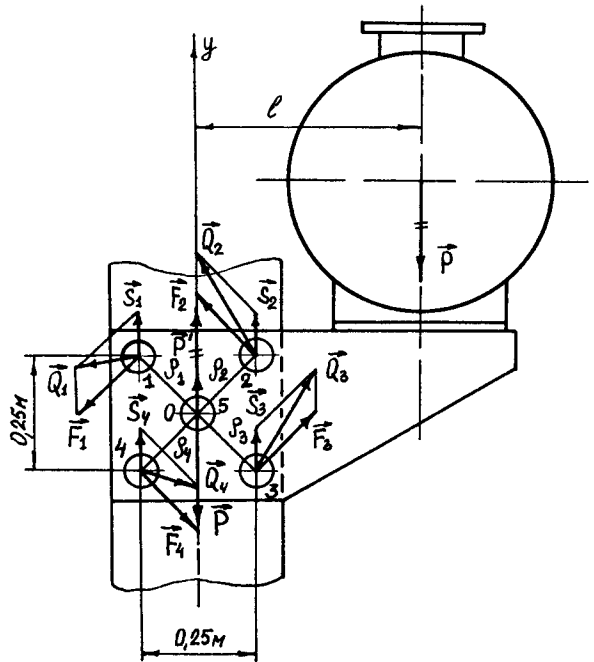


Рис. 4.17

силу \vec{P} у точку O (центр з'єднання). Маємо силу \vec{P} та пару сил (\vec{P}, \vec{P}') , момент якої $M = Pl$. Під дією сили \vec{P} кронштейн намагається здійснити переміщення вздовж осі y . Болти перешкоджають цьому переміщенню. З боку болтів виникають реакції $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4$ та \vec{S}_5 . За умовою рівноваги кронштейна

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 - P = 0.$$

Оскільки $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S$, то з рівняння знайдемо

$$S = \frac{P}{5} = \frac{2,0}{5} = 0,4 \text{ (кН)}.$$

Під дією пари сил кронштейн намагається здійснити обертання відносно центрального болта з'єднання. Болти перешкоджають цьому обертанню. З боку болтів виникають реакції $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ та \vec{F}_4 . Лінії дії цих реакцій перпендикулярні до відповідних радіусів ρ_1, ρ_2, ρ_3 та ρ_4 . За умовою рівноваги кронштейна

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0; \quad -Pl + \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 + \rho_3 F_3 + \rho_4 F_4 = 0.$$

Припускаючи, що $F_k = k\rho_k$, де k — коефіцієнт пропорційності, можна записати

$$\frac{F_1}{\rho_1} = \frac{F_2}{\rho_2} = \frac{F_3}{\rho_3} = \frac{F_4}{\rho_4}.$$

Оскільки $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho$, то з останнього співвідношення випливає

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F.$$

Тоді з рівняння рівноваги випливає, що

$$F = \frac{Pl}{4\rho} = \frac{2,0 \cdot 0,8}{4 \cdot 0,177} = 2,26 \text{ (кН)},$$

де

$$\rho = \frac{\sqrt{0,25^2 + 0,25^2}}{2} = 0,177 \text{ (м)}.$$

Складаючи сили \vec{S}_1 та \vec{F}_1 , знайдемо реакцію болта 1:

$$Q_1 = \sqrt{S^2 + F^2 - 2SF \cos 45^\circ} = \sqrt{0,4^2 + 2,26^2 - 2 \cdot 0,4 \cdot 2,26 \cdot 0,707} = 2 \text{ (кН)}.$$

Складаючи сили \vec{S}_2 та \vec{F}_2 , знайдемо реакцію болта 2:

$$Q_2 = \sqrt{S^2 + F^2 + 2SF \cos 45^\circ} = \sqrt{0,4^2 + 2,26^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 2,26 \cdot 0,707} = 2,56 \text{ (кН)}.$$

Сили, що діють на болти, за модулем дорівнюють відповідним реакціям, але мають протилежний напрям.

Приклад 4.5. До балки прикладено: паралельні рівномірно розподілені сили інтенсивністю $q = 2 \text{ кН/м}$; сила $P_1 = 1,2 \text{ кН}$; сила $P_2 = 0,8 \text{ кН}$; пара сил з моментом $M = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис.4.18). Нехтуючи вагою балки, визначити реакції опор A та B .

Невільне тверде тіло, що має прямолінійну вісь і під дією прикладених до нього сил може одержувати деформацію згину, називається в механіці балкою. Зауважимо, що під балкою розуміють не тільки балки будівельних конструкцій, а й елементи опорних конструкцій машин та апаратів, а також окремі деталі різних машин та механізмів (вали, осі, зубці зубчастих колес тощо).

Одним з важливих етапів розрахунку балки є етап визначення реакцій в'язей, що накладені на балку. Визначення реакцій в'язей різних типів балок при різних їх навантаженнях розглядається у цьому прикладі та прикладах 4.6, 4.7 та 4.8.

Розв'язання. Балка між опорами A та B (рис. 4.18) навантажена розподіленими вздовж відрізка прямої паралельними силами (див. параграф 1.7). Інтенсивність розподілу цих сил \bar{q} є сталою величиною і чисельно дорівнює $q = 2 \text{ кН/м}$. Як було зазначено у параграфі 1.7, при розв'язанні практичних задач механіки розподілені сили необхідно замінити їх рівнодієюю.

Числове значення рівнодіючої розподілених уздовж відрізка прямої сил визначається за формулою (1.32). У нашому випадку маємо

$$Q = \int_{(L)} q(x) dx = \int_0^l q dx = ql,$$

де l — довжина відрізка, вздовж якого розподілені сили.

Координату x_C точки C , через яку проходить лінія дії рівнодіючої розподілених сил \bar{Q} в системі координат Axy (рис. 4.18), визначаємо за формулою (1.33)

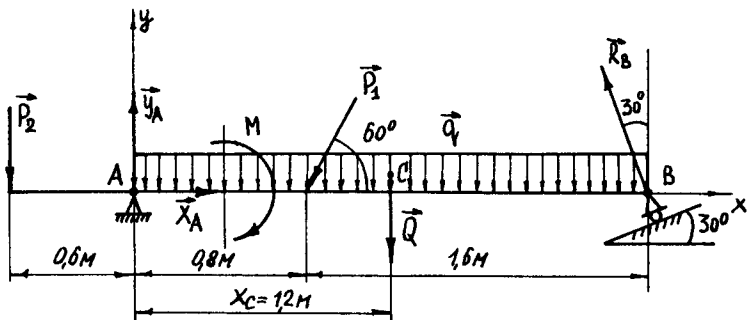


Рис. 4.18

$$x_c = \frac{\int_{(L)} q(x) x dx}{\int_{(L)} q(x) dx} = \frac{\int_0^l q x dx}{\int_0^l q dx} = \frac{ql^2}{2ql} = \frac{l}{2},$$

де l — довжина відрізка, вздовж якого розподілені сили.

Беручи до уваги проведені розрахунки, замінюємо рівномірно розподілені сили силою \bar{Q} .

У задачі потрібно визначити реакції опор A та B . Невідомі сили знайдемо, якщо розглянемо рівновагу балки. Аналізуємо в'язі. Маємо два види в'язей: шарнірно-нерухому та шарнірно-рухому опори. Звільняємо балку від в'язей. Реакцію в'язі A подаємо двома складовими (див. параграф 1.8).

До балки прикладено сили \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , \bar{Q} , \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{R}_B та пара сил з моментом M , що утворюють довільну плоску систему сил.

Складаємо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил (систему координатних осей з початком у точці A подано на рис. 4.18):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A - P_1 \cos 60^\circ - R_B \sin 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - P_2 - P_1 \sin 60^\circ - Q + R_B \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; P_2 \cdot 0,6 - M - Q \cdot 1,2 - P_1 \sin 60^\circ \cdot 0,8 + R_B \cos 30^\circ \cdot 2,4 = 0, \quad (3)$$

де моменти сил \bar{P}_1 та \bar{R}_B відносно точки A визначені на підставі теореми про момент рівнодійної системи сил (див. параграф 1.5).

З рівняння (3) знайдемо

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{M + Q \cdot 1,2 + P_1 \sin 60^\circ \cdot 0,8 - P_2 \cdot 0,6}{2,4 \cos 30^\circ} = \\ &= \frac{0,6 + 2 \cdot 2,4 \cdot 1,2 + 1,2 \cdot 0,8 \cdot 0,866 - 0,8 \cdot 0,6}{2,4 \cdot 0,866} = 3,23 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

З рівняння (2) дістанемо

$$\begin{aligned} Y_A &= P_2 + P_1 \sin 60^\circ + Q - R_B \cos 30^\circ = \\ &= 0,8 + 1,2 \cdot 0,866 + 2 \cdot 2,4 - 3,33 \cdot 0,866 = 3,84 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

З рівняння (1) знайдемо

$$X_A = P_1 \cos 60^\circ + R_B \sin 30^\circ = 1,2 \cdot 0,5 + 3,23 \cdot 0,5 = 2,21 \text{ (кН)}.$$

Дійсний напрям реакцій \bar{X}_A , \bar{Y}_A та \bar{R}_B подано на рис. 4.18.

Приклад 4.6. До балки прикладено: паралельні розподілені за законом трикутника сили з максимальною інтенсивністю $q_{\max} = 2 \text{ кН/м}$; сила $F = 6 \text{ кН}$; пара сил з моментом $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 4.19). Визначити реакції жорсткого зацмлення. Вагою балки знехтувати.

Розв'язання. Балка навантажена розподіленими вздовж відрізка прямої паралельними силами. Сили розподілені за законом трикутника. Максимальна інтенсивність розподілу цих сил чисельно дорівнює $q_{\max} = 2 \text{ кН/м}$. При розв'язанні задачі необхідно замінити розподілені сили їх рівнодійною.

Числове значення рівнодійної розподілених уздовж відрізка прямої сил визначається за формулою (1.32). У нашому випадку маємо

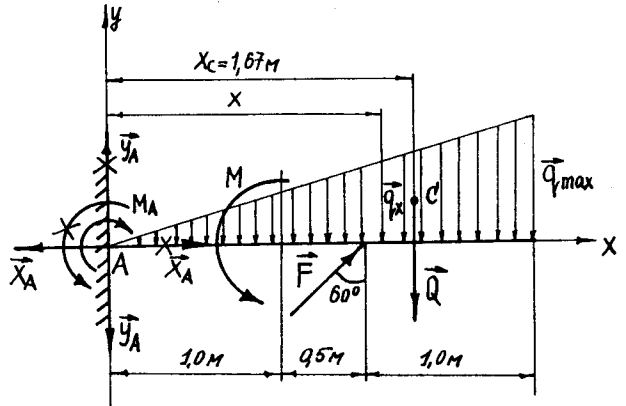


Рис. 4.19

$$Q = \int_{(L)} q(x) dx = \int_0^l \frac{q_{\max} x}{l} dx = \frac{q_{\max} l}{2},$$

де l — довжина відрізка, вздовж якого розподілені сили; $q(x) = \frac{q_{\max} x}{l}$, що впливає з рис. 4.19.

Координату x_c точки C , через яку проходить лінія дії рівнодійної розподілених сил \vec{Q} в системі координат Axy , визначаємо за формулою (1.33)

$$x_c = \frac{\int_{(L)} q(x) x dx}{\int_{(L)} q(x) dx} = \frac{\int_0^l \frac{q_{\max} x}{l} x dx}{\int_0^l \frac{q_{\max} x}{l} dx} = \frac{2q_{\max} l^3}{3q_{\max} l^2} = \frac{2}{3} l,$$

де l — довжина відрізка, вздовж якого розподілені сили.

Беручи до уваги проведені розрахунки, замінюємо розподілені сили силою \vec{Q} .

У задачі треба визначити реакцію опори A . Невідомі сили знайдемо, якщо розглянемо рівновагу балки.

В'язю є жорстке зацмлення. Звільняємо балку від в'язі, тобто реакцію опори A подаємо двома силами \vec{X}_A , \vec{Y}_A та парою сил з моментом M_A (див. параграф 1.8).

До балки прикладені сили \vec{F} , \vec{Q} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A та пари сил з моментами M та M_A , що утворюють довільну плоску систему сил.

Складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил (систему координатних осей з початком у точці A подано на рис. 4.19):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + F \sin 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + F \cos 60^\circ - Q = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A + M + F \cos 60^\circ \cdot 1,5 - Q \cdot 1,67 = 0, \quad (3)$$

де момент сили \vec{F} відносно точки A визначений на підставі теореми про момент рівнодійної системи сил (див. параграф 1.5).

З рівняння (1) знайдемо

$$X_A = -F \sin 60^\circ = -6 \cdot 0,866 = -5,2 \text{ (кН)}.$$

Змінюємо напрям \vec{X}_A на протилежний (рис. 4.19).

З рівняння (2) знайдемо

$$Y_A = Q - F \cos 60^\circ = \frac{2 \cdot 2,5}{2} - 6 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ (кН)}.$$

Змінюємо напрям \vec{Y}_A на протилежний (рис. 4.19).

З рівняння (3) знайдемо

$$\begin{aligned} M_A &= -M - F \cos 60^\circ \cdot 1,5 + Q \cdot 1,67 = \\ &= -20 - 6 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + \frac{2 \cdot 2,5}{2} \cdot 1,67 = -20,3 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Змінюємо напрям моменту пари M_A на протилежний (рис. 4.19).

Дійсний напрям сил \vec{X}_A , \vec{Y}_A та пари сил з моментом M_A подано на рис. 4.19.

Приклад 4.7. Визначити реакції опор A , B , C і шарніра D балки, складеної з двох частин ABD та DC (рис. 4.20). Вагою балки знехтувати.

Розв'язання. У задачі слід визначити реакції опор A , B , C і шарніра D . Задача належить до задач, в яких розглядається

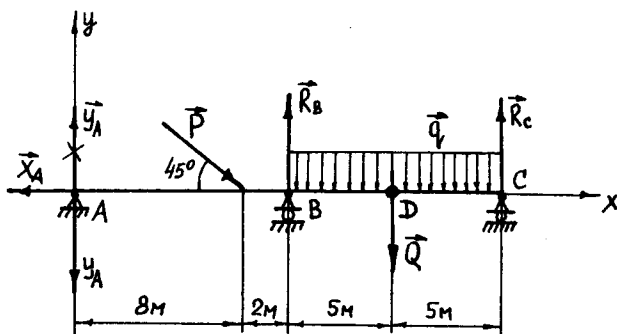


Рис. 4.20

рівновага системи твердих тіл. Способи розв'язання цих задач розглянуті в параграфі 2.3 (приклад 2.6). Розглянемо розв'язання цієї задачі обома способами.

Спосіб 1. Щоб визначити невідомі сили, розглянемо рівновагу балки ABC у цілому та рівновагу частини DC цієї балки (рис. 4.20, 4.21). Аналізуємо в'язі. Для балки ABC зовнішніми в'язями є шарнірно-нерухома опора A та шарнірно-рухомі опори B, C . Звільняємо балку ABC від зовнішніх в'язей (рис. 4.20).

До балки ABC прикладені сили \vec{P}, \vec{Q} (рівнодійна рівномірно розподілених сил [див. приклад 4.5]), $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$ та \vec{R}_C , що утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці A (рис. 4.20) та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил:

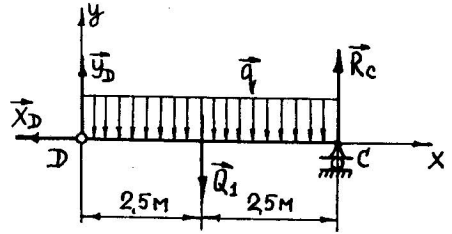


Рис. 4.21

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad P \cos 45^\circ - X_A = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad Y_A - P \sin 45^\circ + R_B - Q + R_C = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) &= 0; \quad -P \sin 45^\circ \cdot 8 + R_B \cdot 10 - Q \cdot 15 + R_C \cdot 20 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де момент сили \vec{P} відносно точки A визначений на підставі теореми про момент рівнодійної системи сил.

Роз'єднаємо балку ABC по внутрішній в'язі (шарнір D) на дві частини та розглянемо рівновагу частини DC (рис.4.21). На частину DC діють сила \vec{Q}_1 , що замінює розподілені сили, реакція опори $C(\vec{R}_C)$ та сили \vec{X}_D, \vec{Y}_D , що є реакціями частини балки ABD , тобто це сили, з якими частина балки ABD діє на частину DC . Сили утворюють довільну плоску систему сил.

Побудуємо систему координат з початком у точці D (рис. 4.21) та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad -X_D = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad Y_D - Q_1 + R_C = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) &= 0; \quad R_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 2,5 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $Q_1 = q \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$ (кН).

Розв'язуючи системи рівнянь (1)—(2), знайдемо $X_A = 2,83$ кН; $Y_A = -4,47$ кН (змінюємо напрям \vec{Y}_A на протилежний [рис. 4.20]);

Дійсний напрям реакцій подано на рис. 4.20 та 4.21.

Спосіб 2. Роз'єднуємо балку на дві частини і до кожної частини прикладаємо активні сили та реакції зовнішніх та внутрішніх в'язей (рис. 4.21 та 4.22). Сили, що діють на кожну з частин балки, утворюють довільну плоску систему сил. Складемо рівняння рівноваги сил, що діють на кожну частину балки.

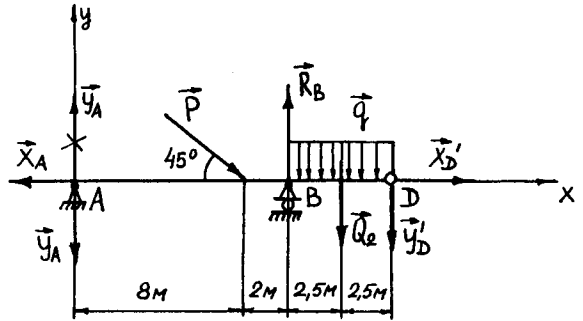


Рис. 4.22

Частина ABD (рис. 4.22):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad P \cos 45^\circ - X_A + X'_D = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad Y_A - P \sin 45^\circ + R_B - Q_2 - Y'_D = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) &= 0; \quad -P \sin 45^\circ \cdot 8 + R_B \cdot 10 - Q_2 \cdot 12,5 - Y'_D \cdot 15 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де $Q_2 = q \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$ (кН).

Частина DC (рис. 4.21):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad -X_D = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad Y_D - Q_1 + R_C = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) &= 0; \quad R_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 2,5 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де $Q_1 = q \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$ (кН).

Оскільки реакції шарніра D попарно рівні за модулем та напрямлені в протилежні сторони, маємо

$$X_D = X'_D; \quad Y_D = Y'_D \quad (5)$$

Розв'язуючи системи рівнянь (3)—(4) і враховуючи рівності (5), знайдемо: $X_A = 2,83$ кН; $Y_A = -4,47$ кН (змінюємо напрям \vec{Y}_A на протилежний [рис. 4.22]); $R_B = 22,3$ кН; $R_C = 5$ кН; $Y_D = 5$ кН; $X_D = 0$.

Дійсний напрям реакцій подано на рис. 4.21 та 4.22.

Приклад 4.8. Визначити реакції опор балки, зображеної на рис. 4.23. До балки прикладені рівномірно розподілені сили інтенсивністю $q = 4$ кН/м. Вагою балки знехтувати.

Розв'язання. Спочатку треба визначити реакції опор A та B балки. Аналізуємо в'язі, накладені на балку. Маємо два види в'язей: жорстке защемлення та шарнірно-рухома опора. Звільняємо балку від в'язей. Реакцію опори A подаємо двома складовими: силою \bar{Y}_A та парою з моментом M_A (рис. 4.23). Третя складова жорсткого защемлення (горизонтальна реакція \bar{X}_A) дорівнює нулю, оскільки навантаження на балку (вертикальні рівномірно розподілені сили) не може викликати горизонтальну реакцію цієї опори.

До балки прикладені сили \bar{Q} (рівнодійна рівномірно розподілених сил), \bar{Y}_A , \bar{Y}_B та пара сил з моментом M_A , що утворюють плоску систему паралельних сил (оскільки пару сил, яка складається з двох паралельних сил, на підставі розглянутих в параграфі 3.4 властивостей пар сил можна повернути так, щоб сили пари були паралельні силам \bar{Y}_A , \bar{Y}_B та \bar{Q}).

Побудуємо систему координатних осей з початком у точці A (рис. 4.23) та складемо рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил у вигляді рівнянь (4.12):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) &= 0; \quad Y_B l - Q \frac{l}{2} + M_A = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) &= 0; \quad -Y_A l + Q \frac{l}{2} + M_A = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Система двох рівнянь (1) містить три невідомі, тобто число невідомих сил перевищує число рівнянь рівноваги, складених для їх визначення. Такі задачі називають статично невизначеними. В'язі, які статично визначену задачу перетворюють на статично невизначену, називаються *зайвими в'язями*. Число зайвих в'язей визначає ступінь статичної невизначеності. У нашому випадку задача один раз статично невизначена.

Якщо до рівнянь системи (1) додати ще одне рівняння, що виявляє зв'язок між активними силами, які діють на балку, та реакціями в'язей, то задача може бути розв'язана. На підставі моделі абсолютно твердого тіла це зробити неможливо. Статично невизначені задачі розв'язуються на підставі іншої моделі — ідеально пружного тіла.

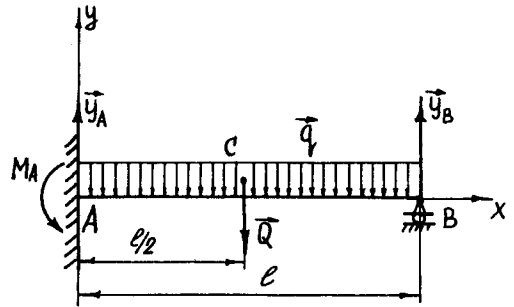


Рис. 4.23

Наведемо найпростіший спосіб розв'язання цієї задачі¹, розглядаючи балку як ідеально пружне тіло, деформація якого мала та підпорядковується закону Гука.

Складемо рівняння, що виявляє зв'язок між реакцією Y_B та інтенсивністю q рівномірно розподілених сил, що діють на балку. Для цього застосуємо метод порівняння деформацій.

Уявно відкинемо опору B (рис. 4.24, *a*). Оскільки балка — пружне тіло, то під дією розподілених сил вона здобуде деформацію згину (пунктирна лінія на рис. 4.24, *a*). Переріз балки над опорою B займе нове положення, що визначається точкою B' . Оскільки деформація балки мала, то точка B' розміщена на перпендикулярі до осі балки.

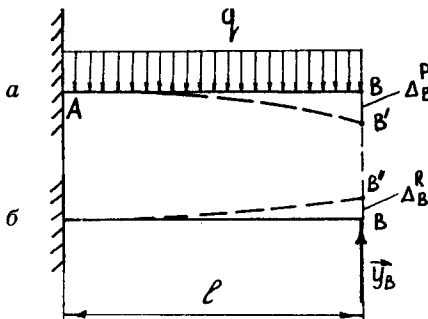


Рис. 4.24

Відстань $BB' = \Delta_B^P$ називається прогином балки у перерізі B від навантаження.

Тепер розглянемо деформацію балки під дією сили реакції \bar{Y}_B , що виникає в опорі B . Відстань $BB'' = \Delta_B^R$ називається прогином балки у перерізі B від реакції \bar{Y}_B (рис. 4.24, *б*).

Оскільки переріз B балки розміщений над опорою балки, то очевидно, що прогин цього перерізу дорівнює нулю (рис. 4.23). Звідси випливає, що

$$\Delta_B^P + \Delta_B^R = 0, \quad (2)$$

або

$$\Delta_B^P = \Delta_B^R.$$

З курсу “Опір матеріалів” відомо, що $\Delta_B^P = \frac{ql^4}{8EJ}$, а $\Delta_B^R = \frac{Y_B l^3}{3EJ}$, де E — механічна характеристика матеріалу, з якого виготовлена балка (модуль пружності); J — геометрична характеристика поперечного перерізу балки (момент інерції перерізу балки відносно нейтральної осі). Підставляючи значення Δ_B^P та Δ_B^R у рівність (2), здобудемо

$$\frac{ql^4}{8EJ} = \frac{Y_B l^3}{3EJ}.$$

Звідси

$$Y_B = \frac{3}{8} ql = \frac{3}{8} Q. \quad (3)$$

Рівність (3) і є шуканим рівнянням.

¹ Докладніші відомості про розв'язання подібних статично невизначених задач можна знайти у курсі “Опір матеріалів”.

Підставляючи рівність (3) у рівняння (1), знайдемо

$$M_A = \frac{Ql}{2} - \frac{3Ql}{8} = \frac{4Ql - 3Ql}{8} = \frac{Ql}{8};$$

$$Y_A = \frac{Ql}{2l} + \frac{Ql}{8l} = \frac{4Q + Q}{8} = \frac{5}{8}Q.$$

Приклад 4.9. Трос, вага одиниці довжини якого $q = 100$ Н/м, підвішений до точок A та B (рис. 4.25). Визначити рівняння кривої провисання троса, мінімальну та максимальну силу натягу та довжину троса вздовж кривої провисання, якщо $l = 30$ м; $f = 2,5$ м; $h = 3$ м.

Розв'язання. Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O троса (нижня точка кривої провисання троса); вісь x напрямляємо горизонтально праворуч, а вісь y — вертикально вгору (рис. 4.26).

На рис. 4.26 видно, що $f_1 = f = 2,5$ м; $f_2 = h + f_1 = 3 + 2,5 = 5,5$ м. Згідно з формулою (4.25) рівняння кривої провисання троса має вигляд

$$y = \frac{qx^2}{2H}. \tag{1}$$

Це рівняння параболи, що має вертикальну вісь та вершину у точці O . Визначимо мінімальне значення сили натягу H на підставі формули (4.29):

$$H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_2} \pm \sqrt{f_1})^2} = \frac{100 \cdot 30^2}{2(\sqrt{5,5} + \sqrt{2,5})^2} = 2926,8 \text{ (Н)},$$

де перед другим коренем — знак “+”, оскільки вершина параболи лежить між опорами A та B .

Тоді рівняння (1) набирає вигляду

$$y = \frac{q}{2H} x^2 = \frac{100}{2 \cdot 2926,8} x^2 = 0,01708x^2.$$

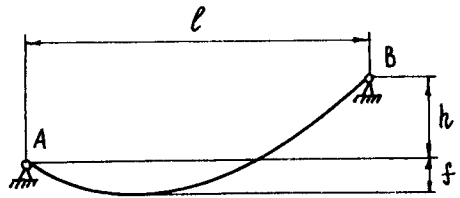


Рис. 4.25

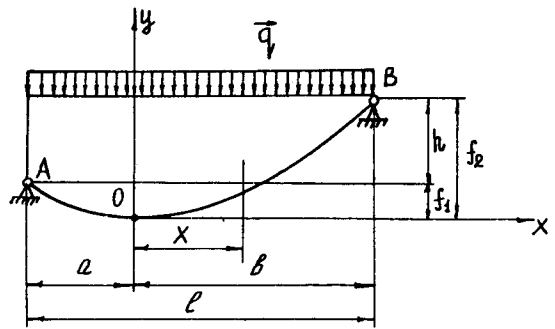


Рис. 4.26

За формулами (4.30) визначимо сили натягу троса в точках A та B :

$$T_A = \sqrt{H^2 + q^2 a^2} = \sqrt{2926,8^2 + 100^2 \cdot 12,1^2} = 3,167 \text{ (Н)};$$

$$T_B = \sqrt{H^2 + q^2 b^2} = \sqrt{2926,8^2 + 100^2 \cdot 17,9^2} = 3430,8 \text{ (Н)},$$

де $a = 12,1$ м, $b = 17,9$ м [визначені за формулами (4.27)].

Отже, максимальне значення сили натягу троса

$$T_B = 3430,8 \text{ Н.}$$

Довжину троса за кривою провисання знайдемо, якщо проінтегруємо рівняння (4.25а):

$$\begin{aligned} L = S_1 + S_2 &= \int_0^b \left(1 + \frac{32f_2 x^2}{l^4} \right) dx + \left(-\int_0^a \left(1 + \frac{32f_1 x^2}{l^4} \right) dx \right) = \\ &= b + \frac{32f_2 b^3}{3l^4} + a + \frac{32f_1 a^3}{l^4} = b + a + \frac{32}{3l^4} (f_2 b^3 + f_1 a^3) = \\ &= 17,9 + 12,1 + \frac{32}{3 \cdot 30^4} (5,5 \cdot 17,9^3 + 2,5 \cdot 12,1^3) = 30,5 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Приклад 4.10. Канат несе навантаження, що рівномірно розподілене вздовж прольоту $l = 6$ м (рис. 4.27). Інтенсивність навантаження $q = 1500$ Н/м. Визначити максимальне значення натягу каната, якщо натяг у точці B більший за натяг у точці A у два рази.

Розв'язання. Припускаємо, що крива провисання каната збігається з другою формою провисання нитки на рис. 4.7, тобто вершина параболи розміщена ліворуч від опори A рис. 4.28.

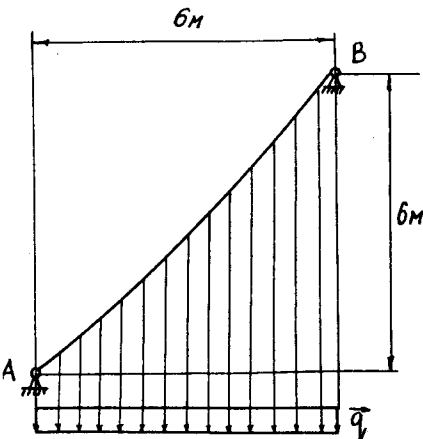


Рис. 4.27

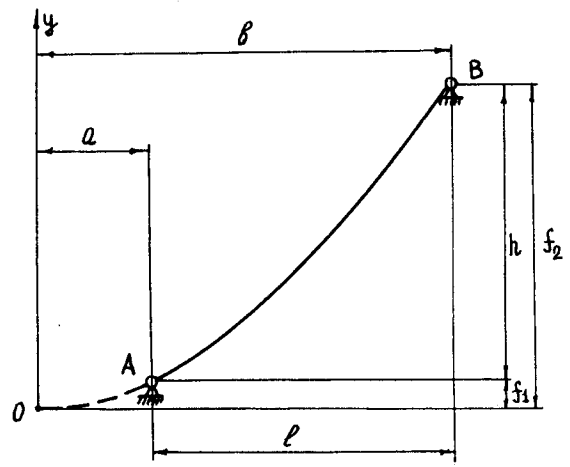


Рис. 4.28

З рис. 4.28 випливають рівності

$$b = a + l = a + 6; \quad (1)$$

$$f_2 = h + f_1 = 6 + f_1. \quad (2)$$

Оскільки натяг каната у точці B у два рази більший за натяг у точці A , то на підставі формули (4.30)

$$\sqrt{H^2 + q^2 b^2} = 2\sqrt{H^2 + q^2 a^2}.$$

Підставляючи в цю рівність значення b , що дає формула (1), здобудемо

$$H^2 + q^2 a^2 - 4q^2 a - 12q^2 = 0. \quad (3)$$

На підставі формул (4.27)

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H}; \quad f_2 = \frac{qb^2}{2H} = \frac{q(a+6)^2}{2H}. \quad (4)$$

Підставляючи рівності (4) в рівняння (2), здобудемо

$$\frac{qa}{H} + \frac{3q}{H} = 1. \quad (5)$$

З рівняння (5) визначаємо

$$H = q(a+3). \quad (6)$$

Підставляючи значення H у рівняння (3), одержуємо квадратне рівняння

$$2a^2 + 2a - 3 = 0. \quad (7)$$

Звідси

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+6}}{2}.$$

Отже, маємо два значення a .

Знаходимо від'ємне значення, тобто $a = -1,823$ м. Оскільки $a < 0$, то крива провисання каната набирає першої форми (рис. 4.7).

З рівняння (6) визначаємо

$$H = q(a+3) = 1500(-1,823+3) = 1765,6 \text{ (Н)}.$$

На підставі формул (4.30) визначаємо T_A та T_B :

$$T_A = \sqrt{H^2 + q^2 a^2} = \sqrt{1765,6^2 + 1500^2 (-1,823)^2} = 3254,9 \text{ (Н)};$$

$$T_B = \sqrt{H^2 + q^2 b^2} = \sqrt{1765,6^2 + 1500^2 \cdot 4,18^2} = 6509,4 \text{ (Н)}.$$

На підставі формул (4) та (3) визначаємо f_1 та f_2 :

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H} = \frac{1500(-1,823)^2}{2 \cdot 1765,5} = 1,41 \text{ (м)};$$

$$f_2 = h + f_1 = 6 + 1,41 = 7,41 \text{ (м)}.$$

Знаходимо додатне значення, тобто $a = 0,823$ м. Оскільки $a > 0$, то крива провисання каната набирає другої форми (рис. 4.7). Максимальне значення натягу каната при цьому

$$T_B = \sqrt{H^2 + q^2(a+b)^2} = \sqrt{5734,5^2 + 1500^2 \cdot 6,823^2} = 11731,6 \text{ (Н)},$$

$$\text{де } H = q(a+3) = 1500(0,823+3) = 5734,5 \text{ (Н)}.$$

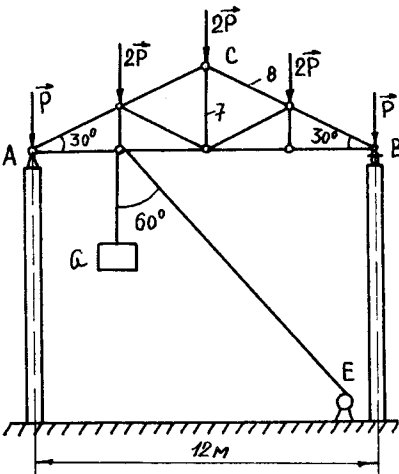


Рис. 4.29

Приклад 4.11. Для монтажу обладнання продуктового цеху цукрового заводу використовується ферма перекриття цеху за схемою, поданою на рис. 4.29. Визначити, як змінюються зусилля в стрижнях 7 та 8 ферми при підніманні вантажу, вага якого $G = 80$ кН, якщо розрахункові зусилля в стрижнях від навантаження $P = 100$ кН відповідно $S_7 = 200$ кН (стрижень розтягується), $S_8 = 400$ кН (стрижень стискається). Розмірами та вагою блока знехтувати.

Розв'язання. Перевіряємо, чи є ферма статично визначеною. Число вузлів $n = 8$, число стрижнів $N = 13$. Підставляючи ці значення у формулу (4.31), здобудемо $2 \cdot 8 - 3 = 13$, тобто тотожність. Ферма статично визначена. Визначаємо реакції опор ферми, які виникають при підніманні вантажу G . Ферма та додаткове на ферму навантаження подано на рис. 4.30.

Аналізуємо в'язі, накладені на ферму. Маємо два види в'язей: шарнірно-рухома та шарнірно-нерухома опори. Звільняємо ферму від в'язей. На ферму діють сили, що утворюють довільну плоску систему сил. Складаємо рівняння рівноваги цієї системи сил:

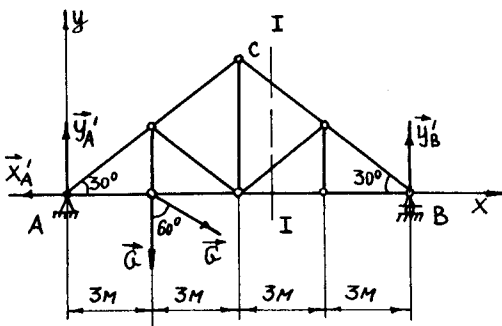


Рис. 4.30

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -X'_A + G \sin 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y'_A + Y'_B - G - G \cos 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad Y'_B \cdot 12 - G \cdot 3 - G \cos 60^\circ \cdot 3 = 0, \quad (3)$$

де момент сили \vec{G} (сила, що відхилена від вертикалі) визначений на підставі теореми про момент рівнодійної системи сил (див. параграф 1.5).

З рівняння (1), (2) та (3) визначаємо:

$$X'_A = G \sin 60^\circ = 80 \cdot 0,806 = 69,3 \text{ (кН)};$$

$$Y'_A = G + G \cos 60^\circ - Y'_B = 80 + 80 \cdot 0,5 - 30 = 90 \text{ (кН)};$$

$$Y'_B = \frac{G \cdot 3 + G \cos 60^\circ \cdot 3}{12} = \frac{80 \cdot 3 + 80 \cdot 0,5 \cdot 3}{12} = 30 \text{ (кН)}.$$

Дійсний напрям реакцій \vec{X}'_A , \vec{Y}'_A та \vec{Y}'_B подано на рис. 4.30.

Для визначення зусилля в стрижні 8 від додаткового навантаження застосуємо спосіб перерізів (див. параграф 4.5). Проводимо переріз I—I (рис. 4.30). Розглянемо рівновагу правої частини ферми (рис. 4.31). Припускаючи, що перерізані стрижні розтягнені, напрямляємо їх від перерізів. Складаємо рівняння рівноваги, тобто рівняння алгебричної суми моментів відносно точки M:

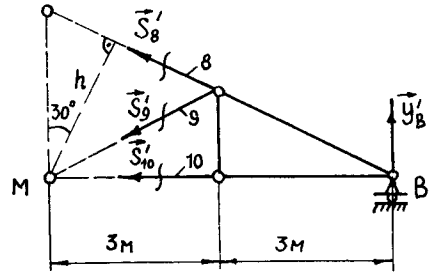


Рис. 4.31

$$\sum_{k=1}^n M_M(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y'_B \cdot 6 - S'_8 \cdot h = 0,$$

де $h = \frac{6 \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 6 \text{ (м)}$.

З рівняння визначаємо

$$S'_8 = -\frac{Y'_B \cdot 6}{h} = -\frac{30 \cdot 6}{6} = -30 \text{ (кН)}.$$

Стрижень 8 стискається. Додаткове зусилля в стрижні 8 дорівнює 30 кН, що становить 7,5 % від розрахункового зусилля від навантаження P.

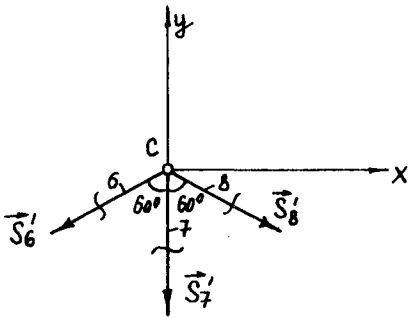


Рис. 4.32

Щоб визначити зусилля в стрижні 7, вирізуємо вузол С (рис. 4.29 і 4.32) та складаємо рівняння рівноваги сил, що діють на вузол:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S'_8 \sin 60^\circ - S'_6 \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -S'_7 + S'_8 \cos 60^\circ - S'_6 \cos 60^\circ = 0.$$

З рівнянь визначаємо:

$$S'_6 = -S'_8; \quad S'_7 = S'_8 \cos 60^\circ + S'_6 \cos 60^\circ = 2S'_8 \cos 60^\circ = 2 \cdot 30 \cdot 0,5 = 30 \text{ (кН)}.$$

Стрижень 7 розтягується. Додаткове зусилля у стрижні 7 дорівнює 30 кН, що становить 15 % від розрахункового зусилля від навантаження P .

Запитання для самоперевірки

1. Яка система сил, прикладених до твердого тіла, називається довільною плоскою системою?
2. Якими є розв'язки першої основної задачі статичної твердого тіла для довільної плоскої системи сил?
3. Що таке алгебрична величина моменту сили відносно точки?
4. Що таке алгебрична величина моменту пари сил?
5. У чому сутність механічних умов рівноваги довільної плоскої системи сил?
6. Які є аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил?
7. Які допущення приймають при визначенні сил натягу важкої підвішеної нитки?
8. У чому сутність точного і наближеного розрахунку сил натягу важкої підвішеної нитки?
9. Назвіть основні форми провисання важкої нитки, яка закріплена у двох точках, що лежать на різних рівнях.
10. Яка конструкція називається фермою?
11. Як визначається кількість стрижнів незмінної внутрішньо статично визначеної ферми?
12. На які опори має спиратися ферма, щоб бути зовнішньо визначеною?
13. Що розуміють під розрахунком ферми?
14. Які допущення приймають при розрахунках ферми?
15. Які є методи розрахунку ферм?
16. У чому полягає метод вирізування вузлів?
17. У чому полягає метод перерізів?
18. Що таке статично невизначені балки?
19. У чому полягає найпростіший спосіб визначення реакцій зайвих в'язей один раз статично невизначених балок?

Глава 5

ТЕРТЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

5.1. Поняття про силу тертя ковзання. Кут тертя. Конус тертя. Кут природного укусу

Як було визначено в параграфі 1.1, матеріальні об'єкти, які розташовані у різних частинах простору, взаємодіють між собою. Теоретична механіка не вивчає фізичну природу цих взаємодій, а вводить у розгляд їх механічну модель — силову взаємодію. Силова взаємодія при прямому контакті матеріальних об'єктів безпосередньо пов'язана з поняттям в'язей, тобто матеріальних об'єктів, які, взаємодіючи з даним тілом, обмежують свободу його руху. В'язі, обмежуючи рух тіла, змінюють стан його руху, який би був, якби тіло було вільним, тобто в'язі є джерелом сил, прикладених до тіла. Ці сили називаються *реакціями в'язей*.

Дуже часто при розв'язанні задач механіки трапляються випадки, коли рух даного тіла обмежується матеріальним об'єктом, поверхня якого вилучає ті частини простору, куди дане тіло не може проникнути. У цьому випадку в'яззю є поверхня цього матеріального об'єкта.

Реакція в'язі \vec{R} , що зумовлена наявністю поверхні деякого тіла, завжди напрямлена в ту частину простору, яка вільна від речовини в'язі (рис. 5.1). Розкладемо реакцію \vec{R} за двома напрямками, тобто вздовж перпендикуляра до поверхні та вздовж дотичної до поверхні. Маємо дві сили реакції: силу \vec{N} , що називається *нормальною реакцією*, та силу \vec{F}^T . Ця складова реакції \vec{R} називається *силою тертя*. Іноді сила

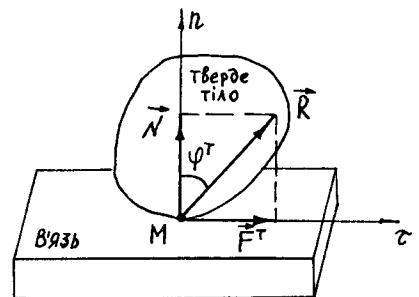


Рис. 5.1

тертя виявляється відносно малою і нею нехтують. Тоді поверхню в'язі розглядають як ідеально гладеньку. У цьому разі беруть до уваги тільки нормальну складову реакцію \vec{R} (див. параграф 1.8) — в'язь “гладенька поверхня”.

Тертя, яке виникає при безпосередньому контакті матеріальних тіл, є складним фізичним явищем, що супроводжується нагрівом тіл, їх електризацією, руйнуванням поверхонь контакту, дифузією речовини і т. ін. Явище тертя можна уявити як вдавлювання, яке супроводжується зчепленням бугорків шорсткості одного з тіл у проміжках між бугорками другого, що спричинює деформацію, а іноді й руйнування цих бугорків. Вивчення усіх особливостей явища тертя виходить за рамки курсу теоретичної механіки. В теоретичній механіці при врахуванні сили тертя спираються на ряд установлених дослідами загальних закономірностей, які відображають основні особливості явища тертя. Ці закономірності називаються **законами тертя ковзання Кулона¹ при спокої** і формулюються так:

1. При намаганні зрушити одне тіло по поверхні другого у площині стикування тіл виникає сила тертя (або сила зчеплення), величина якої може мати значення від нуля до $F_{\text{гп}}^T$ — граничної сили тертя.

Сила тертя напрямлена у протилежний бік від того, куди активні сили намагаються зрушити тіло.

2. Величина граничної сили тертя дорівнює добутку статичного коефіцієнта тертя на нормальну реакцію:

$$F_{\text{гп}}^T = fN. \quad (5.1)$$

Статичний коефіцієнт тертя f — безрозмірна величина, що визначається дослідним шляхом. Коефіцієнт f залежить від матеріалу стискних тіл і стану їх поверхонь (характер обробки, температура, вологість, змащення тощо).

3. Величина граничної сили тертя у широких межах не залежить від розмірів поверхонь, що стискаються при терті.

Отже, при рівновазі сила тертя спокою $F^T \leq F_{\text{гп}}^T$, або

$$F^T \leq fN. \quad (5.2)$$

Фізичний зміст нерівності (5.2) можна пояснити так. Якщо уявити, що на тіло діє активна сила, яка намагається зрушити це тіло вздовж поверхні другого тіла і величина якої поступово збільшується від нульового значення, то ця сила спричинюватиме невидиму для ока поступово зростаючу деформацію зсуву тертьових поверхонь. Якщо величина активної сили досягне значення, що дорівнює граничній силі тертя спокою, то надалі починається вже видимий рух одного тіла відносно другого.

¹ Шарль Огюстен Кулон (1736—1806) — французький фізик, член Паризької академії наук.

Експериментально статичний коефіцієнт тертя визначається за допомогою прибору, що називається трибометром. Прибор складається з горизонтальної плити AB і прямокутного бруса D (рис. 5.2). Плита та брус виготовляються з матеріалів, для яких визначається коефіцієнт тертя.

На брус D діє сила ваги \vec{P} , яка зрівноважується нормальною реакцією \vec{N} , і сила \vec{Q} , що намагається його зрушити. Сила \vec{Q} у стані спокою бруса D зрівноважується силою тертя \vec{F}^T .

Поступово збільшуючи силу \vec{Q} , знаходимо навантаження \vec{Q}^* , за якого брус починає рух уздовж плити. Очевидно, гранична сила тертя $F_{rp}^T = Q^*$. Тоді, оскільки $N = P$, за формулою (5.1) знаходимо

$$f = \frac{F_{rp}^T}{N} = \frac{Q^*}{P}. \quad (5.3)$$

Зауважимо, що поки брус D перебуває у стані спокою, сила тертя F^T дорівнює силі Q , а не величині $F_{rp}^T = fN$. Значення fN сила тертя набуває тільки тоді, коли положення рівноваги бруса D буде граничним.

Статичний коефіцієнт тертя (тертя без змащення) f для деяких матеріалів такий:

сталь по сталі	0,15;
сталь по чавуну	0,3;
сталь по бронзі	0,15;
дерево по дереву	0,4...0,6.

Докладніші відомості про величину статичного коефіцієнта тертя містяться у технічних довідниках.

Під час руху тіл сила тертя напрямлена у бік, що є протилежним руху тіл, і дорівнює добутку динамічного коефіцієнта тертя на нормальну реакцію:

$$F^T = f_d N. \quad (5.4)$$

Динамічний коефіцієнт тертя ковзання f_d також є безрозмірною величиною і визначається дослідним шляхом. Значення f_d залежить не тільки від матеріалу і стану поверхонь, що стискаються, а й від швидкості відносного руху тіл. Для багатьох матеріалів f_d зменшується зі збільшенням відносної швидкості, досягаючи за великих швидкостей деякого сталого значення. У деяких випадках, наприклад при терті шкіри по сталі або чавуну, коефіцієнт f_d збільшується зі зростанням швидкості. На цьому ґрунтується дія пасових передач.

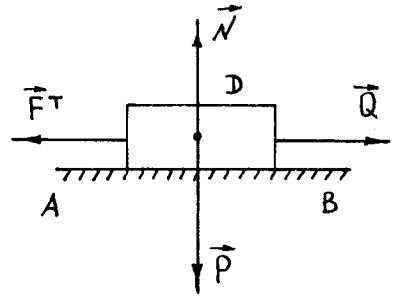


Рис. 5.2

При врахуванні тертя між тілами окрім коефіцієнта тертя важливу роль відіграє також кут тертя. Якщо тіло, що перебуває у стані рівноваги, спирається на нерухому поверхню, то сила \vec{R} є рівнодійною сил \vec{N} та \vec{F}^T , тобто повною реакцією шорсткої опорної поверхні у точці M (див. рис. 5.1). Кут φ^T між силою \vec{R} та нормаллю n до поверхні називається *кутом тертя*.

З прямокутного трикутника маємо

$$\operatorname{tg} \varphi^T = \frac{F_{\text{сп}}^T}{N} = \frac{fN}{N} = f, \quad (5.5)$$

тобто тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя.

Назва кута φ^T кутом тертя пояснюється так. Залежно від матеріалу і характеру поверхонь в'язі та даного тіла можна, маючи значення коефіцієнта тертя f , визначити такий кут φ^T , коли нахил активної сили, прикладеної до тіла, до нормалі буде менший за кут φ^T ; тоді якою б не була ця сила за величиною, тіло буде перебувати у стані спокою відносно поверхні в'язі.

Залежно від дії активних сил напрям повної реакції опорної шорсткої поверхні \vec{R} може змінюватися. Геометричним місцем усіх можливих напрямів граничної реакції \vec{R} є поверхня конуса. Цей конус називається *конусом тертя* (рис. 5.3). Якщо коефіцієнт тертя f у всіх напрямках однаковий, то, згідно з формулою (5.5), конус тертя буде круговим. У випадках, коли f залежить від напрямку можливого руху тіла вздовж в'язі, конус тертя не буде круговим.

Простір усередині конуса тертя утворює область тертя. Ця область має таку властивість: якою б великою за інтенсивністю не була активна сила \vec{Q} , лінія дії якої розташована всередині цієї області, вона не може привести в рух тіло, що спирається на поверхню в'язі (рис. 5.3). Наявністю області тертя пояснюється явище заклинювання, або, як кажуть, заїдання частин машин, тобто коли ніякою силою, що прикладена всередині конуса тертя, неможливо зрушити з місця відповідну частину машини.

Прикладена сила збільшує нормальну реакцію, яка, у свою чергу, спричинює збільшення сили тертя, і, таким чином, прикладеної сили виявляється недостатньо, щоб подолати опір тертя.

Як відомо з досвіду, сипкі тіла при насипанні утворюють конусні поверхні. Найбільший кут α , який утворює бічна поверхня такого конуса з горизонтальною площиною (рис. 5.4, а), називається *кутом природного укосу*. Знайдемо цей кут. Щоб це зробити, припустимо, що коефіцієнт тертя f між частинками сипких тіл відомий.

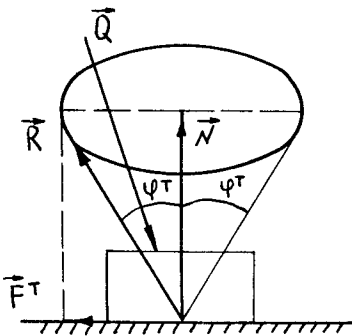


Рис. 5.3

Розглянемо умову граничної рівноваги частинки M сипкого тіла на бічні поверхні конуса. Цей граничний стан рівноваги, очевидно, відповідає найбільшому значенню кута нахилу бічної поверхні конуса до горизонту.

На частинку M діють три сили: вага \vec{P} , нормальна реакція поверхні конуса \vec{N} та сила тертя \vec{F}^T . При рівновазі частинки M силовий трикутник із сил, що діють на частинку, буде замкненим (рис. 5.4, б).

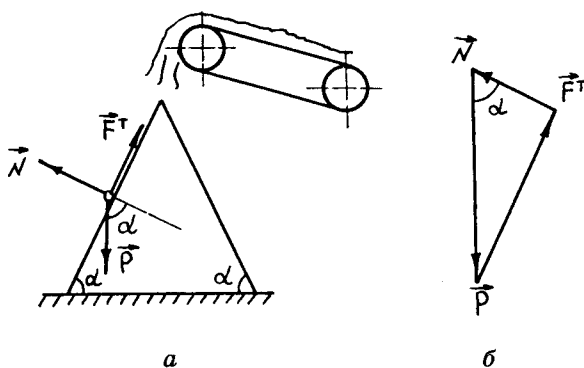


Рис. 5.4

Із силового трикутника маємо

$$F^T = N \operatorname{tg} \alpha,$$

або на підставі рівностей (5.1) та (5.5)

$$\operatorname{tg} \varphi^T = \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.6)$$

Звідси $\alpha = \varphi^T$, тобто кут природного укосу дорівнює куту тертя.

5.2. Тертя гнучких тіл

Нехай гнучке тіло, наприклад трос, охоплює нерухомий коловий циліндр. Необхідно визначити силу натягу троса \vec{P} , що зрівноважує силу \vec{Q} , прикладену до другого кінця троса, якщо між тросом та циліндром має місце тертя (рис. 5.5). Цю задачу може бути розв'язано, якщо розглянемо граничну рівновагу троса, тобто стан, за якого сила \vec{Q} вже здатна спричинити ковзання троса по нерухомому циліндру.

Припустимо, що нормальний тиск троса на поверхню циліндра та сила тертя між тросом і поверхнею циліндра неперервно розподілені по довжині дуги охоплення циліндра тросом $\varphi^* R$, тобто вони утворюють системи рівномірно розподілених сил. Позначимо через \bar{q}_N та \bar{q}_T інтенсивність розподілу цих сил уздовж дуги охоплення циліндра тросом.

Виділимо елемент троса довжиною $dS = R d\varphi$ (рис. 5.6). На елемент діють сили $\bar{q}_N dS$ (рівнодійна нормальних реакцій поверхні циліндра),

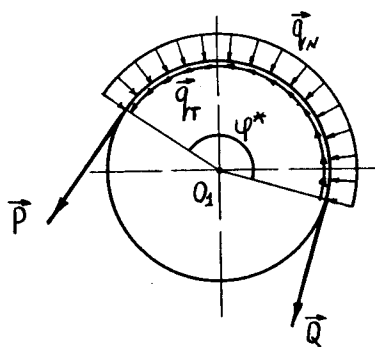


Рис. 5.5

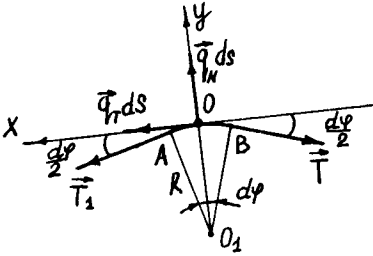


Рис. 5.6

$\bar{q}_T dS$ (рівнодійна сил тертя), $\bar{T}_1 = \bar{T} + d\bar{T}$ (сила натягу троса у точці A) та \bar{T} (сила натягу троса у точці B). Вагою елемента троса нехтуємо. Сили утворюють плоску збіжну систему сил.

Побудуємо систему координатних осей з початком у точці O (рис. 5.6) та складемо рівняння рівноваги плоскої збіжної системи сил, що діють на елемент:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad T_1 \cos \frac{d\varphi}{2} + q_T dS - T \cos \frac{d\varphi}{2} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad q_N dS - T_1 \sin \frac{d\varphi}{2} - T \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Через те що при малих кутах $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$, $\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$, рівняння рівноваги набирають вигляду

$$T_1 + q_T dS - T = 0;$$

$$q_N dS - T_1 \frac{d\varphi}{2} - T \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Підставляючи у ці рівняння замість T_1 та dS їх значення $T_1 = T + dT$, $dS = R d\varphi$ та нехтуючи малими вищого порядку, знайдемо:

$$\frac{dT}{d\varphi} + q_T R = 0;$$

$$q_N R - T = 0.$$

З другого рівняння знаходимо

$$T = q_N R.$$

Оскільки розглядається гранична рівновага, то

$$q_T dS = q_N dS f,$$

або

$$q_T = q_N f.$$

Тоді перше рівняння матиме вигляд

$$dT = -T f d\varphi,$$

або

$$\frac{dT}{T} = -f d\varphi.$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = -f \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi^*} d\varphi, \text{ або } \ln \frac{P}{Q} = -f\varphi^*.$$

Межі інтегрування прийнятні, бо натяг троса у точці, де $\varphi = 0$, дорівнює Q , а у точці, де $\varphi = \varphi^*$, — відповідно P .

Остаточо маємо

$$P = Qe^{-f\varphi^*}. \quad (5.7)$$

Вираз (5.7) (формула Ейлера) дає можливість визначити найменшу силу \bar{P} , що здатна зрівноважити силу \bar{Q} .

Якщо розв'язується обернена задача, тобто визначається сила \bar{P} , яка здатна подолати опір тертя разом із силою \bar{Q} , то немає необхідності наново повторювати усі викладки; вони залишаються такими самими з тією лише відмінною, що сили тертя на рис. 5.5 змінюють свій напрям. Тому в остаточному результаті, змінюючи знак при коефіцієнті тертя, здобудемо

$$P = Qe^{f\varphi^*}. \quad (5.8)$$

Отже, якщо величина сили \bar{P} задовольняє нерівності $Qe^{-f\varphi^*} \leq P \leq Qe^{f\varphi^*}$, то трос буде перебувати у стані рівноваги.

5.3. Тертя вертіння

Контакт притиснених матеріальних тіл відбувається завжди по деякій поверхні. Якщо привести одне з контактуючих тіл в обертальний рух відносно другого тіла, то цьому руху будуть чинити опір сили тертя ковзання. Ці сили розподілені по поверхні стикання тіл і визначають у своїй сукупності *тертя вертіння*.

Сукупність сил тертя ковзання при обертанні одного тіла відносно іншого може бути зведена до пари сил — пари тертя вертіння. Ця пара зрівноважується парою активних сил, що прикладена до тіла і намагається обертати це тіло навколо осі, перпендикулярної до поверхні притиснення тіл.

Гранична величина моменту пари тертя вертіння визначається за формулою

$$M_{\text{тр}} = \mu N, \quad (5.9)$$

де μ — коефіцієнт тертя вертіння, що має розмірність довжини; N — нормальна реакція поверхні.

Коефіцієнт тертя вертіння залежить від статичного коефіцієнта тертя ковзання. Наприклад, при стиканні плоскої основи циліндра радіуса r з плоскою поверхнею коефіцієнт тертя вертіння μ може бути визначено за формулою¹

$$\mu = \frac{\pi}{4} fr \approx 0,79fr. \quad (5.10)$$

При більш складних випадках стикання тіл, обмежених поверхнею обертання, з тілами, що обмежені плоскими поверхнями, коефіцієнт μ можна визначити за формулою

$$\mu = \frac{3\pi}{16} fr^* \approx 0,5fr^*,$$

де r^* — радіус кругової площадки, що утворюється при стиканні тіл.

5.4. Тертя кочення

Розглянемо циліндр, що перебуває у стані спокою на горизонтальній площині, коли на нього діють горизонтальна активна сила \vec{Q} , сила ваги \vec{P} , нормальна реакція \vec{N} та сила тертя \vec{F}^T (рис. 5.7). Дослід показує, що циліндр перебуває у стані спокою доти, доки сила \vec{Q} не здобуде деякої скінченної величини. Проте цей факт неможливо пояснити схемою навантаження циліндра, наведеною на рис. 5.7, оскільки сили \vec{Q} і \vec{F}^T утворюють пару, яка здатна спричинити кочення циліндра за будь-якої скільки завгодно малої сили.

Причина цієї невідповідності полягає у тому, що ми, розглядаючи рівновагу циліндра на горизонтальній площині, користувалися моделлю абсолютно твердого тіла, тобто припускали, що контакт циліндра з площиною відбувається у точці C (рис. 5.7). Щоб усунути зазначену невідповідність, необхідно відмовитися від цієї моделі і врахувати, що в дійсності циліндр та площина в околі точки C деформуються і дотикаються один до одного не в одній точці, а по деякій площі контакту CB (рис. 5.8). У результаті нормальна реак-

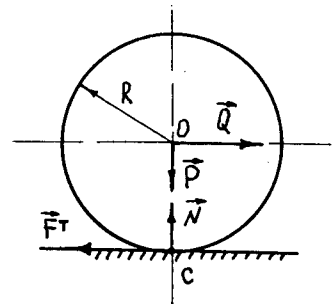


Рис. 5.7

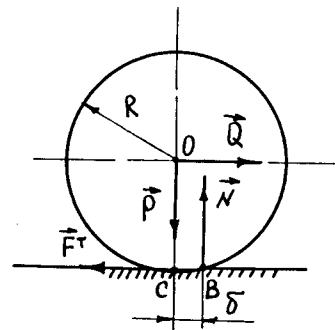


Рис. 5.8

¹ Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1953. — С. 204.

ція \vec{N} зміщується у бік дії сили \vec{Q} . Зі збільшенням \vec{Q} це зміщення зростає до деякої граничної величини δ (рис. 5.8). У граничному стані рівноваги циліндра на нього діють пара сил $(\vec{Q}_{\text{гр}}, \vec{F}^T)$ з моментом $Q_{\text{гр}}R$ та зрівноважувальна її пара сил (\vec{N}, \vec{P}) з моментом $N\delta$. Тоді

$$Q_{\text{гр}}R = N\delta,$$

або

$$Q_{\text{гр}} = \frac{\delta}{R}N. \quad (5.11)$$

При $Q < Q_{\text{гр}}$ циліндр перебуває у спокої; при $Q > Q_{\text{гр}}$ починається кочення циліндра.

Величина δ [рівність (5.11)] називається *коефіцієнтом тертя кочення*. Цей коефіцієнт має розмірність довжини. Значення коефіцієнта δ визначається дослідним шляхом. Величини коефіцієнта тертя кочення δ для деяких матеріалів такі:

сталь по сталі	0,005 см;
дерево по дереву	0,05...0,08 см;
сталь по сталі (у підшипниках)	0,001 см.

Зауважимо, що добуток нормальної реакції N на коефіцієнт тертя кочення δ називається *граничним моментом тертя кочення*, тобто

$$M_{\text{гр}}^T = N\delta. \quad (5.12)$$

5.5. Приклади розв'язання задач з рівноваги твердого тіла з урахуванням сил тертя. Методичні вказівки

Приклад 5.1. Визначити кут α між щоками щокової дробарки (кут захвату), при якому куски матеріалу, що подрібнюються, не виштовхувалися б з дробарки під тиском щік (рис. 5.9). Вагою матеріалу, що подрібнюється, знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо сили, що діють на матеріал при роботі дробарки. На затиснений між щоками дробарки кусок матеріалу діють сили тиску щік \vec{P}_A, \vec{P}_B і сили тертя \vec{F}_1^T та \vec{F}_2^T (рис. 5.9).

Побудуємо систему координатних осей з початком у точці O_1 .

Очевидно, матеріал не буде виштовхуватися з пащі дробарки, якщо сили, що діють на матеріал, утворюватимуть зрівноважену за напрямками осей x та

y систему сил, тобто якщо будуть виконуватися умови $\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0$.

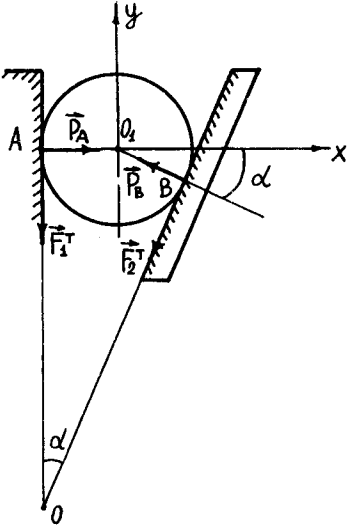


Рис. 5.9

Складемо ці рівняння:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; P_A - P_B \cos \alpha - F_2^T \sin \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; P_B \sin \alpha - F_1^T - F_2^T \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Оскільки розглядається гранична рівновага матеріалу, то $\vec{F}_1^T = fP_A$, $\vec{F}_2^T = fP_B$, де f — статичний коефіцієнт тертя ковзання.

Підставляємо в рівняння (1) і (2) значення \vec{F}_1^T та \vec{F}_2^T :

$$P_A - P_B \cos \alpha - P_B f \sin \alpha = 0; \quad (3)$$

$$P_B \sin \alpha - P_A f - P_B f \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

З рівняння (3) знаходимо

$$P_A = P_B (\cos \alpha + f \sin \alpha). \quad (5)$$

Підставляємо рівність (5) у рівняння (3):

$$P_B \sin \alpha - P_B f (\cos \alpha + f \sin \alpha) - P_B f \cos \alpha = 0,$$

або

$$P_B (\sin \alpha - 2f \cos \alpha - f^2 \sin \alpha) = 0.$$

Звідси, враховуючи, що $P_B \neq 0$, знайдемо

$$\sin \alpha - 2f \cos \alpha - f^2 \sin \alpha = 0. \quad (6)$$

Поділимо рівняння (6) на $\cos \alpha$ та розв'яжемо його відносно α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2f}{1 - f^2}. \quad (7)$$

Оскільки $f = \operatorname{tg} \varphi^T$ [рівність (5.5)], то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi^T}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi^T} = \operatorname{tg} 2\varphi^T.$$

Звідси $\alpha = 2\varphi^T$, де φ^T — кут тертя.

Приклад 5.2. Визначити, за яких значень кута α людина може піднятися по драбині до її кінця B , якщо кут тертя дорівнює φ_0^T (рис. 5.10). Вагою драбини знехтувати.

Розв'язання. Розглядаємо граничне положення рівноваги драбини. Звільняємо драбину від в'язей. На драбину діють у точках A і B реакції шорстких поверхонь \vec{R}_A та \vec{R}_B . Лінії дії цих реакцій мають нахил відносно нормалей до поверхонь φ_0^T . Крім сил \vec{R}_A та \vec{R}_B на драбину діє сила \vec{G} , що дорівнює вазі людини. Отже, на драбину діють три сили. Згідно з теоремою про три сили (див. параграф 1.2), лінії дії сил \vec{R}_A , \vec{R}_B та \vec{G} перетинаються в точці K . Тому в положенні драбини, наведеному на рис. 5.10, вище

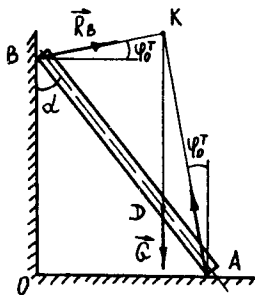


Рис. 5.10

точки D людина піднятися не може (D — точка перетину лінії дії сили \vec{G} та осі драбини AB). Щоб людина змогла піднятися по драбині до точки B , лінії дії сил \vec{R}_A та \vec{R}_B мають перетинатися де-небудь на прямій OB , що можливо тільки тоді, коли лінія дії сили \vec{R}_A буде напрямлена вздовж осі драбини — лінії AB , тобто коли кут $\alpha \leq \varphi^T$.

Отже, людина може піднятися по драбині до її кінця тоді, коли вісь драбини утворює зі стіною кут, який не перевищує кута тертя. Тертя між драбиною та вертикальною стіною при цьому значення не має, тобто стіна може бути гладенькою.

Приклад 5.3. Визначити кут α (кут захвату), за якого куски матеріалу зтягуються валками валкової дробарки при подрібненні матеріалу (рис. 5.11). Вагою матеріалу, що подрібнюється, знехтувати.

Розв'язання. Під час роботи дробарки на кусок матеріалу діють сили тиску валків \vec{P}_A і \vec{P}_B та сили тертя \vec{F}_A^T і \vec{F}_B^T .

Очевидно, матеріал буде зтягуватися валками, якщо проекції сил, що діють на матеріал, на вісь y будуть задовольняти таку умову:

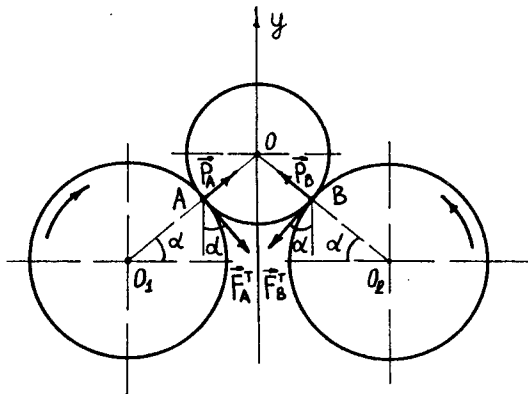


Рис. 5.11

$$(P_A + P_B) \sin \alpha \leq (F_A^T + F_B^T) \cos \alpha. \quad (1)$$

Беручи до уваги, що граничне значення сил тертя $\vec{F}_A^T = fP_A$, $\vec{F}_B^T = fP_B$, де f — статичний коефіцієнт тертя ковзання, та припускаючи, що $P_A = P_B = P$, нерівність (1) подамо у вигляді

$$2P \sin \alpha \leq 2Pf \cos \alpha,$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f.$$

Оскільки $f = \operatorname{tg} \varphi^T$ [рівність (5.5)], то $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi^T$, або $\alpha \leq \varphi^T$, де φ^T — кут тертя.

Приклад 5.4. Визначити момент гальмування M_r , що виникає на шківу центрифуги цукрового заводу під дією сили \vec{P} , прикладеної до коромисла ABC з нерухомою віссю O_1 (рис. 5.12). Коефіцієнт тертя ковзання між колодками та шківом дорівнює f .

Розв'язання. З даних рис. 5.12 випливає, що момент гальмування M_r чисельно дорівнює сумі моментів сил тертя \vec{F}_E^T, \vec{F}_M^T , які виникають між колодками та шківом при гальмуванні, відносно точки O , тобто

$$M_r = F_E^T \frac{d}{2} + F_M^T \frac{d}{2} = fN_E \frac{d}{2} + fN_M \frac{d}{2}, \quad (1)$$

де f — статичний коефіцієнт тертя ковзання; N_E, N_M — відповідно нормальні реакції у точках E та M .

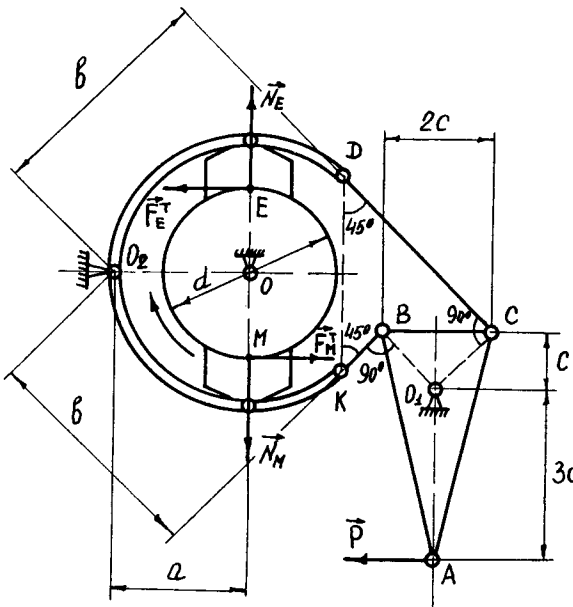


Рис. 5.12

Для визначення сил \vec{N}_E та \vec{N}_M необхідно розглянути рівновагу трьох тіл, тобто тіл O_2ED, O_2MK та ABC . Ці тіла являють собою важелі, тобто тверді тіла, які обертаються навколо нерухомих точок і до яких прикладені плоскі системи сил. Для рівноваги важеля необхідно й достатньо, щоб алгебрична сума моментів усіх сил, що діють на нього, відносно нерухомої точки дорівнювала нулю, тобто щоб виконувалася умова $\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0$, де O — нерухома точка важеля.

На рис. 5.13 та 5.14 наведено важелі O_2ED, O_2MK та показано сили, що діють на ці тіла з боку шківів та стрижнів DC та KB (рис. 5.12).

Складемо рівняння рівноваги важелів O_2ED та O_2MK :

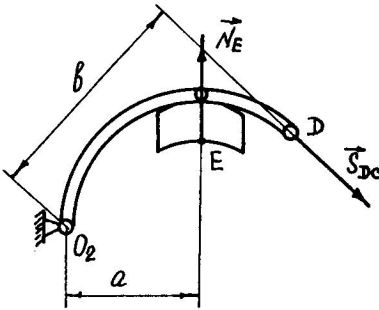


Рис. 5.13

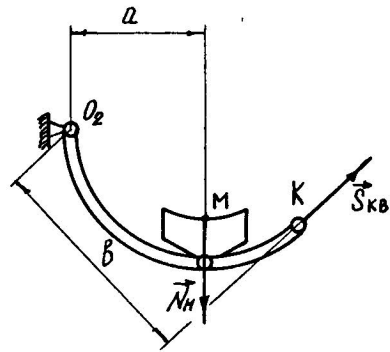


Рис. 5.14

$$\sum_{k=1}^n M_{O_2}(\vec{F}_k) = 0; N_E a - S_{DC} b = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{O_2}(\vec{F}_k) = 0; S_{KB} b - N_M a = 0. \quad (3)$$

Відповідно до рівнянь (2) і (3), з огляду на те, що важіль O_2MK є дзеркальним відбиттям важеля O_2ED , маємо $N_E = N_M$, $S_{DC} = S_{KB} = S$. Тоді

$$N_E = N_M = \frac{Sb}{a}. \quad (4)$$

Для визначення S розглянемо рівновагу важеля ABC (рис. 5.15). На важіль діють сила \vec{P} , реакція стрижня DC , тобто сила \vec{S}'_{DC} , та реакція стрижня KD , тобто сила \vec{S}'_{KB} . Складаємо рівняння рівноваги важеля:

$$\sum_{k=1}^n M_{O_1}(\vec{F}_k) = 0; S'_{KB} C \cdot \sqrt{2} + S'_{DC} C \cdot \sqrt{2} - P \cdot 3C = 0. \quad (5)$$

Оскільки згідно з аксіомою про рівність дії та протидії (див. параграф 1.8) $S'_{DC} = S_{DC}$, $S'_{KB} = S_{KB}$, то $S'_{DC} = S'_{KB} = S_{DC} = S$. Тоді рівняння (5) набирає вигляду $2SC\sqrt{2} - P3C = 0$. Звідси

$$S = \frac{P3C}{2C\sqrt{2}} = \frac{3P}{2\sqrt{2}}.$$

Тоді

$$N_E = N_M = \frac{Sb}{a} = \frac{3Pb}{2a\sqrt{2}}.$$

Підставляючи значення N_E та N_M у рівняння (1), остаточно здобудемо

$$M_r = fN_E \frac{d}{2} + fN_M \frac{d}{2} = \frac{6Pbdf}{4a\sqrt{2}} = 1,06 \frac{Pbfd}{a} \quad (\text{Н} \cdot \text{м}).$$

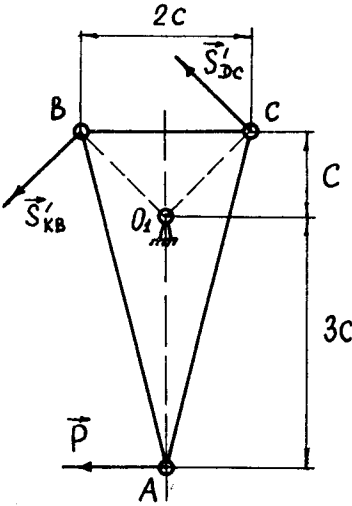


Рис. 5.15

Приклад 5.5. Балка AB , яка має довжину $2l$ та вагу P , спирається кінцем B на кут, що утворюється перетином двох взаємно перпендикулярних вертикальних гладеньких площин. Кінець балки A , що розміщений на шорсткій горизонтальній площині, спирається також на прямолінійний шорсткий виступ DE . Нехтуючи поперечними розмірами балки, визначити, за якого кута α між балкою і горизонтальною площиною можлива рівновага балки (рис. 5.16). Коефіцієнт тертя між кінцем балки A та шорсткими площинами дорівнює f .

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Аналізуємо в'язі. На балку накладено два види в'язей: гладенькі та шорсткі поверхні. Звільняємо балку від в'язей.

До балки прикладено сили \bar{P} , \bar{X}_A , \bar{Z}_A , \bar{F}^T , \bar{X}_B та \bar{Y}_B , що утворюють довільну просторову систему сил.

Побудуємо систему координат з початком у точці O та складемо рівняння рівноваги системи сил, що діє на балку:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_B - X_A = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_B - F^T = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A - P = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad -Y_B \cdot 2l \sin \alpha - P(2l \cos \alpha - l \cos \alpha) \sin \beta + \\ + Z_A \cdot 2l \cos \alpha \sin \beta = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad X_B \cdot 2l \sin \alpha + Pa - Z_A \cdot 2a = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad X_A \cdot 2l \cos \alpha \sin \beta - F^T \cdot 2a = 0. \quad (6)$$

З рівнянь (1), (3), (5) та (6) знайдемо

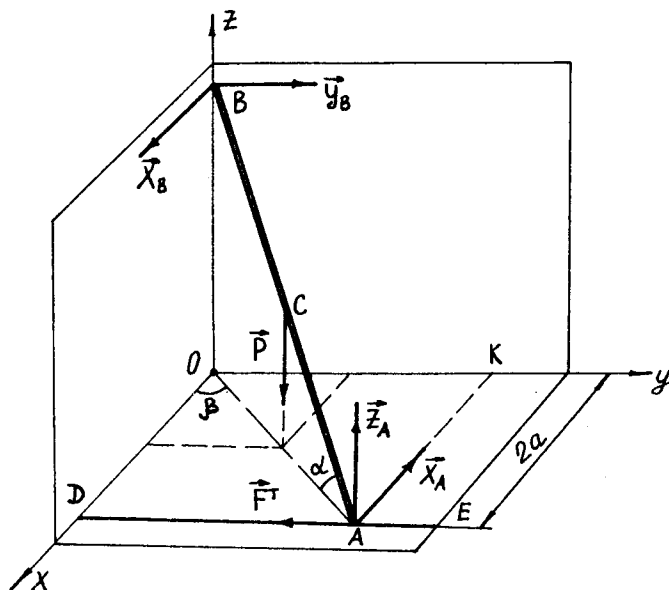


Рис. 5.16

$$F^T = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha \sin \beta, \quad X_A = \frac{Pa}{2l \sin \alpha}, \quad Z_A = P.$$

Оскільки розглядається гранична рівновага балки, то $F^T \leq fN$, де $N = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2}$ — повна нормальна реакція шорстких поверхонь, на які спирається балка. Підставляючи у нерівність значення F^T , X_A та Z_A , знайдемо

$$\frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha \sin \beta \leq f \sqrt{\frac{P^2 a^2}{4l^2 \sin^2 \alpha} + P^2},$$

або, підносячи до квадрату та скорочуючи на P^2 ,

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \beta \leq f^2 \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{a^2}{l^2} + 4f^2. \quad (7)$$

З рис. 5.16 випливає

$$AK = 2l \cos \alpha \cos \beta. \quad (8)$$

З рівності (8), враховуючи, що $AK = 2a$, маємо

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{a}{l}. \quad (9)$$

На підставі рівності (9)

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{a^2}{l^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Підставляючи цей вираз у нерівність (7), остаточно отримаємо

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha \leq \frac{4l^2 f^2 + (1 + f^2) a^2}{l^2 - (1 + f^2) a^2}.$$

Такою є умова, якій має задовольняти кут α , щоб балка перебувала у стані рівноваги.

Приклад 5.6. Визначити момент гальмування M_r , що виникає на шківі радіуса R стрічкового гальма (схему якого зображено на рис. 5.17), якщо $CD = 2CE$ і f — статичний коефіцієнт тертя між стрічкою і шківом — дорівнює 0,5.

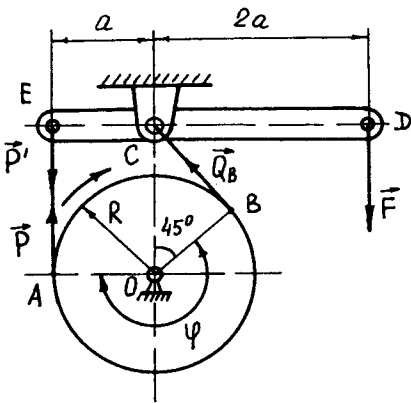


Рис. 5.17

Розв'язання. З рис. 5.17 випливає, що момент гальмування M_r чисельно дорівнює різниці моментів сил \vec{P} та \vec{Q} , що діють на шків, відносно нерухомої точки O , тобто

$$M_r = (P - Q)R. \quad (1)$$

Числове значення \vec{P} у рівності (1) визначимо через рівну їй за модулем силу \vec{P}' , що діє на важіль ECD , тобто з рівняння рівноваги важеля:

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad P'a - F \cdot 2a = 0.$$

Звідси $P' = P = 2F$.

Числове значення сили \vec{Q} визначимо за формулою Ейлера [див. формулу (5.8)]:

$$P = Qe^{f\varphi},$$

або

$$Q = Pe^{-f\varphi} = 2Fe^{-0,5 \cdot 3,93} = 0,28F,$$

де $f = 0,5$; $\varphi = \frac{5}{4}\pi = 3,93$ рад.

Підставляючи значення P та Q у рівність (1), знаходимо момент гальмування:

$$M_r = (P - Q)R = (2F - 0,28F)R = 1,72FR \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Приклад 5.7. Переміщення рамного фільтрпреса, вага якого P , до місця монтажу, відбувається за схемою, наведеною на рис. 5.18. Визначити модуль горизонтальної сили \bar{Q} , під дією якої фільтрпрес буде переміщуватися зі сталою швидкістю, якщо радіус котка R , коефіцієнт тертя кочення між котками та ґрунтом $\delta_{гр}$, а між котками та станиною преса — δ_n . Вагою котків знехтувати.

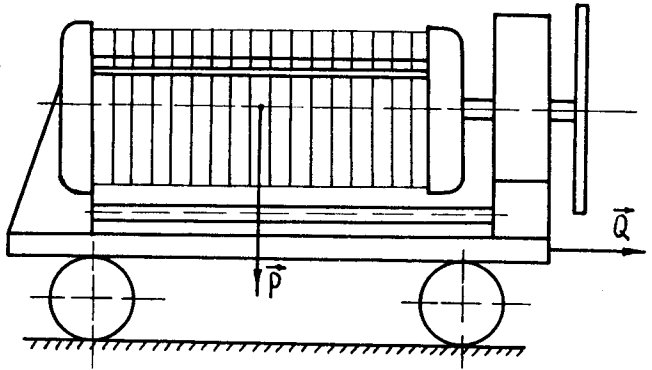


Рис. 5.18

Розв'язання. Фільтрпрес та котки утворюють систему твердих тіл. Оскільки за умовою задачі система рухається рівномірно, то сили, що діють на тверді тіла цієї системи, зрівноважуються. Отже, щоб розв'язати задачу, необхідно розглянути рівновагу трьох твердих тіл, тобто двох котків та преса.

Розглянемо рівновагу правого котка (рис.

5.19). На коток діють сили тертя ковзання \bar{F}_1^T і \bar{F}_2^T , нормальна реакція ґрунту \bar{N}_1 , прикладена у точці A' , та нормальна реакція станини преса \bar{N}_2 , прикладена у точці B' . Відстань між точками A і A' дорівнює коефіцієнту тертя між котком та ґрунтом, а відстань між точками B та B' — коефіцієнту тертя кочення між котком та станиною преса.

Сили, що діють на правий коток, утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -F_1^T + F_2^T = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_1 - N_2 = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad N_1 \delta_{гр} - F_2^T \cdot 2R + N_2 \delta_n = 0. \quad (3)$$

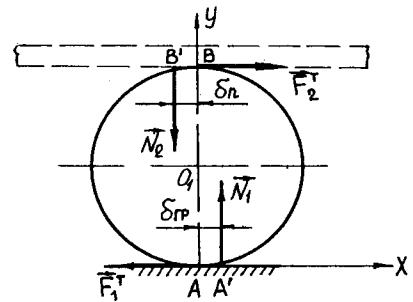


Рис. 5.19

Розглянемо рівновагу лівого котка (рис. 5.20). На коток діють сили тертя ковзання \vec{F}_3^T і \vec{F}_4^T , нормальна реакція ґрунту \vec{N}_3 та нормальна реакція преса \vec{N}_4 , які утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці C та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -F_3^T + F_4^T = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_3 - N_4 = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad N_4 \delta_n + N_3 \delta_{гр} - F_4^T \cdot 2R = 0. \quad (6)$$

Розглянемо рівновагу фільтрпреса (рис. 5.21). На прес діють нормальна реакція правого котка \vec{N}'_2 , нормальна реакція лівого котка \vec{N}'_4 та сили тертя ковзання $\vec{F}_2^{T'}$, $\vec{F}_4^{T'}$, які утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці O_3 та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил (при складанні рівнянь обмежимося двома рівняннями):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad Q - F_2^{T'} - F_4^{T'} = 0; \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N'_4 + N'_2 - P = 0. \quad (8)$$

Відповідно до аксіоми про рівність дії та протидії маємо:

$$N_2 = N'_2; \quad (9)$$

$$N_4 = N'_4; \quad (10)$$

$$F_2^T = F_2^{T'}; \quad (11)$$

$$F_4^T = F_4^{T'}. \quad (12)$$

Складаючи рівняння (2) з рівнянням (5) та враховуючи рівняння (8) і рівності (9), (10), знайдемо

$$N_1 + N_3 = N_2 + N_4 = P. \quad (13)$$

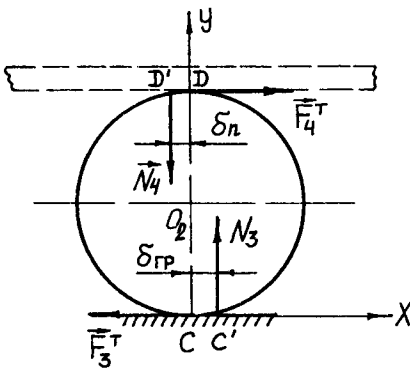


Рис. 5.20

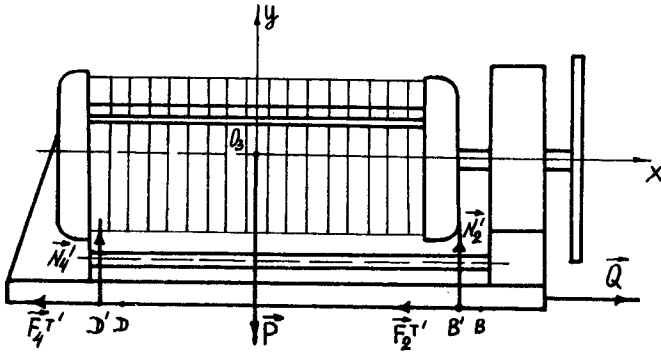


Рис. 5.21

Складаючи рівняння (3) з рівнянням (6) та враховуючи рівняння (7) і рівності (11), (12), (13), знайдемо

$$P(\delta_n + \delta_{гр}) = 2RQ.$$

Звідси

$$Q = \frac{P(\delta_n + \delta_{гр})}{2R}. \quad (14)$$

Нехай, наприклад, $P = 30$ кН, $R = 5$ см, $\delta_n = 0,05$ см, $\delta_{гр} = 0,2$ см. Підставляючи ці значення у рівність (14), дістанемо

$$Q = \frac{30(0,05 + 0,2)}{2 \cdot 5} = 0,75 \text{ (кН)}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що таке сила тертя ковзання?
2. Як формулюються закони тертя ковзання Кулона?
3. Як визначається статичний коефіцієнт тертя ковзання?
4. Що таке кут тертя і як його визначити?
5. Що таке конус тертя і які його властивості?
6. Що таке кут природного укусу і як його визначити?
7. Запишіть формулу Ейлера, що дає можливість визначити найменшу силу, яка здатна зрівноважити іншу силу при терті гнучких тіл.
8. Що таке пара тертя вертіння?
9. Що таке коефіцієнт тертя кочення?

Глава 6

ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА

6.1. Поняття центра ваги твердого тіла. Координати центра ваги

На будь-яку частинку твердого тіла, що розміщене поблизу земної поверхні або на самій поверхні Землі, діє сила, яка напрямлена вертикально вниз, — сила ваги цієї частинки \vec{P}_k (рис. 6.1)¹. Сили ваги частинок тіла утворюють просторову систему збіжних сил, оскільки лінії їх дії перетинаються приблизно у центрі Землі. Проте через те що розміри тіл, з якими доводиться мати справу на практиці, надто малі порівняно з їх відстанню від центра Землі, то кути, під якими перетинаються лінії дії сил \vec{P}_k , також надто малі², і з достатньою для практики точністю можна вважати, що сили ваги частинок тіла утворюють просторову систему паралельних сил (рис. 6.2).

За будь-якого повороту тіла точки прикладання сил ваги частинок тіла \vec{P}_k та напрямки ліній їх дії не змінюються. Отже, згідно з допущенням про паралельність ліній дії сил \vec{P}_k

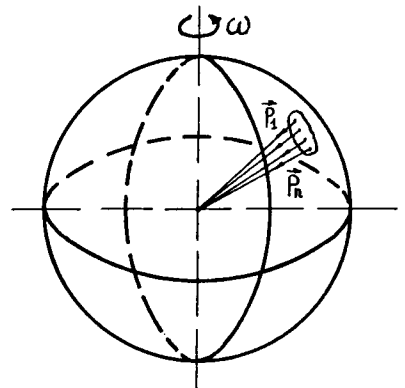


Рис. 6.1

¹ Питання про те, що собою являє сила ваги, докладно розглядається у розділі “Динаміка”.

² Кут між напрямками ліній дії сил ваги двох матеріальних точок, які розміщені на поверхні Землі на відстані 1 км одна від одної вздовж меридіана, дорівнює $32''$.

та розглянутими у параграфі 1.7 поняттями, просторова система паралельних сил ваги частинок тіла $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k$ має рівнодійну силу, що визначається рівністю

$$P = \sum_{k=1}^n P_k \tag{6.1}$$

і називається *силою ваги* або *вагою твердого тіла*.

Лінія дії сили ваги \vec{P} за будь-якого положення тіла проходить через одну й ту саму незмінно зв'язану з тілом точку C (рис. 6.2) — центр паралельних сил ваги частинок тіла \vec{P}_k . Ця точка C і називається *центром ваги твердого тіла*. Отже, *центр ваги твердого тіла* — це незмінно зв'язана з цим тілом точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної сил ваги частинок тіла за будь-якого положення тіла у просторі.

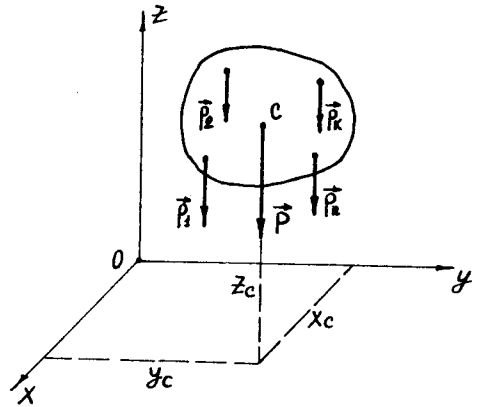


Рис. 6.2

Оскільки центром ваги твердого тіла є центр паралельних сил ваги частинок цього тіла, то для визначення положення центра ваги тіла відносно декартової системи координат скористуємося загальними формулами, що наведені в параграфі 1.7 для визначення координат центра системи паралельних сил, тобто формулами (1.27). У нашому випадку ці формули мають вигляд:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{P}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{P}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{P}, \tag{6.2}$$

де x_k, y_k, z_k — відповідно координати точок прикладання сил \vec{P}_k ; P — вага всього тіла.

Рівності (6.2) визначають координати центра ваги твердого тіла відносно довільної декартової системи координат, зв'язаної із Землею.

6.2. Координати центра ваги однорідних твердих тіл

Якщо тверде тіло однорідне, тобто якщо питома вага тіла стала ($\gamma = \text{const}$), то вага тіла P та вага будь-якої частинки цього тіла P_k пропорційна об'єму тіла v та об'єму елементарної частинки цього тіла Δv_k , тобто $P = \gamma v$, $P_k = \gamma \Delta v_k$.

Тому, підставляючи значення P та P_k у рівності (6.2), знайдемо:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{\gamma \sum_{k=1}^n \Delta v_k x_k}{\gamma v} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k x_k}{v}; \\y_c &= \frac{\gamma \sum_{k=1}^n \Delta v_k y_k}{\gamma v} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k y_k}{v}; \\z_c &= \frac{\gamma \sum_{k=1}^n \Delta v_k z_k}{\gamma v} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k z_k}{v},\end{aligned}\tag{6.3}$$

де Δv_k — об'єм елементарної частинки тіла; x_k, y_k, z_k — відповідно координати центра ваги k -го об'єму елементарної частинки тіла; v — об'єм всього тіла.

З рівностей (6.3) випливає, що положення центра ваги однорідного твердого тіла, яке має три виміри, залежить тільки від його об'єму та форми. Тому точка C , координати якої визначаються за формулами (6.3), називається *центром ваги об'єму*.

Усі фізичні тіла мають три виміри. В практиці трапляються випадки, коли можна знехтувати одним, а іноді й двома вимірами тіла. Такі приклади наведено нижче.

1. Однорідне тверде тіло, що має форму тонкої пластини, можна розглядати як матеріальну плоску фігуру. Вага такої плоскої фігури P та вага будь-якої її частинки P_k пропорційна площі фігури S та площі ΔS її елементарної частинки, тобто $P = \gamma_1 S$, $P_k = \gamma_1 \Delta S$, де γ_1 — вага одиниці площі фігури. Тому, підставляючи значення P та P_k у рівності (6.2) та беручи до уваги, що положення центра ваги плоскої фігури визначається двома координатами, знайдемо:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{\gamma_1 \sum_{k=1}^n \Delta S_k x_k}{\gamma_1 S} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta S_k x_k}{S}; \\y_c &= \frac{\gamma_1 \sum_{k=1}^n \Delta S_k y_k}{\gamma_1 S} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta S_k y_k}{S},\end{aligned}\tag{6.4}$$

де ΔS_k — площа елементарної частинки тіла; x_k, y_k, z_k — відповідно координати центра ваги k -ї елементарної частинки площі тіла; S — площа всього тіла.

З рівностей (6.4) випливає, що положення центра ваги твердого тіла у вигляді однорідної плоскої пластини залежить тільки від її площі та форми. Тому точка C , координати якої визначаються за формулами (6.4), називається *центром ваги площі*.

2. Якщо площа поперечного перерізу однорідного твердого тіла однакова вздовж його довжини та розміри цього перерізу малі порівняно з довжиною тіла, то таке тіло можна розглядати як матеріальну лінію. Вага такого тіла в цілому, а також вага його частинок пропорційна їх довжині, тобто $P = \gamma_2 L$, $P_k = \gamma_2 \Delta l_k$, де γ_2 — вага одиниці довжини тіла; L — довжина тіла; Δl_k — довжина елемента тіла. Тому, підставляючи значення P та P_k у рівності (6.2), знайдемо:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\gamma_2 \sum_{k=1}^n \Delta l_k x_k}{\gamma_2 L} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta l_k x_k}{L}; \\ y_c &= \frac{\gamma_2 \sum_{k=1}^n \Delta l_k y_k}{\gamma_2 L} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta l_k y_k}{L}; \\ z_c &= \frac{\gamma_2 \sum_{k=1}^n \Delta l_k z_k}{\gamma_2 L} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta l_k z_k}{L}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

де Δl_k — довжина елементарної частинки лінії; x_k, y_k, z_k — відповідно координати центра ваги k -ї елементарної частинки лінії; L — довжина всієї лінії.

З рівностей (6.5) випливає, що положення центра ваги твердого тіла у вигляді однорідної лінії залежить тільки від її довжини та положення у просторі. Тому точка C , координати якої визначаються за формулами (6.5), називається *центром ваги лінії*.

Отже, центр ваги однорідного твердого тіла визначається як центр ваги об'єму, площі або лінії.

6.3. Теорема про центр ваги однорідних твердих тіл

Теорема 1. *Якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр ваги тіла розташований на цій осі.*

Розглянемо однорідне тіло, що має вісь симетрії (рис. 6.3). Сполучимо з віссю симетрії одну з осей декартових координат, наприклад вісь z , і визначимо дві координати центра ваги тіла за формулами (6.3):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k x_k}{v}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k y_k}{v}. \tag{6.6}$$

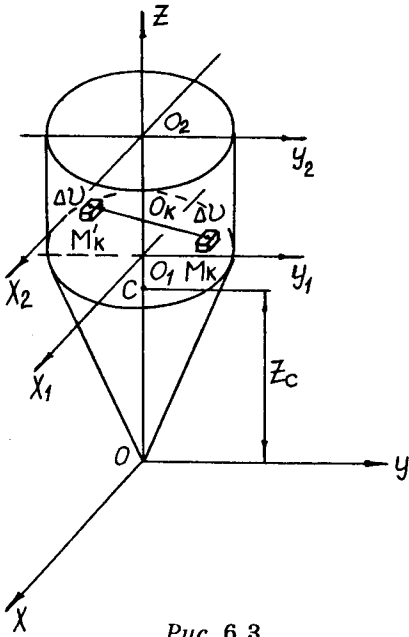


Рис. 6.3

Розглянемо в тілі дві точки M_k та M'_k , розташовані на перпендикулярі до осі z на рівних відстанях від цієї осі, тобто $O_k M_k = O_k M'_k$. В околі точок M_k та M'_k виділяємо елементарні об'єми Δv_k (рис. 6.3). Очевидно, координати x_k і y_k точок M_k та M'_k рівні за величиною і протилежні за знаком.

Розбиваючи усе тіло на пари симетрично розташованих відносно осі z і рівних елементарних об'ємів, що складають добутки $\Delta v_k x_k$ і $\Delta v_k y_k$, та підсумовуючи їх, отримуємо суми, що дорівнюють нулю, оскільки об'єми Δv_k рівні, а координати x_k та y_k рівні за величиною, але мають протилежні знаки.

Звідси випливає, що нулю дорівнює і сума добутків, що утворюється з усіх елементарних об'ємів тіла та їх координат x_k і y_k , тобто

$$\sum_{k=1}^n \Delta v_k x_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \Delta v_k y_k = 0.$$

Підставляючи ці значення у рівності (6.6), знайдемо

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k x_k}{v} = 0; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k y_k}{v} = 0.$$

При $x_c = 0$ та $y_c = 0$ центр ваги тіла розміщений на осі z , яка є віссю симетрії тіла, і його положення визначається за формулою

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k z_k}{v}.$$

Теорема 2. Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то його центр ваги розташований у цій площині.

Розглянемо однорідне тіло, що має площину симетрії S (рис. 6.4). Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O ; осі x та y розташовані у площині симетрії S . Дві точки M_k та M'_k , що належать цьому тілу, розміщені на перпендикулярі до площини S та симетрично розташовані

відносно цієї площини, тобто $O_k M_k = O_k M'_k$. Виділимо в околі точок M_k та M'_k елементарні об'єми Δv_k . Очевидно, координати z_k точок M_k та M'_k рівні за величиною, але мають протилежні знаки.

Розбиваючи усе тіло на пари симетрично розташованих відносно площини S і рівних елементарних об'ємів, які складають добутки $\Delta v_k z_k$, та підсумовуючи їх, отримуємо суми, що дорівнюють нулю, оскільки об'єми Δv_k є рівними, а координати z_k однакові за величиною, але мають протилежні знаки.

Звідси випливає, що нулю дорівнює і сума добутків, яка утворюється з усіх елементарних об'ємів тіла та їх координат z_k :

$$\sum_{k=1}^n \Delta v_k z_k = 0.$$

Підставляємо це значення у рівність (6.3); тоді

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k z_k}{v} = 0.$$

Оскільки $z_c = 0$, то центр ваги тіла розташований у площині, яка є площиною симетрії тіла; його положення визначається за формулою

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k x_k}{v}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k y_k}{v}.$$

Теорема 3.1 *Об'єм, що утворюється від обертання плоскої фігури навколо осі, яка розташована у площині фігури за її межами, дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, що описує її центр ваги.*

Нехай плоска фігура, що має площу S , обертається навколо осі x , яка розміщена у площині фігури і не перетинає її. При обертанні навколо осі x контур фігури описує деяку замкнену поверхню, що називається *поверхнею обертання*. Тіло, обмежене цією поверхнею, називається *тілом обертання*.

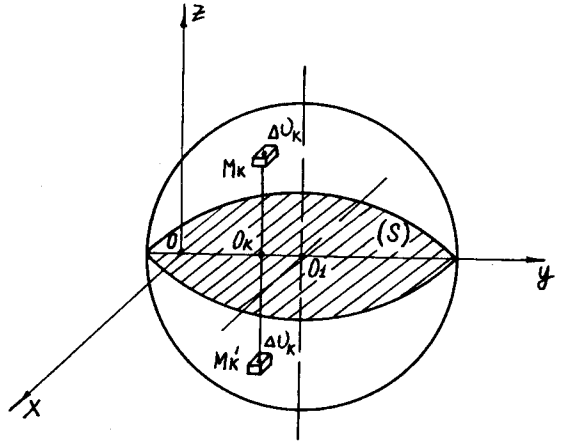


Рис. 6.4

¹ Ця та наступна теореми називаються теоремами Паппа — Гюльдена. Папп Олександрійський (друга половина III ст.) — давньогрецький математик; П.Гюльден (1577—1643) — швейцарський математик.

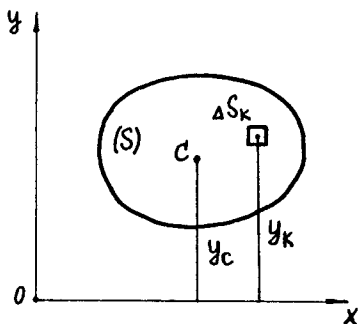


Рис. 6.5

Об'єм тіла обертання можна визначити як суму нескінченно великої кількості об'ємів елементарних кругових кілець, що утворюються від обертання нескінченно малих площадок ΔS_k . Радіус кожного кільця дорівнює відстані цієї площадки від осі x , тобто координаті y_k (рис. 6.5).

Об'єм елементарного кільця

$$\Delta v_k = 2\pi y_k \Delta S_k.$$

Об'єм тіла обертання

$$v = \sum_{k=1}^n \Delta v_k = 2\pi \sum_{k=1}^n \Delta S_k y_k.$$

З рівності (6.4) знаходимо

$$\sum_{k=1}^n \Delta S_k y_k = S y_c.$$

Тоді

$$v = 2\pi y_c S, \quad (6.7)$$

де $2\pi y_c$ — довжина кола, яке описує центр ваги тіла обертання; S — площа плоскої фігури.

Рівність (6.7) доводить теорему.

Теорема 4. *Площа поверхні обертання, що утворюється від обертання дуги плоскої кривої навколо прямої, яка розташована у площині цієї кривої, дорівнює добутку довжини дуги кривої на довжину кола, що описує її центр ваги.*

Нехай крива AB , що має довжину L , обертається навколо осі x , яка розташована у площині кривої і не перетинає її. При обертанні кривої навколо осі x ця крива описує деяку поверхню обертання (рис. 6.6).

Розбиваємо криву на нескінченно велику кількість малих елементів довжиною Δl_k . Поверхню, що утворюється при обертанні кожного з елементів Δl_k , можна розглядати як поверхню зрізаного конуса.

Як відомо з геометрії, площа бокової поверхні зрізаного конуса дорівнює добутку довжини кола середнього перерізу на довжину твірної. Тому площу поверхні, що утворюється від обертання елемента кривої Δl_k , можна визначити так:

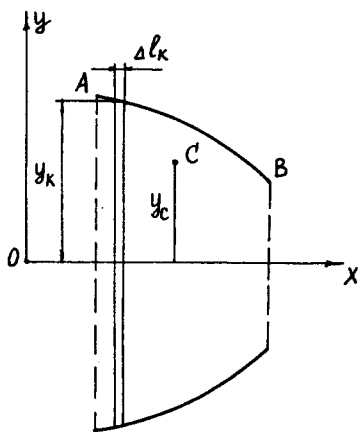


Рис. 6.6

$$\Delta S_k = 2\pi y_k \Delta l_k,$$

де y_k — радіус кола, що дорівнює відстані від середини елемента Δl_k до осі x .

Площа поверхні обертання

$$S = \sum_{k=1}^n \Delta S_k = 2\pi \sum_{k=1}^n \Delta l_k y_k.$$

З рівності $y_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta l_k y_k}{L}$ знайдемо

$$\sum_{k=1}^n \Delta l_k y_k = L y_c.$$

Тоді

$$S = 2\pi y_c L, \tag{6.8}$$

де $2\pi y_c$ — довжина кола, що описує центр ваги кривої; L — довжина кривої.

Рівність (6.8) доводить розглянуту теорему.

6.4. Способи визначення координат центра ваги твердих тіл

Спосіб I. Спосіб симетрії

Якщо однорідне тверде тіло має вісь або площу симетрії, то згідно з теоремами 1 і 2 (см. параграф 6.3) центр ваги такого тіла розташований відповідно або на осі симетрії, або у площині симетрії.

Звідси випливає, що центр ваги кола, диска, поверхні та об'єму кулі розташований в їх геометричних центрах. Центр ваги плоскої фігури, що обмежується відповідно паралелограмом, ромбом, прямокутником та квадратом, а також їх контурів розташований у точках перетину їх діагоналей. Центр ваги плоскої фігури, що обмежується правильним багатокутником, а також його контуру розташований у центрі вписаного або описаного кола.

Спосіб II. Спосіб розбиття

Якщо однорідне тверде тіло можна розбити на скінченну кількість таких частин, для кожної з яких положення центра ваги відомо заздалегідь (рис. 6.7—6.9), то координати центра ваги всього тіла можна визначити безпосередньо за формулами (6.3)—(6.5). При цьому кількість додатків у чисельнику кожної з формул дорівнюватиме кількості частин тіла, що утворилися при його розбитті.

Спосіб III. Спосіб визначення центра ваги на підставі теореми Паппа — Гюльдена

Теорема 3 і 4.

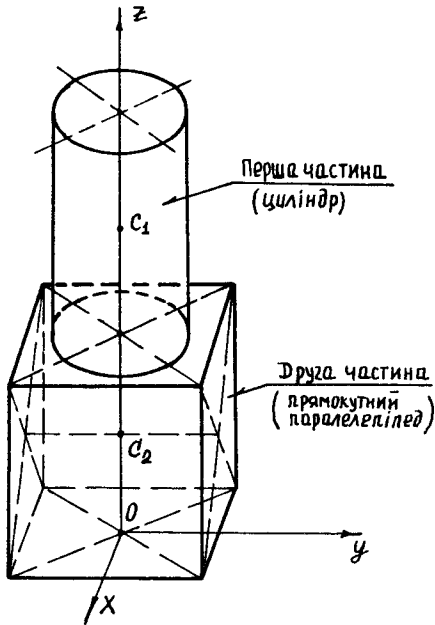


Рис. 6.7

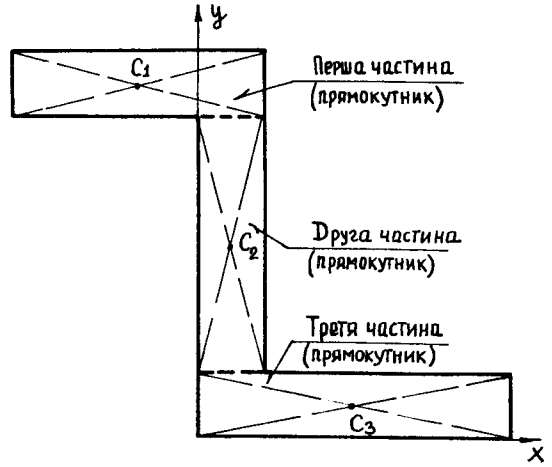


Рис. 6.8

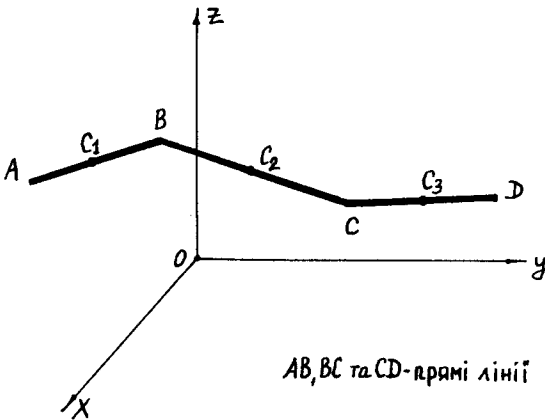


Рис. 6.9

Спосіб IV. Спосіб доповнення

Цей спосіб є окремим випадком способу розбиття. Його застосовують до твердих тіл, що мають порожнини, отвори або вирізи, якщо центри ваги тіла без порожнин, отворів та вирізів та центри ваги тіл, що утворюють порожнини, отвори та вирізи, відомі заздалегідь. При цьому в рівностях (6.3)—(6.4) об'єми або площі віднятих частин твердого тіла (порожнини, отвори або вирізи) необхідно вважати від'ємними, тобто враховувати їх у рівностях (6.3)—(6.4) зі знаком “-”.

Спосіб V. Спосіб інтегрування

Якщо тверде тіло неможливо розбити на скінченну кількість частин, положення центрів ваги яких відомі заздалегідь, то тіло розбивають на n довільно малих об'ємів Δv та виконують граничний перехід, збільшуючи кількість елементів n до нескінченності і стягуючи їх у точку. У результаті на підставі рівності (6.3) знайдемо:

$$x_c = \frac{\lim_{\substack{\Delta v_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta v_k x_k}{v} = \frac{1}{v} \int_{(v)} x dv; \quad (6.9)$$

$$y_c = \frac{\lim_{\substack{\Delta v_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta v_k y_k}{v} = \frac{1}{v} \int_{(v)} y dv; \quad (6.10)$$

$$z_c = \frac{\lim_{\substack{\Delta v_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta v_k z_k}{v} = \frac{1}{v} \int_{(v)} z dv. \quad (6.11)$$

Тут $\int_{(v)} x dv$, $\int_{(v)} y dv$, $\int_{(v)} z dv$ — інтеграли, поширені на весь об'єм тіла.

Формули (6.9)—(6.11) визначають центр ваги об'єму при застосуванні способу інтегрування.

Аналогічно на підставі рівностей (6.4)—(6.5) отримують формули для визначення відповідно координат центра ваги площі та лінії:

$$x_c = \frac{\lim_{\substack{\Delta S_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta S_k x_k}{S} = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS; \quad (6.12)$$

$$y_c = \frac{\lim_{\substack{\Delta S_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta S_k y_k}{S} = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS. \quad (6.13)$$

Тут $\int_{(S)} x dS$, $\int_{(S)} y dS$ — інтеграли, поширені на всю площу тіла;

$$x_c = \frac{\lim_{\substack{l_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta l_k x_k}{L} = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl; \quad (6.14)$$

$$y_c = \frac{\lim_{\substack{l_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta l_k y_k}{L} = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl; \quad (6.15)$$

$$z_c = \frac{\lim_{\substack{l_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta l_k z_k}{L} = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl. \quad (6.16)$$

Тут $\int_{(L)} xdl$, $\int_{(L)} ydl$, $\int_{(L)} zdl$ — інтеграли, поширені на всю довжину лінії.

Спосіб VI. Експериментальний спосіб

До експериментального способу визначення центра ваги твердих тіл належать метод підвішування та метод зважування.

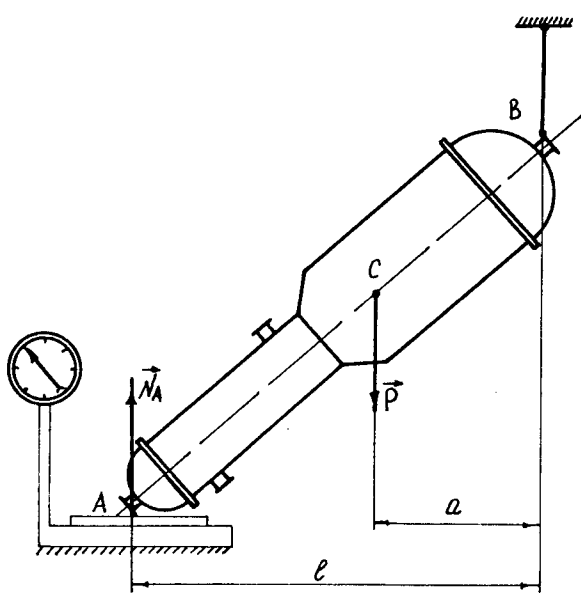


Рис. 6.10

Метод підвішування полягає в тому, що тверде тіло підвішують за різні точки на нитці або тросі. Напрямок нитки, до якої підвішено тіло, буде при кожному підвісі тіла давати напрям лінії дії сили ваги. Точка перетину цих напрямів визначає центр ваги тіла.

Ідею *методу зважування* пояснює такий приклад. Нехай необхідно визначити центр ваги випарного апарата цукрового заводу (відстань a), якщо відстань $AB = l$ та вага апарата P (рис. 6.10) відомі. Поставимо апарат у точці A на платформу вагів та підвісимо його у точці B , як показано на рис. 6.10, знайдемо зважуванням силу тиску апарата на платформу вагів у точці A . Складаємо одне з рівнянь рівноваги плоскої системи паралельних сил:

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -N_A l + Pa = 0.$$

$$\text{Звідси } a = \frac{N_A l}{P}.$$

Далі у параграфі 6.6 буде розглянуто приклади застосування наведених способів визначення центра ваги твердого тіла.

6.5. Елементи геометрії плоских твердих тіл

При розв'язанні задач, що пов'язані з визначенням центра тиску рідини або сипких тіл на стінки, днища, затвори посудин та підпірних стінок, виникає необхідність оперувати деякими геометричними характеристиками плоских фігур.

До геометричних характеристик плоских фігур або плоских перерізів належать центр ваги, статичні моменти, осьові, полярний та відцентровий моменти інерції.

Поняття центра ваги розглянуто у параграфах 6.1—6.4. Розглянемо поняття статичного, полярного, осьового та відцентрового моментів.

На рис. 6.11 подано деяку плоску фігуру. Зв'яжемо цю фігуру з декартовою системою координат Oxy і розглянемо два інтеграли:

$$S_x = \int_{(s)} y dS; \quad S_y = \int_{(s)} x dS, \quad (6.17)$$

де інтеграли поширені на всю площу фігури. Кожний з інтегралів являє собою взятую по всій площі суму добутків елементарних площадок dS на відстань до відповідної осі (x або y).

Перший інтеграл рівностей (6.17) називається статичним моментом плоскої фігури відносно осі x , а другий — відносно осі y . За одиницю статичного моменту в системі СІ приймають $[м^3]$.

З рівностей (6.17) випливає, що статичний момент може мати додатне або від'ємне значення чи дорівнювати нулю.

Осі, відносно яких статичний момент дорівнює нулю, називаються *центральною осями*. Точка перетину центральних осей є *центром ваги плоскої фігури*.

З порівняння рівностей (6.17) з рівностями (6.12)—(6.13) випливає: якщо відомі статичні моменти плоскої фігури, можна визначити положення її центра ваги, або навпаки, визначити статичні моменти плоскої фігури відносно осей координат, якщо відомо положення центра ваги плоскої фігури.

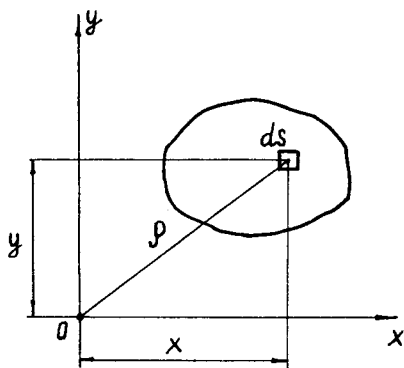


Рис. 6.11

Інтеграли:

$$J_x = \int_{(s)} y^2 dS; \quad (6.18)$$

$$J_y = \int_{(s)} x^2 dS,$$

де через x та y позначені поточні координати елементарної площадки dS (рис. 6.11), називаються *осьовими моментами інерції плоскої фігури відносно осей x та y* . Осьові моменти інерції завжди мають додатне значення. За одиницю осьового моменту інерції в системі СІ приймають $[м^4]$.

Інтеграл

$$J_p = \int_{(s)} (x^2 + y^2) dS = \int_{(s)} \rho^2 dS \quad (6.19)$$

називається *полярним моментом інерції J_p плоскої фігури*. Як і осьові моменти інерції, полярний момент інерції може бути тільки додатною величиною. Розмірність полярного моменту інерції $[м^4]$.

Між осьовими моментами інерції та полярним моментом інерції існує така залежність:

$$J_x + J_y = J_p, \quad (6.20)$$

що безпосередньо випливає з рівностей (6.18) та (6.19).

Інтеграл (рис. 6.11)

$$J_{xy} = J_{yx} = \int_{(S)} xy dS \quad (6.21)$$

називається *відцентровим моментом інерції плоскої фігури відносно осей x та y* . Розмірність цього моменту також $[м^4]$.

З рівності (6.21) випливає, що відцентровий момент інерції може мати додатне або від'ємне значення чи дорівнювати нулю.

Осі, що проходять через центр ваги плоскої фігури і відносно яких відцентровий момент інерції фігури дорівнює нулю, називаються *головними центральними осями*. На рис. 6.12 осі x та y плоского прямокутника є головними центральними осями, оскільки вони проходять через центр ваги C прямокутника і відцентровий момент інерції площі прямокутника відносно цих осей дорівнює нулю.

Рівність нулю відцентрового моменту інерції площі прямокутника відносно осей x та y можна виявити так. На підставі рівності (6.21) відцентровий момент інерції площі є взятою по всій площі сумою добутків елементарних площадок dS на їх відстань до відповідних осей x та y . З рис. 6.12 випливає, що частини площі прямокутника, які розташовані у квадрантах I та III площини, дають додатне значення відцентрового моменту інерції

відносно осей x та y , а частини, що розташовані у квадрантах II та IV, дають від'ємне значення. Звідси відцентровий момент інерції всієї площі прямокутника відносно осей x та y дорівнює нулю.

Знайдемо формули перетворення осьових моментів інерції при паралельному перенесенні осей, що мають широке практичне застосування.

Розглянемо плоску фігуру (рис. 6.13). Побудуємо дві пари паралельних осей x_1, y_1 та x_2, y_2 з початками у точках O_1 та O_2 . Нехай відстань між осями x_1 та x_2 дорів-

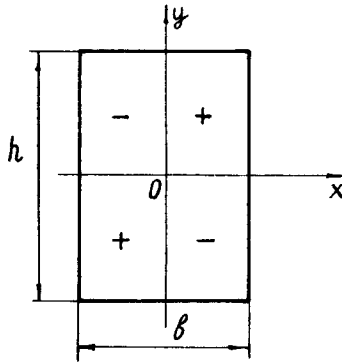


Рис. 6.12

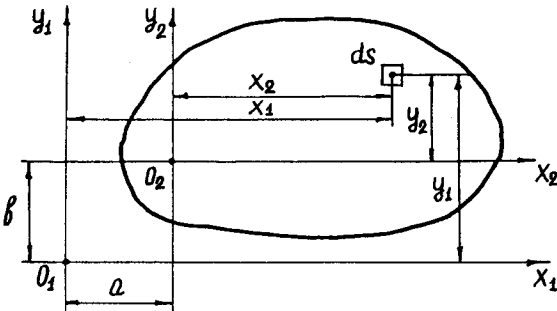


Рис. 6.13

нює b , а між осями y_1 та y_2 — a . Будемо вважати, що моменти інерції та статичні моменти плоскої фігури відносно осей x_1 та y_1 відомі. Необхідно визначити моменти інерції фігури відносно осей x_2 та y_2 :

$$J_{x_2} = \int_{(S)} y_2^2 dS; \quad J_{y_2} = \int_{(S)} x_2^2 dS.$$

Підставляючи в ці рівності $x_2 = x_1 - a$, $y_2 = y_1 - b$ (рис. 6.13), знаходимо:

$$J_{x_2} = \int_{(S)} (y_1 - b)^2 dS; \quad J_{y_2} = \int_{(S)} (x_1 - a)^2 dS.$$

Звідси

$$\begin{aligned} J_{x_2} &= J_{x_1} - 2bS_{x_1} + b^2S; \\ J_{y_2} &= J_{y_1} - 2aS_{y_1} + a^2S, \end{aligned} \tag{6.22}$$

де S_{x_1} , S_{y_1} — відповідно статичні моменти плоскої фігури відносно осей x_1 та y_1 ; S — площа плоскої фігури.

Якщо осі x_1 та y_1 — центральні осі, то $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$, і рівняння (6.22) спрощуються:

$$\begin{aligned} J_{x_2} &= J_{x_c} + b^2S; \\ J_{y_2} &= J_{y_c} + a^2S. \end{aligned} \tag{6.23}$$

З рівнянь (6.23) випливає: момент інерції плоскої фігури відносно будь-якої осі, паралельній тій, що проходить через центр ваги плоскої фігури, дорівнює моменту інерції відносно осі, що проходить через центр ваги фігури, складеному з добутком площі фігури на квадрат відстані між осями.

Приклади визначення моментів інерції найпростіших плоских фігур відносно характерних осей наведено в параграфі 6.6.

6.6. Приклади розв'язання задач з визначення центра ваги однорідного твердого тіла. Методичні вказівки

Приклад 6.1. Визначити положення центра ваги однорідного прямого кругового конуса, що має радіус основи R та висоту H (рис. 6.14).

Розв'язання. Оскільки конус однорідний та має вісь симетрії, то центр ваги конуса розташований на його осі симетрії. Сполучимо вісь симетрії конуса з віссю z декартової системи координат з початком у точці O . Для визначення координати z_c застосуємо спосіб інтегрування. Двома нормальними до осі z перерізами виділяємо елемент об'єму dV . Маємо

$$dV = \pi r^2 dz, \tag{1}$$

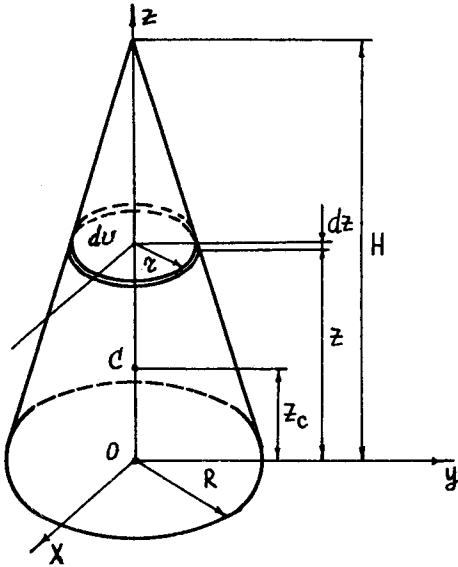


Рис. 6.14

де r — радіус виділеного елемента конуса; z — координата центра ваги виділеного елемента конуса.

З рис. 6.14 випливає співвідношення

$$\frac{r}{R} = \frac{H-z}{H}. \quad (2)$$

Тоді формула (1) з урахуванням (2) набирає вигляду

$$dV = \frac{\pi R^2}{H^2} (H-z)^2 dz. \quad (3)$$

Об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \quad (4)$$

Підставляючи значення dV та V , визначені за формулами (3) та (4), у рівність (6.11), знайдемо

$$z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV = \frac{3}{\pi R^2 H} \int_0^H z \frac{\pi R^2}{H^2} (H-z)^2 dz = \frac{3}{H^3} \int_0^H z (H-z)^2 dz = \frac{H}{4}. \quad (5)$$

Приклад 6.2. Визначити положення центра ваги однорідного зрізаного кругового конуса (рис. 6.15).

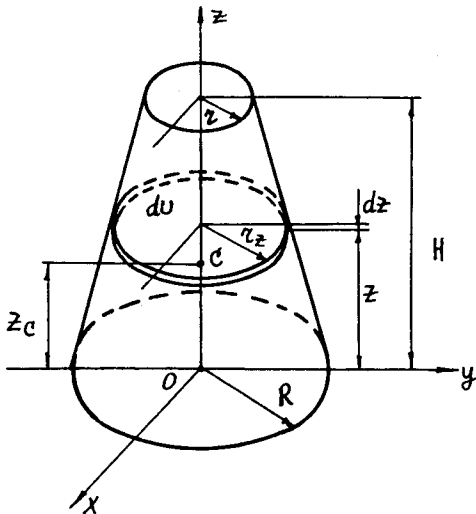


Рис. 6.15

Розв'язання. Оскільки конус однорідний та має вісь симетрії, то центр ваги конуса розташований на його осі симетрії. Сполучимо вісь симетрії конуса з віссю z декартової системи координат з початком у точці O .

Для визначення координати z_c застосуємо спосіб інтегрування. Двома нормальними до осі z перерізами виділяємо елемент об'єму dV . Маємо

$$dV = \pi r_z^2 dz, \quad (1)$$

де r_z — радіус виділеного елемента конуса; z — координата центра ваги виділеного елемента конуса.

З рис. 6.15 випливає співвідношення

$$\frac{r_z - r}{H - z} = \frac{R - r}{H}. \quad (2)$$

Тоді формула (1) набирає вигляду

$$d\upsilon = \pi \left(R - z \frac{R - r}{H} \right)^2 dz. \quad (3)$$

Об'єм зрізаного конуса

$$\upsilon = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr). \quad (4)$$

Підставляючи значення $d\upsilon$ та υ у рівність (6.11), знайдемо

$$z_c = \frac{1}{\upsilon} \int_{(\upsilon)} z d\upsilon = \frac{3}{\pi H (R^2 + r^2 + Rr)} \int_0^H \pi \left(R - z \frac{R - r}{H} \right)^2 z dz = \frac{H}{4} \left(\frac{R^2 + 3r^2 + 2Rr}{R^2 + r^2 + Rr} \right). \quad (5)$$

Приклад 6.3. Визначити положення центра ваги однорідної півкулі, що має радіус R (рис. 6.16).

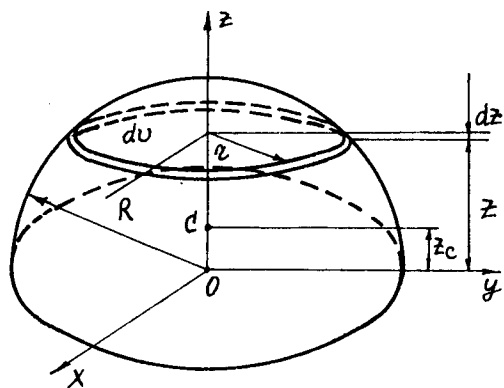


Рис. 6.16

Розв'язання. Оскільки півкуля однорідна та має вісь симетрії, то центр ваги півкулі розташований на її осі симетрії. Сполучимо вісь симетрії півкулі з віссю z декартової системи координат з початком у точці O .

Для визначення координати z_c застосуємо спосіб інтегрування. Двома нормальними до осі z перерізами виділяємо елемент об'єму $d\upsilon$. Маємо

$$d\upsilon = \pi r^2 dz, \quad (1)$$

де r — радіус виділеного елемента півкулі; z — координата центра ваги виділеного елемента півкулі.

З рис. 6.16 випливає

$$r^2 = R^2 - z^2. \quad (2)$$

Тоді рівність (1) набирає вигляду

$$d\upsilon = \pi (R^2 - z^2) dz. \quad (3)$$

Об'єм півкулі

$$v = \frac{2}{3} \pi R^3. \quad (4)$$

Підставляючи значення dv та v у рівність (6.11), здобудемо

$$z_c = \frac{1}{v} \int_{(v)} z dv = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \pi (R^2 - z^2) z dz = \frac{3\pi R^4}{8\pi R^3} = \frac{3}{8} R. \quad (5)$$

Приклад 6.4. Визначити положення центра ваги однорідного твердого тіла (рис. 6.17).

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосуємо спосіб доповнення, оскільки тверде тіло має конусну порожнину. Розіб'ємо тверде тіло на частини, тобто півкулю, циліндр, зрізаний конус та конус, що утворює порожнину.

Оскільки тверде тіло однорідне та має вісь симетрії, то центр ваги тіла розташований на його осі симетрії. Сполучимо вісь симетрії твердого тіла з віссю z декартової системи координат з початком у точці O . Координату центра ваги тіла z_c визначаємо за формулою (6.3):

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k z_k}{v} = \frac{v_1 z_{C_1} + v_2 z_{C_2} + v_3 z_{C_3} - v_4 z_{C_4}}{v_1 + v_2 + v_3 - v_4}, \quad (1)$$

де v_1 — об'єм півкулі; v_2 — об'єм циліндра; v_3 — об'єм зрізаного конуса; v_4 — об'єм конуса, що утворює порожнину; z_{C_1} — координата центра ваги півкулі (координата точки C_1 на рис. 6.17); z_{C_2} — координата центра ваги циліндра (координата точки C_2); z_{C_3} — координата центра ваги зрізаного конуса (координата точки C_3); z_{C_4} — координата центра ваги конуса, що утворює порожнину (координата точки C_4).

Об'єм півкулі

$$v_1 = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi (2a)^3 = \frac{16}{3} \pi a^3.$$

Координата центра ваги півкулі (див. приклад 6.3)

$$z_{C_1} = -\frac{3}{8} R = -\frac{3}{8} \cdot 2a = -\frac{3}{4} a.$$

Об'єм циліндра

$$v_2 = \pi R^2 H = \pi (2a)^2 a = 4\pi a^3,$$

де H — висота циліндра.

Координата центра ваги циліндра

$$z_{C_2} = \frac{a}{2}.$$

Об'єм зрізаного конуса можна визначити як суму об'єму циліндра, що має розміри $R = a$, $H = 2a$ (рис. 6.17), та об'єму тіла обертання, що утворюється при обертанні прямокутного трикутника навколо осі z (рис. 6.17, рис. 6.18):

$$v_3 = v_{\text{ц}} + v_{\text{об}}, \tag{2}$$

де $v_{\text{ц}}$ — об'єм циліндра; $v_{\text{об}}$ — об'єм тіла обертання.

Об'єм

$$v_{\text{ц}} = \pi R^2 H = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3,$$

де H — висота циліндра.

На підставі рівності (6.7) об'єм тіла обертання (рис. 6.18)

$$v_{\text{об}} = 2\pi y_c S = 2\pi \frac{4a}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a = \frac{8}{3} \pi a^3,$$

де y_c — відстань від осі z до центра ваги прямокутного трикутника; $y_c = a + \frac{a}{3}$

(див. приклад 6.5); S — площа прямокутного трикутника (рис. 6.18).

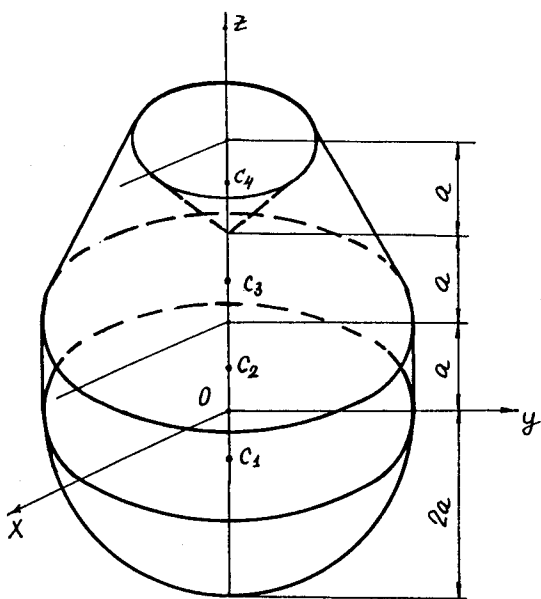


Рис. 6.17

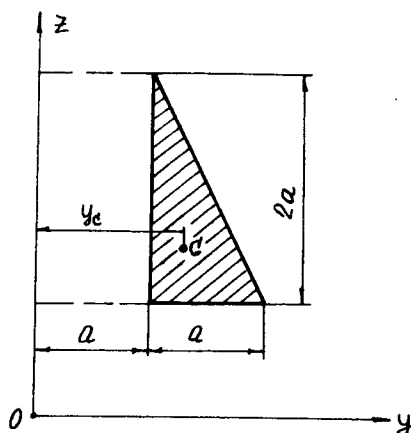


Рис. 6.18

Отже, на підставі рівняння (2) знайдемо об'єм зрізаного конуса:

$$v_3 = v_{\text{ц}} + v_{\text{об}} = 2\pi a^3 + \frac{8}{3}\pi a^3 = \frac{14\pi a^3}{3}.$$

Координата центра ваги зрізаного конуса (рис.6.17) (див. приклад 6.2)

$$z_{c_3} = a + \frac{H}{4} \left(\frac{R^2 + 3r^2 + 2Rr}{R^2 + r^2 + Rr} \right) = a + \frac{2a}{4} \left(\frac{4a^2 + 3a^2 + 4a^2}{4a^2 + a^2 + 2a^2} \right) = a + \frac{22}{28}a = \frac{25}{14}a.$$

Об'єм конуса, що утворює порожнину (рис. 6.17),

$$v_4 = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

Координата центра ваги конуса, що утворює порожнину (рис. 6.17) (див. приклад 6.1)

$$z_{c_4} = 3a - \frac{H}{4} = 3a - \frac{a}{4} = \frac{11}{4}a.$$

Тоді на підставі формули (1) здобудемо

$$z_c = \frac{v_1 z_{c_1} + v_2 z_{c_2} + v_3 z_{c_3} - v_4 z_{c_4}}{v_1 + v_2 + v_3 - v_4} = \frac{\frac{16}{3}\pi a^3 \left(-\frac{3}{4}a \right) + 4\pi a^3 \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{14\pi a^3}{3} \left(\frac{25}{14}a \right) - \frac{\pi a^3}{3}}{\frac{16}{3}\pi a^3 + 4\pi a^3 + \frac{14\pi a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{3}} = \frac{\frac{\pi a^3}{3}}{\frac{16}{3}\pi a^3 + 4\pi a^3 + \frac{14\pi a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{3}} = \frac{10\pi a^4}{13,67\pi a^3} = 0,73a.$$

Приклад 6.5. Визначити положення центра ваги плоского трикутника (рис. 6.19).

Розв'язання. Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O . Для визначення координат центра ваги трикутника застосуємо спосіб інтегрування. Виділяємо у трикутнику елемент площі dS . Площа цього елемента

$$dS = b_y dy. \quad (1)$$

З подібних трикутників 1, 2, 3 та 1, 4, 5 знайдемо

$$b_y = \frac{b}{h}(h - y). \quad (2)$$

Тоді рівність (1) набирає вигляду

$$dS = \frac{b}{h}(h - y) dy. \quad (3)$$

На підставі рівності (6.12) знайдемо

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS = \frac{2}{bh} \int_0^h \frac{bh + y(2a - b)}{2h} \cdot \frac{b}{h} (h - y) dy = \left(b + a - b - \frac{2a - b}{3} \right) = \frac{a + b}{3}, \quad (4)$$

де $x = a_y + \frac{b_y}{2} = \frac{a}{h} y + \frac{b}{2h} (h - y) = \frac{bh + y(2a - b)}{2h}$ [див. рис. 6.19 та формулу (2)].

На підставі рівності (6.13) знайдемо

$$y_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS = \frac{2}{bh} \int_0^h y \frac{b}{h} (h - y) dy = \frac{2}{bh} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \frac{b}{h} = \frac{h}{3}. \quad (5)$$

Зауважимо, що при $a = b$ (рис. 6.19) матимемо прямокутний трикутник (рис. 6.20). Координати центра ваги такого трикутника на підставі рівностей (4) та (5)

$$x_c = \frac{2}{3} b; \quad y_c = \frac{1}{3} h. \quad (6)$$

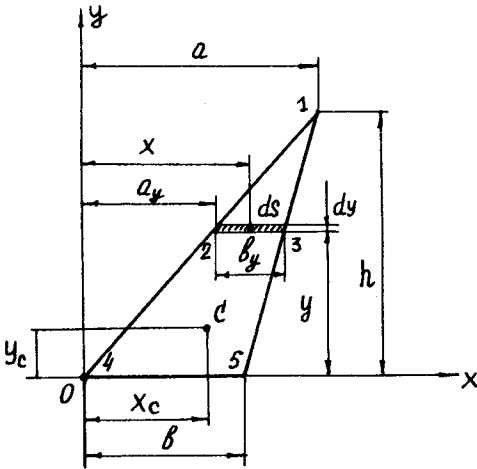


Рис. 6.19

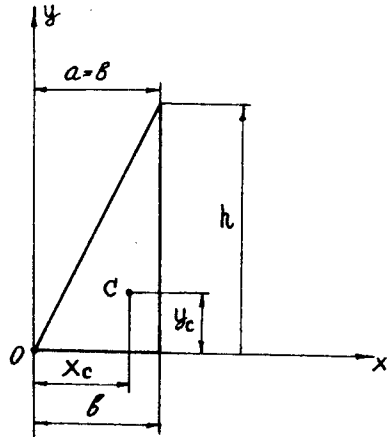


Рис. 6.20

Приклад 6.6. Визначити положення центра ваги плоского кругового сектора, що має центральний кут α (рис. 6.21).

Розв'язання. Оскільки сектор має вісь симетрії, то центр ваги сектора розташований на осі симетрії. Сполучаємо вісь симетрії сектора з віссю x .

Для визначення центра ваги сектора застосуємо спосіб інтегрування. Виділимо елемент площі сектора dS . Оскільки елемент dS можна розглядати як елементарний трикутник, то

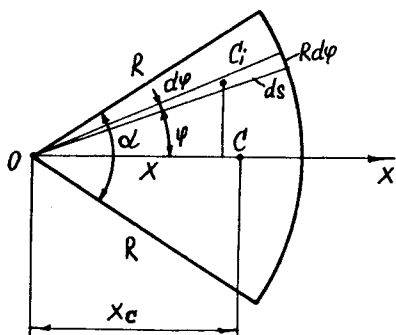


Рис. 6.21

$$dS = \frac{1}{2} R^2 d\varphi, \quad (1)$$

де R — радіус сектора.

Координату x центра елементарного трикутника (рис. 6.21) знайдемо за формулою

$$x = \frac{2}{3} R \cos \varphi. \quad (2)$$

Площа сектора

$$S = \frac{\alpha}{2} R^2. \quad (3)$$

Тоді на підставі рівності (6.12) маємо

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS = \frac{2}{\alpha R^2} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \frac{1}{3} R^3 \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{\alpha R^2} \cdot \frac{2}{3} R^3 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4R \sin \frac{\alpha}{2}}{3\alpha}. \quad (4)$$

Приклад 6.7. Визначити положення центра ваги плоскої фігури (рис. 6.22).

Розв'язання. Для визначення положення центра ваги застосуємо спосіб розбиття. Розіб'ємо фігуру на три найпростіші фігури: трикутник, прямокутник та півкруг. Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O .

На підставі рівностей (6.4) маємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta S_k x_k}{S} = \frac{S_1 x_{c_1} + S_2 x_{c_2} + S_3 x_{c_3}}{S_1 + S_2 + S_3}; \quad (1)$$

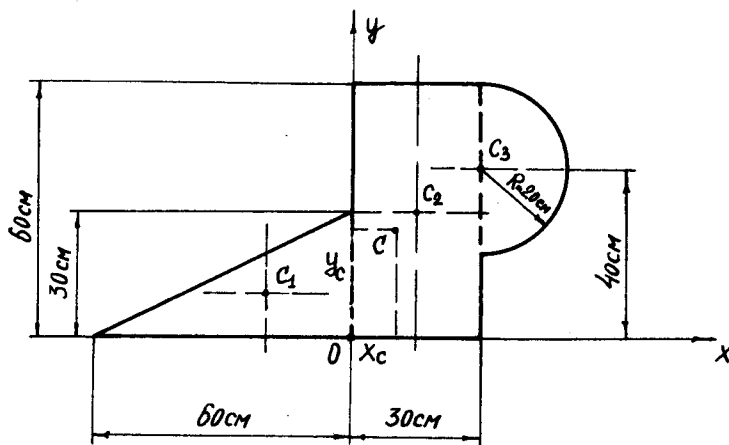


Рис. 6.22

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta S_k y_k}{S} = \frac{S_1 y_{c_1} + S_2 y_{c_2} + S_3 y_{c_3}}{S_1 + S_2 + S_3}, \quad (2)$$

де S_1, S_2, S_3 — відповідно площі трикутника, прямокутника та півкруга;
 $x_{c_1}, y_{c_1}, x_{c_2}, y_{c_2}, x_{c_3}, y_{c_3}$ — відповідно координати центра ваги площі трикутника, прямокутника та півкруга (координати точок C_1, C_2 та C_3).

Визначаємо площі трикутника, прямокутника та півкруга:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 30 = 900 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_2 = 60 \cdot 30 = 1800 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_3 = \frac{\pi 20^2}{2} = 628 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Визначаємо координати x_{c_1}, x_{c_2} та x_{c_3} :

$$x_{c_1} = -\frac{1}{3} \cdot 60 = -20 \text{ (см)};$$

$$x_{c_2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ (см)};$$

$$x_{c_3} = 30 + \frac{4 \cdot 20}{3 \cdot 3,14} = 38,49 \text{ (см)}.$$

Визначаємо координати y_{c_1}, y_{c_2} та y_{c_3} :

$$y_{c_1} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10 \text{ (см)};$$

$$y_{c_2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ (см)};$$

$$y_{c_3} = 40 \text{ (см)}.$$

Підставляємо $S_1, S_2, S_3, x_{c_1}, x_{c_2}, x_{c_3}, y_{c_1}, y_{c_2}$ та y_{c_3} у рівняння (1) та (2):

$$x_c = \frac{S_1 x_{c_1} + S_2 x_{c_2} + S_3 x_{c_3}}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{900(-20) + 1800 \cdot 15 + 628 \cdot 38,49}{900 + 1800 + 628} = 9,97 \text{ (см)};$$

$$y_c = \frac{S_1 y_{c_1} + S_2 y_{c_2} + S_3 y_{c_3}}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{900 \cdot 10 + 1800 \cdot 30 + 628 \cdot 40}{900 + 1800 + 628} = 26,5 \text{ (см)}.$$

Приклад 6.8. Визначити положення центра ваги плоскої фігури (рис. 6.23).

Розв'язання. Для визначення координати центра ваги y_c фігури використовуємо рівність (6.7):

$$v = 2\pi y_c S, \quad (1)$$

де v — об'єм тіла обертання; y_c — координата центра ваги тіла обертання; S — площа плоскої фігури.

Визначаємо v :

$$v = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3.$$

Визначаємо S :

$$S = \left[\frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right].$$

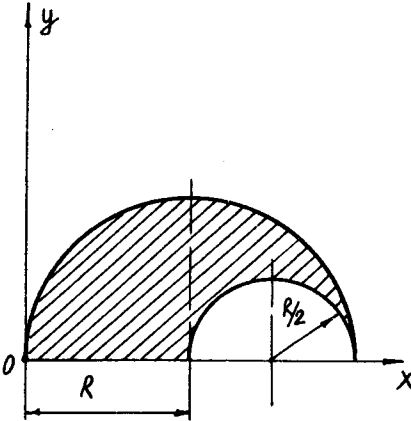


Рис. 6.23

Підставляємо значення v та S у рівність (1):

$$\frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \left[\frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right] 2\pi y_c.$$

Звідси

$$y_c = \frac{14R}{9\pi}.$$

Для визначення координати x_c застосуємо спосіб доповнення. На підставі рівності (6.4) маємо

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta S_k x_k}{S} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}, \quad (2)$$

де S_1 , S_2 — відповідно площа великого та малого круга; x_1 , x_2 — координати центра ваги великого та малого круга.

Визначаємо S_1 та x_1 :

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2}; \quad x_1 = R.$$

Визначаємо S_2 та x_2 :

$$S_2 = \frac{\pi R^2}{8}; \quad x_2 = \frac{3}{2} R.$$

Підставляємо значення S_1, S_2, x_1 та x_2 у рівність (2):

$$x_c = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{\pi R^2}{2} \cdot R - \frac{\pi R^2}{8} \cdot \frac{2}{3} R}{\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{8}} = \frac{5}{6} R.$$

Приклад 6.9. Визначити координати центра ваги плоскої ферми, що складається із семи стрижнів (рис. 6.24), якщо вага усіх стрижнів однакова.

Розв'язання. Центр ваги ферми визначимо за формулами (6.5):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta l_k x_k}{L} = \frac{l_1 x_{c_1} + l_2 x_{c_2} + l_3 x_{c_3} + l_4 x_{c_4} + l_5 x_{c_5} + l_6 x_{c_6} + l_7 x_{c_7}}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7},$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta l_k y_k}{L} = \frac{l_1 y_{c_1} + l_2 y_{c_2} + l_3 y_{c_3} + l_4 y_{c_4} + l_5 y_{c_5} + l_6 y_{c_6} + l_7 y_{c_7}}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7}. \quad (1)$$

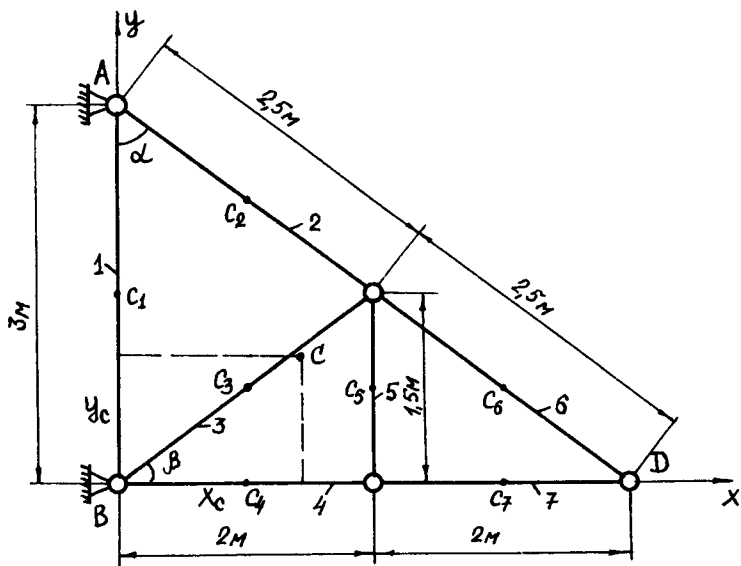


Рис. 6.24

Визначаємо координати центра ваги кожного стрижня ферми (координати точок C_i):

$$x_{C_1} = 0; y_{C_1} = 1,5 \text{ (м)};$$

$$x_{C_2} = \frac{2,5}{2} \sin \alpha = \frac{2,5}{2} \cdot \frac{4}{5} = 1 \text{ (м)}; y_{C_2} = 3 - \frac{2,5}{2} \cos \alpha = 3 - \frac{2,5}{2} \cdot \frac{3}{5} = 2,25 \text{ (м)},$$

$$\text{де } \sin \alpha = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{3}{5};$$

$$x_{C_3} = \frac{2,5}{2} \cos \beta = \frac{2,5}{2} \cdot \frac{2}{2,5} = 1 \text{ (м)}; y_{C_3} = \frac{2,5}{2} \sin \beta = \frac{2,5}{2} \cdot \frac{1,5}{2,5} = 0,75 \text{ (м)},$$

$$\text{де } \cos \beta = \frac{2}{2,5}; \sin \beta = \frac{1,5}{2,5};$$

$$x_{C_4} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (м)}; y_{C_4} = 0;$$

$$x_{C_5} = 2 \text{ (м)}; y_{C_5} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ (м)};$$

$$x_{C_6} = (2,5 + 1,25) \sin \alpha = 3,75 \cdot \frac{4}{5} = 3 \text{ (м)};$$

$$y_{C_6} = 3 - (2,5 + 1,25) \cos \alpha = 3 - 3,75 \cdot \frac{3}{5} = 0,75 \text{ (м)};$$

$$x_{C_7} = 2 + 1 = 3 \text{ (м)}; y_{C_7} = 0.$$

Підставляючи значення l_i , x_{C_i} та y_{C_i} у рівність (1), знайдемо:

$$x_C = \frac{3 \cdot 0 + 2,5 \cdot 1 + 2,5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1,5 \cdot 2 + 2,5 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{3 + 2,5 + 2,5 + 2 + 1,5 + 1,5 + 2} = \frac{23,5}{16} = 1,47 \text{ (м)};$$

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{3 \cdot 1,5 + 2,5 \cdot 2,25 + 2,5 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0 + 1,5 \cdot 0,75 + 2,5 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0}{3 + 2,5 + 2,5 + 2 + 1,5 + 1,5 + 2} = \\ &= \frac{15}{16} = 0,94 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Приклад 6.10. Визначити центр ваги плоскої “квазітвердої молекули”¹ кетену C_2H_2O . Конфігурацію молекули зображено на рис. 6.25. Відстань між атомами $(O - C) = 1,17 \text{ \AA}$, $(C - C) = 1,35 \text{ \AA}$, $(C - H) = 1,07 \text{ \AA}$. Кут $\angle HCH = 118^\circ$. Атомна маса $(O) = 15,9994$ (а.о.м.)³, $(C) = 12,011$ (а.о.м.), $(H) = 1,0079$ (а.о.м.).

Розв’язання. Молекула має вісь симетрії. Побудуємо систему декартових координат з початком у точці O_1 . Вісь x сполучаємо з віссю симетрії молекули. Оскільки молекула має вісь симетрії, то центр ваги молекули розташований на осі x .

Координату x_c знайдемо за формулою (6.2):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{P} = \frac{15,9994(-1,845) + 12,011(-0,675) + 12,011 \cdot 0,675}{15,9994 + 2 \cdot 12,011 + 2 \cdot 1,0079} + \frac{2 \cdot 1,0079(0,675 + 1,07 \cos 59^\circ)}{15,9994 + 2 \cdot 12,011 + 2 \cdot 1,0079} = \frac{-29,5189 + 2,4715}{42,0372} = -0,643 \left(\text{\AA} \right),$$

де P_k — атомна маса ядер молекули; x_k — координати ядер молекули.

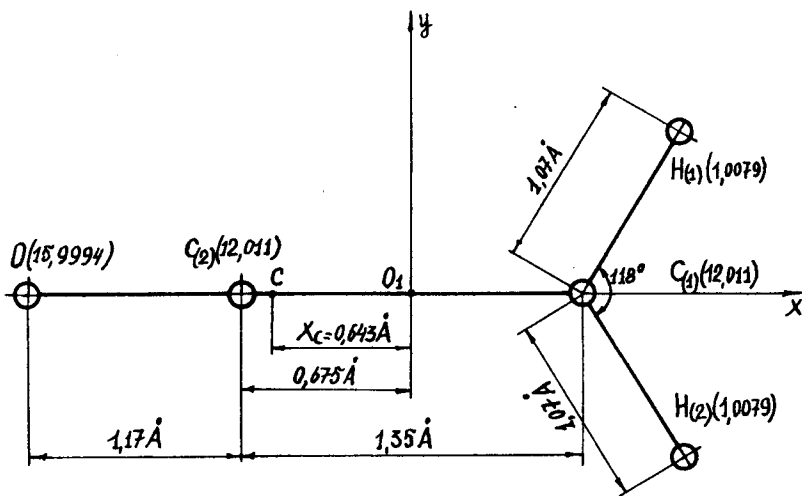


Рис. 6.25

¹ Під “квазітвердою молекулою” розуміють молекулу, в якій коливання ядер надто малі порівняно з між’ядерними відстанями. Тому, нехтуючи коливаннями ядер, розглядають молекулу як тверде тіло.

² 1 \AA (ангстрем) = 10^{-8} см.

³ а.о.м. — атомна одиниця маси = $1,660565(86) \cdot 10^{-27}$ кг.

Приклад 6.11. Визначити моменти інерції плоских фігур відносно центральних осей (рис. 6.26).

Розв'язання. 1. Визначення моментів інерції прямокутника (рис. 6.26, а, рис. 6.27). Момент інерції плоскої фігури відносно будь-якої осі, наприклад осі x , визначається за формулою (6.18)

$$J_x = \int_{(S)} y^2 dS. \quad (1)$$

Скористаємося формулою (1) та визначимо момент інерції прямокутника відносно осі x (рис. 6.27). Виділимо елемент площі dS :

$$dS = bdy.$$

Підставляючи значення dS у рівність (1), знайдемо

$$J_x = \int_{(S)} y^2 bdy = b \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3}. \quad (2)$$

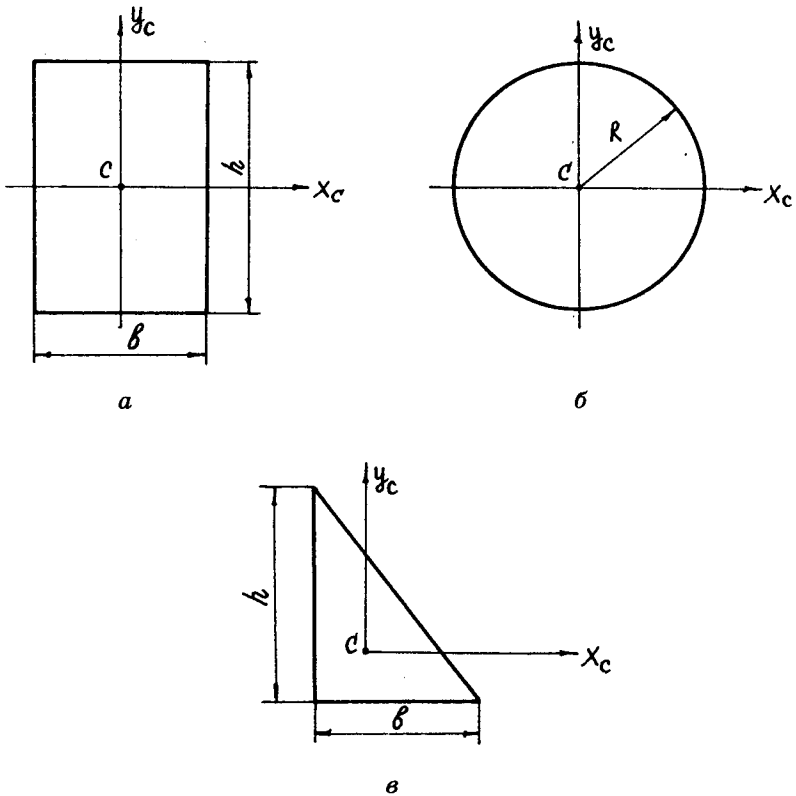


Рис. 6.26

За формулою (6.23) визначимо момент інерції прямокутника відносно центральної осі x_c (рис. 6.27):

$$J_{x_c} = J_x - b^2 S = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}. \quad (3)$$

Аналогічно знаходимо момент інерції прямокутника відносно осі y_c :

$$J_{y_c} = \frac{hb^3}{12}. \quad (4)$$

2. Визначення моментів інерції круга (рис. 6.26, б, рис. 6.28). Скористаємося співвідношенням (6.20):

$$2J_{x_c} = J_p,$$

або

$$J_{x_c} = \frac{J_p}{2}. \quad (5)$$

Для визначення полярного моменту інерції з круга виділимо елементарне кільце товщиною $d\rho$, радіусом ρ та площею $dS = 2\pi\rho d\rho$ (рис. 6.28).

За формулою (6.19) знайдемо

$$J_p = \int_{(S)} \rho^2 dS = \int_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{2\pi}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

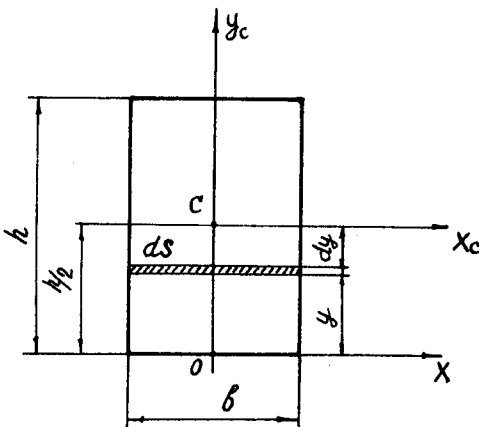


Рис. 6.27

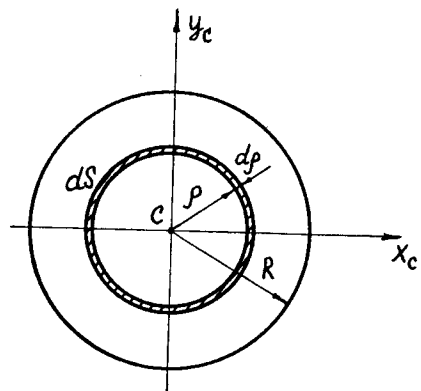


Рис. 6.28

Тоді на підставі рівності (5) маємо

$$J_{x_c} = J_{y_c} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (6)$$

3. Визначення моментів інерції трикутника (рис. 6.26, в, рис. 6.29). Скористаємося формулою (6.18):

$$J_x = \int_{(S)} y^2 dS \quad (7)$$

та визначимо момент інерції трикутника відносно осі x (рис. 6.29). Виділимо елемент площі трикутника dS :

$$dS = b_y dy. \quad (8)$$

З рис. 6.29 випливає співвідношення

$$\frac{b_y y}{h - y} = \frac{b}{h}.$$

Звідси

$$b_y = \frac{b(h - y)}{h}.$$

Тоді рівність (8) набирає вигляду

$$dS = \frac{b(h - y)}{h} dy.$$

Підставляючи це значення в рівність (7), знайдемо

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(S)} y^2 dS = \int_0^h y^2 \frac{b(h - y)}{h} dy = \\ &= \frac{b}{h} \left(\frac{y^3 h}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}. \end{aligned}$$

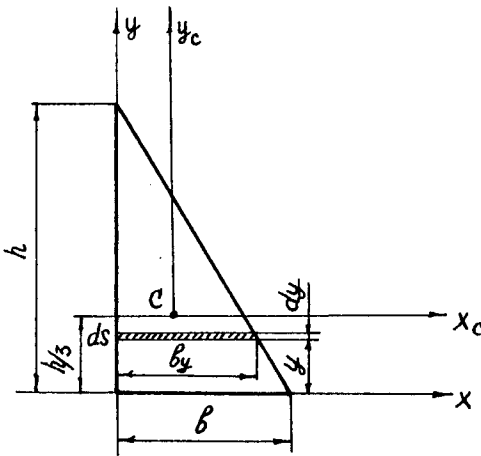


Рис. 6.29

Для визначення моменту інерції трикутника відносно осі x_c (рис. 6.29) використовуємо формулу (6.23):

$$J_{x_c} = J_x - b^2 S = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} bh = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}. \quad (9)$$

Аналогічно визначається момент інерції трикутника відносно осі y_c :

$$J_{y_c} = \frac{hb^3}{36}. \quad (10)$$

Приклад 6.12. Визначити мінімальну ширину a бетонної греблі водозбірного ставу цукрового заводу, що має прямокутний переріз, за умови стійкості при перекиданні, якщо висота греблі $h = 3,5$ м, питома вага бетону $\gamma = 22,5$ кН/м³, горизонтальний тиск води на 1 м довжини греблі з боку верхнього б'єфа $F_1 = 45$ кН, з боку нижнього б'єфа $F_2 = 11,25$ кН. Відстань від точок прикладання сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 до підвалини греблі $h_1 = 1$ м, $h_2 = 0,5$ м (рис. 6.30).

Розв'язання. Розглянемо частину греблі, що має форму прямокутного паралелепіпеда, розміри якого дорівнюють h , a та 1 м у напрямі довжини греблі.

З рис. 6.30 випливає, що оскільки $F_1 > F_2$ та $h_1 > h_2$, то можливим перекиданням греблі буде її обертання навколо ребра O .

Складаємо рівняння рівноваги моментів усіх сил, що діють на греблю відносно точки O :

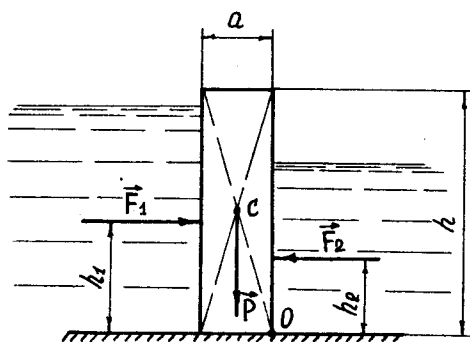


Рис. 6.30

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0; \quad -F_1 h_1 + P \frac{a}{2} + F_2 h_2 = 0,$$

або

$$F_1 h_1 = \frac{Pa}{2} + F_2 h_2.$$

Момент, що дорівнює добутку $F_1 h_1$, називається *перекидним моментом*:

$$M_{\text{пер}} = F_1 h_1 = 45 \cdot 1 = 45 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Момент, що визначається сумою $\frac{Pa}{2} + F_2 h_2$, називається *затримним моментом*:

$$M_{\text{зат}} = \frac{Pa}{2} + F_2 h_2 = \frac{\gamma h a^2}{2} = F_2 h_2 = \frac{22,5 \cdot 3,5 a^2}{2} + 11,25 \cdot 0,5 = 39,4 a^2 + 5,6 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Стійкість при перекиданні визначається відношенням числового значення затримного моменту до числового значення перекидного моменту:

$$k = \frac{M_{\text{зат}}}{M_{\text{пер}}}.$$

Це відношення називається *коефіцієнтом стійкості при перекиданні*.

Очевидно, що у випадку граничної стійкості коефіцієнт стійкості $k = 1$, а у випадку стійкого стану $k > 1$.

У задачі необхідно визначити мінімальну ширину греблі, що відповідає коефіцієнту стійкості $k = 1$.

$$\text{Тоді } k = \frac{M_{\text{зат}}}{M_{\text{пер}}} = 1; M_{\text{зат}} = M_{\text{пер}}, \text{ або } 39,4a^2 + 5,6 = 45.$$

Звідси знаходимо $a = 1$ м.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке центр ваги твердого тіла?
2. За якими формулами визначається центр паралельних сил ваги частинок твердого тіла?
3. За якими формулами визначаються координати центра ваги однорідного твердого тіла, що має об'єм?
4. За якими формулами визначаються координати центра ваги плоского однорідного твердого тіла?
5. За якими формулами визначаються координати центра ваги однорідного твердого тіла у вигляді ліній?
6. Де розташований центр ваги однорідного твердого тіла, що має вісь або площину симетрії?
7. Як формулюються теореми Паппа — Гюльдена (теореми 3 та 4)?
8. Назвіть способи визначення координат центра ваги твердих тіл.
9. У чому полягає спосіб розбиття?
10. У чому полягає спосіб доповнення?
11. У чому полягає спосіб інтегрування?
12. У чому полягає експериментальний спосіб?
13. Що таке геометричні характеристики плоских фігур?
14. Що таке статичний момент плоскої фігури?
15. Що таке осьовий момент інерції плоскої фігури?
16. Що таке полярний момент інерції плоскої фігури?
17. Що таке відцентровий момент інерції плоскої фігури?
18. Чому дорівнює момент інерції плоскої фігури відносно осі, паралельній тій, що проходить через центр ваги фігури?
19. Що таке коефіцієнт стійкості при перекиданні?
20. Чому дорівнює коефіцієнт стійкості у випадку граничної стійкості й у випадку стійкого стану?

Глава 7

ВИКОРИСТАННЯ ПЕРСОНАЛЬНИХ КОМП'ЮТЕРІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

7.1. Алгоритм розв'язання задач статического тіла з використанням ПЕОМ

Застосування персональних електронних обчислювальних машин (ПЕОМ) при розв'язанні задач статического тіла дає змогу значну частину часу використати на творчий процес — опанування необхідних для розв'язання задачі теоретичних положень, складання рівнянь рівноваги систем сил, що діють на тверде тіло або систему твердих тіл, визначення шляхів перевірки розрахунків тощо.

Отже, на підставі розглянутого, алгоритм розв'язання задач статического тіла з використанням ПЕОМ складається з трьох етапів.

I етап. Вибирають тверде тіло або систему твердих тіл, рівновагу якого або яких треба розглянути, щоб визначити невідомі сили, що діють на тверде тіло або систему твердих тіл. Визначають вид в'язей, звільняють тверде тіло або систему твердих тіл від в'язей та прикладають до тіла активні сили і реакції в'язей. Визначають систему сил, що діє на тверде тіло або систему твердих тіл, і складають відповідні рівняння рівноваги.

II етап. Установлюють спосіб перевірки визначення невідомих сил з рівнянь I етапу. Для цього розглядають можливість використання рівнянь рівноваги даної системи сил, відмінних від тих, що були складені на першому етапі, або можливість застосування інших способів розв'язання задачі тощо. Визначивши шлях перевірки, складають відповідні рівняння.

III етап. Розв'язання систем алгебричних рівнянь, що були складені при виконанні етапів I і II, та аналіз здобутих результатів. Виконуються з допомогою ПЕОМ у діалоговому режимі за програмою, блок-схему якої подано на рис. 7.1¹.

Зауважимо, що наведена програма розв'язання задач статички твердого тіла має значні відмінності від відомих у літературі подібних програм. По-перше, це можливість розв'язання систем лінійних рівнянь різними методами, тобто методом Гаусса з вибором головного елемента, методом обернення та методом відбиття; по-друге, це застосування діалогу при розв'язанні задачі, який у разі вдалої відповіді на запитання продовжується до кінця розв'язання задачі. В разі невдалої відповіді дається рекомендація, щоб виправити помилку; по-третє, це введення системи лінійних рівнянь у ПЕОМ в тому вигляді, який вони мають при складанні рівнянь рівноваги, тобто немає необхідності складати матриці коефіцієнтів цих рівнянь, що у багатьох випадках є джерелом різних помилок.

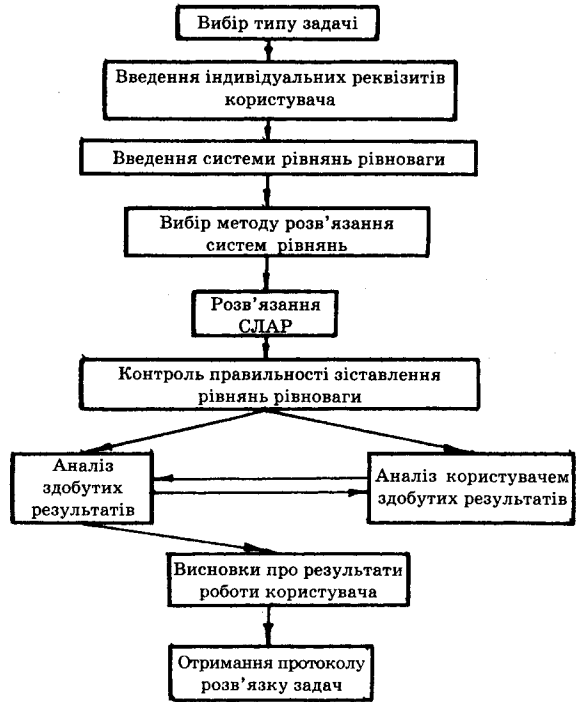


Рис. 7.1

7.2. Приклади розв'язання задач статички твердого тіла з використанням ПЕОМ

Приклад 7.1. Горизонтальна прямокутна плита має вагу $P = 3$ кН. Вона закріплена за допомогою сферичного шарніра (точка A), циліндричного шарніра (точка B) і стрижня DD' (рис. 7.2). До плити в площині, що паралельна площі xAz , прикладено силу $F = 8$ кН, а в площині, що паралельна площині yAz , прикладено пару з моментом $M = 4$ кН · м. Визначити реакції опор A , B та стрижня DD' , якщо $\alpha = 60^\circ$; $AC = 0,8$ м; $AB = 1,2$ м; $BE = 0,4$ м; $EH = 0,4$ м.

¹ Докладні відомості про діалоговий режим роботи програми та її листинг містяться у навчальному посібнику: А.А. Бондаренко, О.М. Переяславцев, О.О. Дубінін та ін. Статика: Виконання розрахунково-графічних завдань дисципліни "Теоретична механіка" з використанням персональних комп'ютерів типу IBM PC. — К.: НМК ВО, 1993. — 184 с.

Розв'язання

Етап I. Щоб визначити невідомі реакції опор, потрібно розглянути рівновагу плити. Звільняємо плиту від в'язей. На плиту діють сили реакцій $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6$, задані сили \bar{P}, \bar{F} та пара сил з моментом M . Сила та пара сил утворюють просторову довільну систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці A і складемо рівняння рівноваги просторової довільної системи сил:

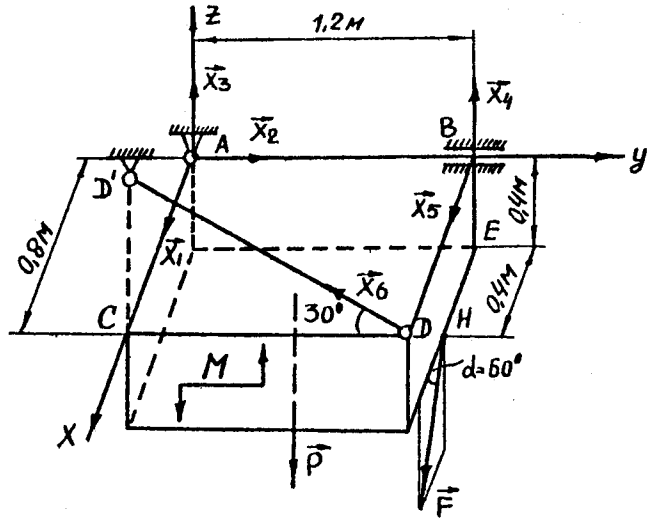


Рис. 7.2

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_1 + x_5 + F \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_2 + x_6 + F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad x_3 + x_4 - P - F \sin 60^\circ + x_6 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad -0,6P + M - F \sin 60^\circ \cdot 1,2 + x_6 \sin 30^\circ \cdot 1,2 + x_4 \cdot 1,2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_6 \sin 30^\circ \cdot 0,8 + P \cdot 0,4 + F \sin 60^\circ \cdot 0,4 - F \cos 60^\circ \cdot 0,4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_5 \cdot 1,2 - F \cos 60^\circ \cdot 1,2 - x_6 \cos 30^\circ \cdot 0,8 = 0.$$

Враховуючи числові значення, здобудемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = -4; \\ x_2 - 0,866x_6 = 0; \\ x_3 + x_4 + 0,5x_6 = 9,928; \\ 1,2x_4 + 0,6x_6 = 6,114; \\ 0,4x_6 = 2,371; \\ -1,2x_5 - 0,693x_6 = 4,8. \end{cases} \quad (\text{A})$$

Етап II. Побудуємо систему координат з початком у точці N (рис. 7.3) і складемо рівняння рівноваги просторової довільної системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_1 + x_5 + F \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_2 - x_6 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad x_3 + x_4 + x_6 \sin 30^\circ - P - F \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_3 \cdot 0,6 + x_4 \cdot 0,6 + x_6 \sin 30^\circ \cdot 0,6 - F \sin 60^\circ \cdot 0,6 + M = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad x_3 \cdot 0,4 + x_4 \cdot 0,4 - F \cos 60^\circ \cdot 0,4 - x_6 \cdot 0,4 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad x_1 \cdot 0,6 - x_5 \cdot 0,6 - x_6 \cdot 0,4 \cos 30^\circ - F \cdot 0,6 \cos 60^\circ - x_2 \cdot 0,4 = 0.$$

Враховуючи числові значення, здобудемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = -4; \\ x_2 - 0,866x_6 = 0; \\ x_3 + x_4 + 0,5x_6 = 9,928; \\ -0,6x_3 + 0,6x_4 + 0,3x_6 = 0,157; \\ x_3 + x_4 - 0,5x_6 = 4; \\ 0,6x_1 - 0,4x_2 - 0,6x_5 = 0,346x_6 = 2,4. \end{cases} \quad (\text{B})$$

Етап III. Розв'язання системи рівнянь (A) і (B) виконується на персональному комп'ютері IBM PC у режимі діалогу за програмою, блок-схему якої подано на рис. 7.1. При цьому програма передбачає порівняння результатів розрахунку невідомих реакцій, знайдених з рівнянь I й II етапів, що є перевіркою розрахунків.

Приклад 7.2. Визначити опорні реакції ферми (рис. 7.4) від зовнішніх сил, а також зусилля в стрижнях ферми способом вирізання вузлів. Додатково визначити зусилля в трьох стрижнях ферми від того самого навантаження способом перерізів.

Дано: $P_1 = 3$ кН, $P_2 = 5$ кН, $P_3 = 5$ кН, $a = 3$ м, $\alpha = 60^\circ$. Номери стрижнів для розрахунку зусиль у стрижнях способом перерізів — 5, 6 і 8.

Ферму розраховують у три етапи: на I етапі складають рівняння рівноваги для визначення опорних реакцій і зусиль в стрижнях ферми способом вирізання вузлів; на II етапі складають рівняння рівноваги ферми і рівняння для визначення зусиль у заданих (за умовою задачі) стрижнях способом перерізів;

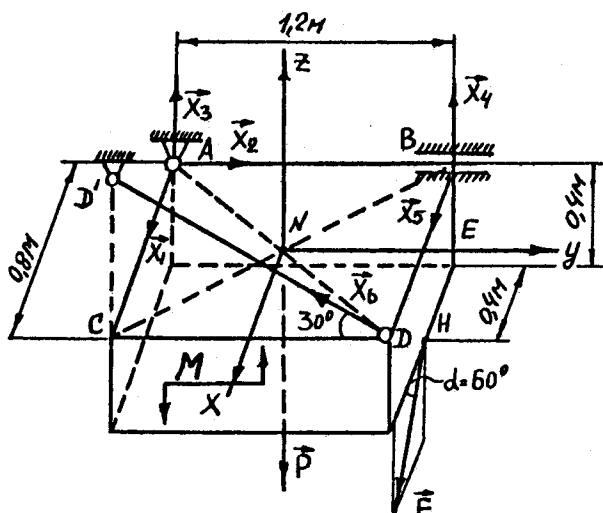


Рис. 7.3

на III — складені на I й II етапах рівняння розв'язують за допомогою ПЕОМ. При цьому програма передбачає порівняння результатів розрахунку невідомих реакцій опор і зусиль в стрижнях, знайдених з рівнянь I й II етапів, що є перевіркою розрахунків.

Розв'язання. Ферма буде зовнішньо статично визначеною, якщо опорні реакції ферми можна визначити з рівнянь рівноваги статки, і внутрішньо статично визначеною, якщо внутрішні зусилля в стрижнях ферми можна визначити з рівнянь рівноваги статки. У плоскій зовнішньо та внутрішньо статично визначеній фермі має місце залежність

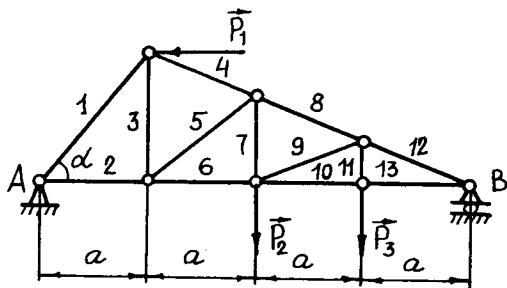


Рис. 7.4

$$2n - 3 = N, \tag{7.1}$$

де n — число вузлів ферми; N — число стрижнів.

Перевіряємо, чи є ферма статично визначеною. Кількість вузлів $n = 8$. Кількість стрижнів $N = 13$. Підставляючи ці значення у формулу (7.1), здобудемо $2 \cdot 8 - 3 = 13$, тобто тотожність. Ферма статично визначена.

Етап I. 1. Позначимо реакції опор A і B ферми літерами x_i , де $i = N + 1, 2, 3$ (N — кількість стрижнів) (рис. 7.5).

2. Нумеруємо вузли ферми цифрами I, II, III і т.д. (рис. 7.5).

3. Уявно вирізаємо вузол I (вузол на опорі A) і складаємо рівняння рівноваги цього вузла [невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла), тобто слухне припущення, що стрижні розтягнені].

Сили в стрижнях позначаємо \bar{x}_1 і \bar{x}_2 , де 1 і 2 — номери стрижнів (рис. 7.5 і 7.6).

Дістаємо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 + x_1 \cos \alpha + x_{15} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 \sin \alpha + x_{14} = 0.$$

Враховуючи значення $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$, здобудемо рівняння:

$$0,5x_1 + x_2 + x_{15} = 0; \quad (7.2)$$

$$0,866x_1 + x_{14} = 0. \quad (7.3)$$

4. Уявно вирізаємо вузол II і складаємо рівняння рівноваги цього вузла [невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла) і позначаємо \bar{x}_1 , \bar{x}_3 і \bar{x}_4 , де 1, 3 і 4 — номери стрижнів (див. рис. 7.5 і 7.7)].

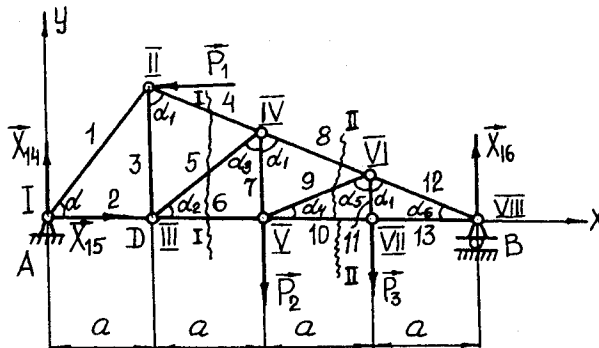


Рис. 7.5

Дістанемо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_1 \sin(90^\circ - \alpha) + x_4 \sin \alpha_1 - P_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -x_1 \cos(90^\circ - \alpha) - x_3 - x_4 \cos \alpha_1 = 0,$$

де $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = 0,5$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = 0,866$.

З трикутника, вершини якого розташовані у вузлах II, III і IV (див. рис. 7.5), знаходимо:

$$\cos \alpha_1 = \frac{l_3}{(l_4 + l_8 + l_{12})} = \frac{5,1961}{10,3923} = 0,5;$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{3a}{(l_4 + l_8 + l_{12})} = \frac{9}{10,3923} = 0,866,$$

$$\text{де } l_3 = \sqrt{l_1^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{0,5}\right)^2 - 3^2} = 5,1961 \text{ (м);}$$

$(l_4 + l_8 + l_{12}) = \sqrt{l_3^2 + (3a)^2} = \sqrt{27 + 81} = 10,3923 \text{ (м); } l_1, l_3, l_4, l_8, l_{12}$ — довжина відповідних стрижнів.

Враховуючи значення $\sin(90^\circ - \alpha)$, $\cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos \alpha_1$, $\sin \alpha_1$, і P_1 , збудемо рівняння:

$$-0,5x_1 + 0,866x_4 = 3; \quad (7.4)$$

$$-0,866x_1 - x_3 - 0,5x_4 = 0. \quad (7.5)$$

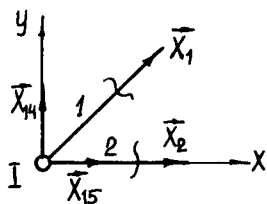


Рис. 7.6

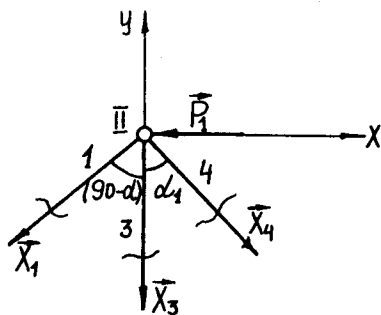


Рис. 7.7

5. Уявно вирізаємо вузол III і складаємо рівняння рівноваги цього вузла [невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла) і позначаємо \bar{x}_2 , \bar{x}_3 , \bar{x}_5 і \bar{x}_6 , де 2, 3, 5 і 6 — номери стрижнів (див. рис. 7.5 і рис. 7.8)].
Дістанемо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_2 + x_5 \cos \alpha_2 + x_6 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_3 + x_5 \sin \alpha_2 = 0.$$

З трикутника, вершини якого розташовані у вузлах III, IV, V (див. рис. 7.5), знаходимо:

$$\cos \alpha_2 = \frac{a}{l_5} = \frac{3}{4,5825} = 0,6547; \quad \sin \alpha_2 = \frac{l_7}{l_5} = \frac{3,4641}{4,5825} = 0,7559,$$

де l_5 , l_7 — довжина відповідних стрижнів:

$$l_5 = \sqrt{a^2 + l_7^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}l_3\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{2 \cdot 5,1961}{3}\right)^2} = 4,5825 \text{ (м);}$$

$$l_7 = \frac{2}{3}l_3 = \frac{2 \cdot 5,1961}{3} = 3,4641 \text{ (м).}$$

Враховуючи значення $\cos \alpha_2$ і $\sin \alpha_2$, збудуємо рівняння:

$$-x_2 + 0,6547x_5 + x_6 = 0; \tag{7.6}$$

$$-x_3 + 0,7559 = 0. \tag{7.7}$$

6. Уявно вирізаємо вузол IV і складаємо рівняння рівноваги цього вузла [невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла) і позначаємо \bar{x}_4 , \bar{x}_5 , \bar{x}_7 і \bar{x}_8 , де 4, 5, 7 і 8 — номери стрижнів (див. рис. 7.5 і 7.9)].
Дістанемо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_4 \sin \alpha_1 - x_5 \sin \alpha_3 + x_8 \sin \alpha_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_4 \cos \alpha_1 - x_5 \cos \alpha_3 - x_7 - x_8 \cos \alpha_1 = 0,$$

де $\sin \alpha_1 = 0,866$, $\cos \alpha_1 = 0,5$.

З трикутника, вершини якого розташовані у вузлах III, IV і V (див. рис. 7.5), знаходимо:

$$\cos \alpha_3 = \frac{l_7}{l_5} = \frac{3,4641}{4,5825} = 0,7559; \quad \sin \alpha_3 = \frac{a}{l_5} = \frac{3}{4,5825} = 0,6547.$$

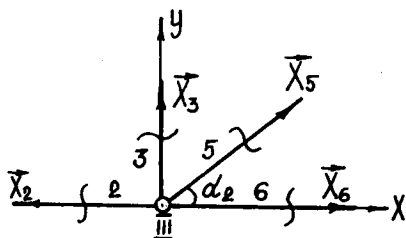


Рис. 7.8

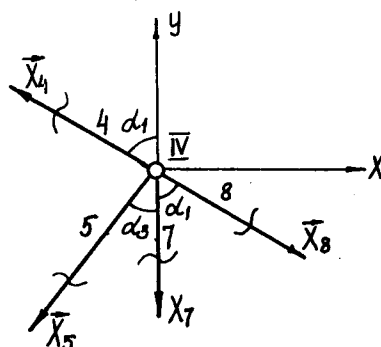


Рис. 7.9

Враховуючи значення $\cos \alpha_3$ і $\sin \alpha_3$, дістанемо рівняння:

$$-0,866x_4 - 0,6547x_5 + 0,866x_8 = 0; \quad (7.8)$$

$$0,5x_4 - 0,7559x_5 - x_7 - 0,5x_8 = 0. \quad (7.9)$$

7. Уявно вирізаємо вузол V і складаємо рівняння рівноваги цього вузла [невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла) і позначаємо \bar{x}_6 , \bar{x}_7 , \bar{x}_9 і \bar{x}_{10} , де 6, 7, 9, 10 — номери стрижнів (див. рис. 7.5 і 7.10)].

Дістаємо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_6 + x_9 \cos \alpha_4 + x_{10} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_7 + x_9 \sin \alpha_4 - P_2 = 0.$$

З трикутника, вершини якого розташовані у вузлах V, VI і VII (див. рис. 7.5), знаходимо:

$$\cos \alpha_4 = \frac{a}{l_9} = \frac{3}{3,4641} = 0,866; \quad \sin \alpha_4 = \frac{l_{11}}{l_9} = \frac{1,7320}{3,4641} = 0,5,$$

де l_9 , l_{11} — довжина відповідних стрижнів:

$$l_9 = \sqrt{a^2 + l_{11}^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l_7}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3,4641}{2}\right)^2} = 3,4641 \text{ (м);}$$

$$l_{11} = \frac{l_7}{2} = \frac{3,4641}{2} = 1,732 \text{ (м).}$$

Враховуючи значення $\cos \alpha_4$, $\sin \alpha_4$ і P_2 , здобудемо рівняння:

$$-x_6 + 0,866x_9 + x_{10} = 0; \quad (7.10)$$

$$x_7 + 0,5x_9 = 5. \quad (7.11)$$

8. Уявно вирізаємо вузол VI і складаємо рівняння рівноваги цього вузла [невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла) і позначаємо \bar{x}_8 , \bar{x}_9 , \bar{x}_{11} і \bar{x}_{12} , де 8, 9, 11 і 12 — номери стрижнів (див. рис. 7.5 і 7.11)].
Дістаємо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_8 \sin \alpha_1 - x_9 \sin \alpha_5 + x_{12} \sin \alpha_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_8 \cos \alpha_1 - x_9 \cos \alpha_5 - x_{11} - x_{12} \cos \alpha_1 = 0.$$

З трикутника, вершини якого розташовані у вузлах V, VI і VII (див. рис. 7.5), знаходимо:

$$\sin \alpha_5 = \frac{a}{l_9} = \frac{3}{3,4641} = 0,866; \quad \cos \alpha_5 = \frac{l_{11}}{l_9} = \frac{1,732}{3,4641} = 0,5.$$

Враховуючи значення $\sin \alpha_1$, $\cos \alpha_1$, $\sin \alpha_5$ і $\cos \alpha_5$, здобудемо рівняння:

$$-x_8 - x_9 + x_{12} = 0; \quad (7.12)$$

$$x_8 - x_9 - 2x_{11} - x_{12} = 0. \quad (7.13)$$

9. Уявно вирізаємо вузол VII і складаємо рівняння рівноваги цього вузла [невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла) і позначаємо \bar{x}_{10} , \bar{x}_{11} і \bar{x}_{13} , де 10, 11 і 13 — номери стрижнів (див. рис. 7.5 і 7.12)].
Дістаємо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_{10} + x_{13} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_{11} - P_3 = 0.$$

Враховуючи значення P_3 , здобудемо рівняння:

$$-x_{10} + x_{13} = 0; \quad (7.14)$$

$$x_{11} = 5. \quad (7.15)$$

10. Уявно вирізаємо вузол VIII і складаємо рівняння рівноваги цього вузла [невідомі сили в стрижнях напрямляємо від перерізів (від вузла) і позначаємо \bar{x}_{12} і \bar{x}_{13} , де 12 і 13 — номери стрижнів (див. рис. 7.5 і 7.13)].

Дістаємо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_{12} \cos \alpha_6 - x_{13} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_{12} \sin \alpha_6 + x_{16} = 0.$$

З трикутника, вершини якого розташовані у вузлах VI, VII і VIII (див. рис. 7.5), знаходимо:

$$\cos \alpha_6 = \frac{a}{l_{12}} = \frac{3}{3,4641} = 0,866; \quad \sin \alpha_6 = \frac{l_{11}}{l_{12}} = \frac{1,732}{3,4641} = 0,5,$$

де l_{12} — довжина стрижня 12:

$$l_{12} = \frac{l_{11}}{\cos \alpha_1} = \frac{1,732}{0,5} = 3,4641 \text{ (м)}.$$

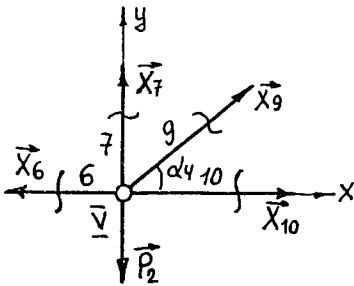


Рис. 7.10

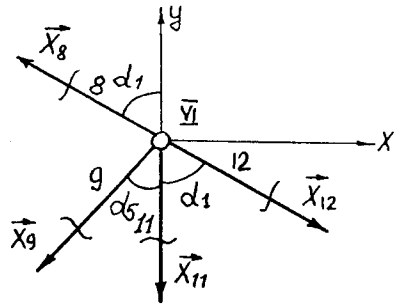


Рис. 7.11

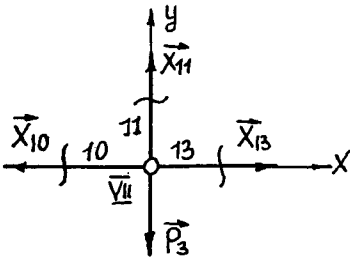


Рис. 7.12

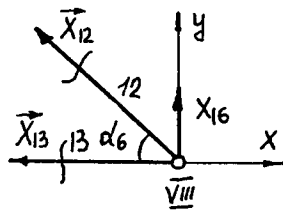


Рис. 7.13

Враховуючи значення $\cos \alpha_6$ і $\sin \alpha_6$, дістаємо рівняння:

$$0,866x_{12} - x_{13} = 0; \quad (7.16)$$

$$0,5x_{12} + x_{16} = 0. \quad (7.17)$$

Щоб виконати III етап, випишемо складені рівняння (7.2)—(7.17) у системі (A):

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5x_1 + x_2 + x_{15} = 0; \\ 0,866x_1 + x_{14} = 0; \\ -0,5x_1 + 0,866x_4 = 3; \\ -0,866x_1 - x_3 - 0,5x_4 = 0; \\ -x_2 + 0,6547x_5 + x_6 = 0; \\ x_3 + 0,7559x_5 = 0; \\ -0,866x_4 - 0,6547x_5 + 0,866x_8 = 0; \\ 0,5x_4 - 0,7559x_5 - x_7 - 0,5x_8 = 0; \\ -x_6 + 0,866x_9 + x_{10} = 0; \\ x_7 + 0,5x_9 = 5; \\ -x_8 - x_9 + x_{12} = 0; \\ x_8 - x_9 - 2x_{11} - x_{12} = 0; \\ -x_{10} + x_{13} = 0; \\ x_{11} = 5; \\ -0,866x_{12} - x_{13} = 0; \\ 0,5x_{12} + x_{16} = 0. \end{array} \right. \quad (A)$$

II етап. 1. Складаємо рівняння рівноваги ферми, напрямляючи осі так, як показано на рис. 7.5:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_{15} - P_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_{14} + x_{16} - P_2 - P_3 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad x_{16} \cdot 4a + P_1 l_3 - P_2 \cdot 2a - P_3 \cdot 3a = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , P_2 , P_3 , a і l_3 , здобудемо рівняння:

$$x_{15} = 3; \quad (7.18)$$

$$x_{14} + x_{16} = 10; \quad (7.19)$$

$$x_{16} = 4,951. \quad (7.20)$$

2. Щоб розрахувати зусилля в стрижнях ферми способом перерізів, ферму уявно перерізають на дві частини. Причому переріз має проходити через стрижень, в якому визначається зусилля, та ще через два стрижні, тобто всього через три стрижні, але через такі, що не збігаються в одному вузлі.

Для визначення зусиль в одному з перерізаних стрижнів, щоб рівняння містило лише одне невідоме, складають рівняння моментів сил, які діють на частину ферми, що розглядається, відносно точки, в якій перетинаються два інших перерізаних стрижні.

Щоб знайти зусилля в стрижнях 5 і 6 ферми, проводимо переріз I—I (див. рис. 7.5). Розглянемо рівновагу правої частини. Для цього зображуємо її окремо (рис. 7.14). Припускаючи, що перерізані стрижні 4, 5 і 6 розтягнені, напрямляємо сили \vec{x}_4 , \vec{x}_5 і \vec{x}_6 від перерізів. Складемо два рівняння рівноваги, тобто рівняння суми моментів сил відносно точок C і B:

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -x_6 l_7 - P_3 a + x_{16} \cdot 2a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad x_5 \cos \alpha_3 \cdot 2a + x_5 \sin \alpha_3 \cdot l_7 + P_2 \cdot 2a + P_3 a = 0.$$

Враховуючи значення P_2 , P_3 , a , l_7 , $\cos \alpha_3$ і $\sin \alpha_3$, здобудемо рівняння:

$$-3,4641x_6 + 6x_{16} = 15; \quad (7.21)$$

$$6,8033x_5 = -45. \quad (7.22)$$

Щоб знайти зусилля в стрижні 8 ферми, проводимо переріз II—II (див. рис. 7.5).

Розглянемо рівновагу правої частини. Для цього зображуємо її окремо (рис. 7.15). Припускаючи, що перерізані стрижні 8, 9 і 10 розтягнені, напрямляємо сили \vec{x}_8 , \vec{x}_9 і \vec{x}_{10} від перерізів (рис. 7.15). Складемо рівняння рівноваги, тобто рівняння суми моментів сил відносно точки D:

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0; \quad x_8 l_7 \sin \alpha_1 + x_{16} \cdot 2a - P_3 a = 0.$$

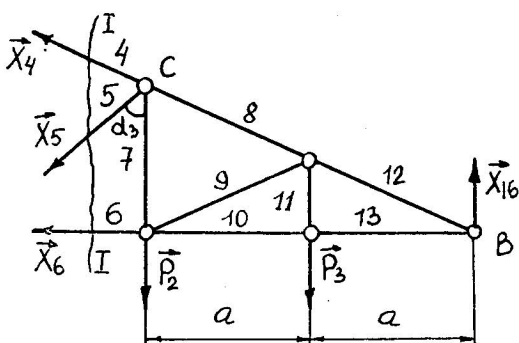


Рис. 7.14

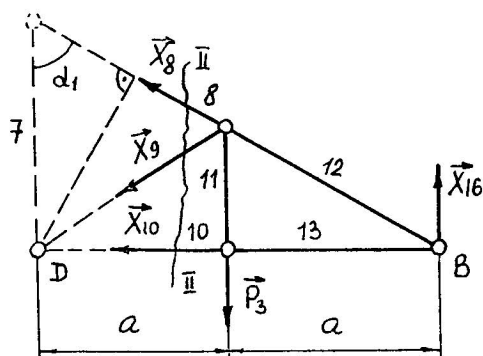


Рис. 7.15

Враховуючи значення P_3 , a , l_7 і $\sin \alpha_1$, здобудемо рівняння

$$2,9999x_8 + 6x_{16} = 15. \quad (7.23)$$

Щоб виконати III етап, виписуємо складені рівняння (7.18)—(7.23) у системі (B):

$$\begin{cases} x_{15} = 0; \\ x_{14} + x_{16} = 10; \\ x_{16} = 4,951; \\ -3,4641x_6 + 6x_{16} = 15; \\ 6,8033x_5 = -45; \\ 2,9999x_8 + 6x_{16} = 15. \end{cases} \quad (B)$$

Етап III. Розв'язання систем рівнянь (A) і (B) виконується на персональному комп'ютері IBM PC у режимі діалогу за програмою, блок-схему якої подано на рис. 7.1.

Приклад 7.3. Конструкція складена з двох частин. Визначити, за якого способу з'єднання частин конструкції (рис. 7.16 і 7.17) модуль реакції M_A найменший, і для цього варіанта з'єднання визначити реакції опор, а також з'єднання C .

Дано: $P = 11$ кН, $m_2 = 4$ кН, $M = 5$ кН, $q = 1,3$ кН/м.

Розв'язання. Розрахунок здійснюють за двома варіантами. У першому визначають зовнішні та внутрішні реакції конструкції, поданої на рис. 7.16, у другому — зовнішні та внутрішні реакції конструкції, поданої на рис. 7.17. Кожний з варіантів виконують у три етапи: на I уявно роз'єднують конструкцію на дві частини по з'єднанню C і складають рівняння рівноваги для визначення опорних реакцій і реакцій у з'єднанні C для кожної частини конструкції; на II складають рівняння рівноваги конструкції і, крім того, рівняння рівноваги якої-небудь однієї з її частин; на III — складені на I і II етапах рівняння розв'язують за допомогою ПЕОМ. При цьому програма передбачає порівняння результатів розрахунку невідомих реакцій опор і реакцій у з'єднанні C , знайдених з рівнянь I й II етапів, що є перевіркою розрахунків. На III етапі визначають найменший модуль реакції.

1-й варіант

Етап I. 1. Роз'єднуємо конструкцію, зображену на рис. 7.16, по з'єднанню C на дві частини (рис. 7.18 і 7.19). Реакції зовнішніх в'язей (опор) і реакції внутрішніх в'язей (з'єднання C) позначаємо \bar{x}_i або x_i , де $i = 1, 2, 3, \dots$.

За законом рівності дії і протидії з боку правої частини конструкції на ліву в шарнірі C діють протилежні за напрямом, але рівні за модулем реакції \bar{x}_4 і \bar{x}_5 (рис. 7.18 і 7.19).

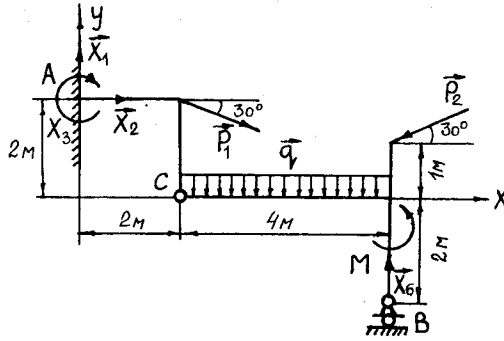


Рис. 7.16

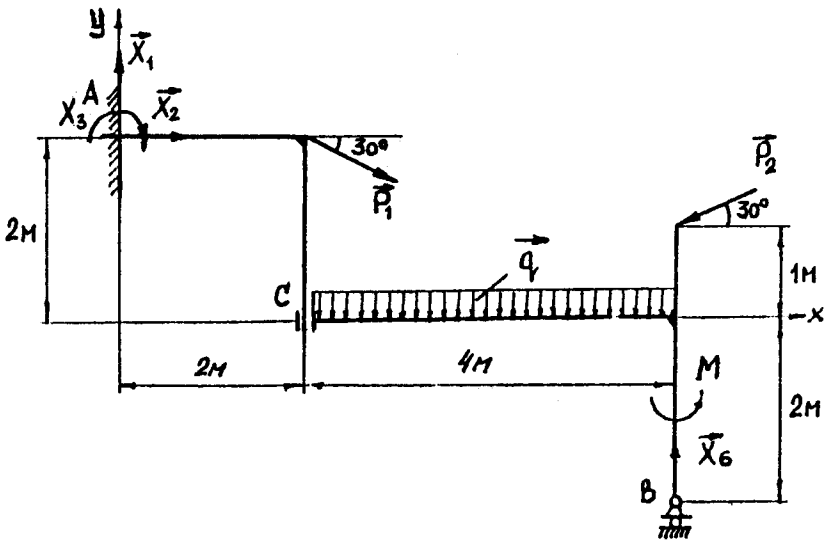


Рис. 7.17

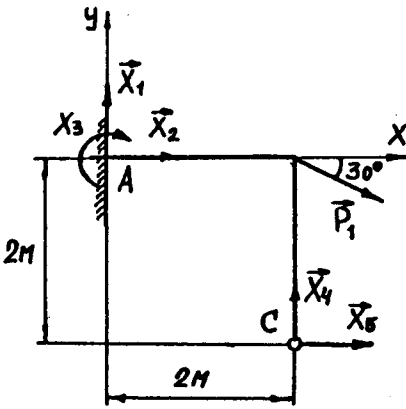


Рис. 7.18

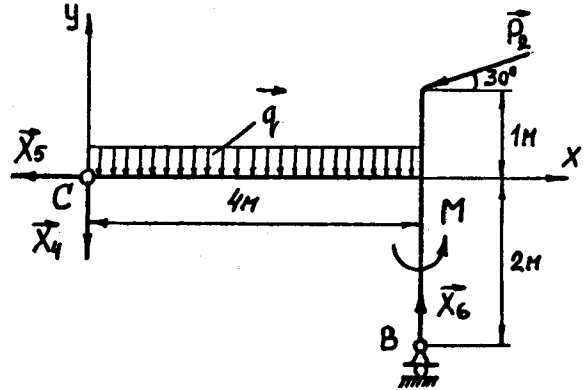


Рис. 7.19

2. Складемо рівняння рівноваги лівої частини конструкції (рис. 7.18):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 + x_5 + P_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 + x_4 - P_1 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_3 + x_4 \cdot 2 + x_5 \cdot 2 - P_1 \sin 30^\circ \cdot 2 = 0.$$

Враховуючи значення P , $\cos 30^\circ$ і $\sin 30^\circ$, здобудемо рівняння:

$$x_2 + x_5 = -9,526; \quad (7.24)$$

$$x_1 + x_4 = 5,5; \quad (7.25)$$

$$-x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 11. \quad (7.26)$$

3. Складемо рівняння рівноваги правої частини конструкції (рис. 7.19):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_5 - P_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -x_4 + x_6 - q \cdot 4 - P_2 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad x_4 \cdot 4 + x_5 \cdot 2 + M + P_2 \cos 30^\circ \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

Враховуючи значення P_2 , q , $\sin 30^\circ$ і $\cos 30^\circ$, здобудемо рівняння:

$$-x_5 = 3,464; \quad (7.27)$$

$$-x_4 + x_6 = 7,2; \quad (7.28)$$

$$4x_4 + 2x_5 = -25,79. \quad (7.29)$$

Щоб виконати III етап, виписуємо складені рівняння (7.24)—(7.29) у систему (A):

$$\begin{cases} x_2 + x_5 = -9,526; \\ x_1 + x_4 = 5,5; \\ -x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 11; \\ -x_5 = 3,464; \\ -x_4 + x_6 = 7,2; \\ 4x_4 + 2x_5 = -25,79. \end{cases} \quad (\text{A})$$

Реакцію M_A позначено x_3 .

Етап II. 1. Складаємо рівняння рівноваги конструкції в цілому (див. рис. 7.16):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 + P_1 \cos 30^\circ - P_2 \cos 30^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 + x_6 - P_1 \sin 30^\circ - q \cdot 4 - P_2 \sin 30^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -x_3 + x_6 \cdot 6 - P_1 \sin 30^\circ \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 4 - \\ -P_2 \sin 30^\circ \cdot 6 - P_2 \cos 30^\circ + M = 0. \end{aligned}$$

Враховуючи значення P_1 , P_2 , q , M , $\sin 30^\circ$ і $\cos 30^\circ$, здобудемо рівняння:

$$x_2 = -6,062; \quad (7.30)$$

$$x_1 + x_6 = 12,7; \quad (7.31)$$

$$-x_3 + 6x_6 = 42,264. \quad (7.32)$$

2. Розглядаємо рівновагу якої-небудь частини конструкції. При цьому враховуємо, що II етап виконується для перевірки розрахунків за рівняннями системи (A). Для цього досить визначити реакції опор A і B з рівнянь системи (A) та рівнянь рівноваги конструкції в цілому і порівняти ці розрахунки. Оскільки у рівняннях рівноваги конструкції в цілому є чотири невідомі: x_1 , x_2 , x_3 і x_6 , а рівнянь — три, то, щоб їх визначити, необхідно додати ще одне рівняння, тобто рівняння рівноваги якої-небудь частини конструкції, в яке увійдуть лише реакції опор. Це рівняння складаємо, розглядаючи рівновагу лівої частини конструкції (див. рис. 7.18):

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -x_1 \cdot 2 - x_2 \cdot 2 - x_3 - P_1 \cos 30^\circ \cdot 2 = 0.$$

Враховуючи значення P_1 і $\cos 30^\circ$, дістаємо рівняння

$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 = 19,052. \quad (7.33)$$

Для виконання III етапу виписуємо складені рівняння (7.30)—(7.33) у систему (В):

$$\begin{cases} x_2 = -6,062; \\ x_1 + x_6 = 12,7; \\ x_3 + 6x_6 = 42,264; \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = 19,052. \end{cases} \quad (\text{В})$$

2-й варіант

Етап I. 1. Роз'єднуємо конструкцію (див. рис. 7.17), по з'єднанню С на дві частини (рис. 7.20 і рис. 7.21). Реакції зовнішніх в'язей (опор А і В) напрямляємо і позначаємо як при виконанні першого варіанта.

За законом рівності дії і протидії з боку правої частини конструкції на ліву в з'єднанні С діють протилежні за напрямом, але рівні за модулем реакції \bar{x}_4 і x_5 (рис. 7.20 і рис. 7.21).

2. Складаємо рівняння рівноваги лівої частини конструкції (рис. 7.20):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 + x_4 + P_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 - P_1 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_3 + x_4 \cdot 2 - x_5 - P_1 \sin 30^\circ \cdot 2 = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , $\cos 30^\circ$ і $\sin 30^\circ$, дістаємо рівняння:

$$x_2 + x_4 = -9,526; \quad (7.34)$$

$$x_1 = 5,5; \quad (7.35)$$

$$-x_3 + 2x_4 - x_5 = 11. \quad (7.36)$$

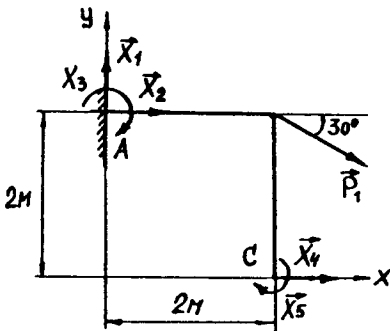


Рис. 7.20

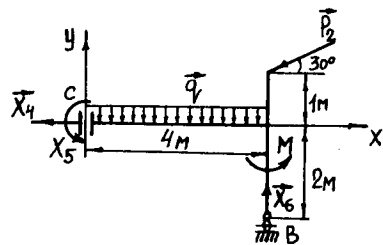


Рис. 7.21

3. Складаємо рівняння рівноваги правої частини конструкції (рис. 7.21):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_4 - P_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_6 - q \cdot 4 - P_2 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad x_4 \cdot 2 + x_5 + q \cdot 4 \cdot 2 + M + P_2 \cos 30^\circ \cdot 3 = 0.$$

Враховуючи значення P_2 , q , M , $\sin 30^\circ$ і $\cos 30^\circ$, здобудемо рівняння:

$$-x_4 = 3,464; \quad (7.37)$$

$$x_6 = 7,2; \quad (7.38)$$

$$2x_4 + x_5 = -25,792. \quad (7.39)$$

Щоб виконати III етап, виписуємо складені рівняння (7.34)—(7.39) у систему (C):

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = -9,526; \\ x_1 = 5,5; \\ -x_3 + 2x_4 - x_5 = 11; \\ -x_4 = 3,464; \\ x_6 = 7,2; \\ 2x_4 + x_5 = -25,792. \end{cases} \quad (C)$$

Реакцію M_A позначено літерою x_3 .

Етап II. 1. Складаємо рівняння рівноваги конструкції у цілому (див. рис. 7.17):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 + P_1 \cos 30^\circ - P_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 + x_6 - P_1 \sin 30^\circ - q \cdot 4 - P_2 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -x_3 + x_6 \cdot 6 - P_1 \sin 30^\circ \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 4 - P_2 \sin 30^\circ \cdot 6 - P_2 \cos 30^\circ + M = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , P_2 , q , M , $\sin 30^\circ$ і $\cos 30^\circ$, дістаємо рівняння:

$$x_2 = -6,062; \quad (7.40)$$

$$x_1 + x_6 = 12,7; \quad (7.41)$$

$$-x_3 + 6x_6 = 42,264. \quad (7.42)$$

2. Розглядаємо рівновагу якої-небудь частини конструкції. Як відомо (див. 1-й варіант, етап II), II етап виконуємо для того, щоб перевірити розрахунки за рівняннями системи (А), а для цього достатньо визначити реакції опор А і В з рівнянь системи (А) і рівнянь рівноваги конструкції в цілому і порівняти ці розрахунки. Оскільки в рівняннях рівноваги конструкції в цілому є чотири невідомі: x_1 , x_2 , x_3 і x_4 , а рівнянь — три, то, щоб визначити ці реакції, слід додати ще одне рівняння, тобто рівняння рівноваги якої-небудь частини конструкції, яке містить лише реакції опор. У цьому випадку скласти таке рівняння неможливо. Тому, розглядаючи рівновагу якої-небудь частини конструкції, треба скласти три рівняння рівноваги, тобто матимемо шість невідомих і шість рівнянь, що дає змогу визначити реакції опор А і В.

Складаємо рівняння рівноваги лівої частини конструкції (див. рис. 7.20):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 + x_4 + P_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 - P_1 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_1 \cdot 2 - x_2 \cdot 2 - x_3 - x_5 - P_1 \cos 30^\circ \cdot 2 = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , $\sin 30^\circ$ і $\cos 30^\circ$, здобудемо рівняння:

$$x_2 + x_4 = -9,526; \quad (7.43)$$

$$x_1 = 5,5; \quad (7.44)$$

$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 = 19,052. \quad (7.45)$$

Щоб виконати III етап, виписуємо складені рівняння (7.40)—(7.45) у систему (D):

$$\begin{cases} x_2 = -6,062; \\ x_1 + x_6 = 12,7; \\ -x_3 + 6x_6 = 42,264; \\ x_2 + x_4 = -9,526; \\ x_1 = 5,5; \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 = 19,052. \end{cases} \quad (D)$$

Етап III. Розв'язання систем рівнянь (А), (В), (С), (D), а також визначення найменшого модуля моменту пар сил $M_A = x_3$ виконується на персональному комп'ютері IBM PC у режимі діалогу за програмою, блок-схему якої подано на рис. 7.1.

Приклад 7.4. Конструкція складена з трьох частин (рис. 7.22) і перебуває в рівновазі під дією системи зовнішніх сил. Визначити реакції опор A , B , C , E , а також з'єднання D .

Дано: $P_1 = 15$ кН, $M_1 = 30$ кН·м, $M_2 = 21$ кН·м.

Розв'язання. Задачу розв'язують у три етапи. На I етапі конструкцію уявно роз'єднують на три частини по з'єднанню D і складають рівняння рівноваги кожної частини. При цьому, оскільки для кожного з трьох тіл можна скласти три рівняння, тобто у сукупності дев'ять, а невідомих реакцій — одинадцять, то, щоб знайти ці невідомі, необхідно додати два рівняння. Ці додаткові рівняння здобудемо, розглядаючи рівновагу з'єднання D . На II етапі складають рівняння рівноваги конструкції в цілому і, крім того, рівняння рівноваги яких-небудь двох її частин. На III — складені на I і II етапах рівняння розв'язують за допомогою ПЕОМ. При цьому програма передбачає порівняння результатів розрахунку невідомих реакцій опор і реакцій у з'єднанні D , знайдених із рівнянь I й II етапів, що є перевіркою розрахунків.

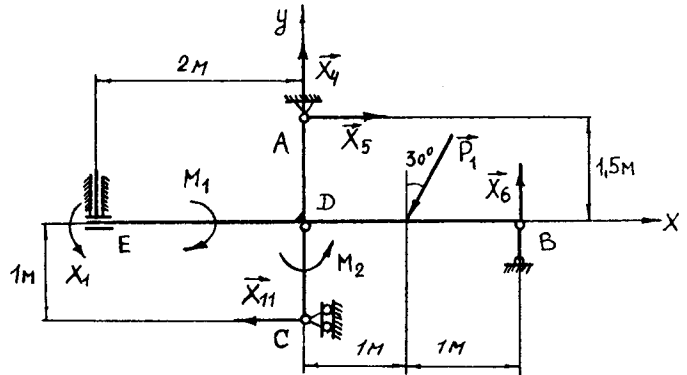


Рис. 7.22

Етап I. 1. Роз'єднуємо конструкцію (рис. 7.22) по з'єднанню D на три частини (рис. 7.23—7.25). Реакції зовнішніх в'язей (опор A , B , C і E) і реакції внутрішніх в'язей (з'єднання D) позначаємо \bar{x}_i або x_i , де $i = 1, 2, 3 \dots$

2. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.23:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_3 + x_5 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_2 + x_4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad x_1 + x_3 \cdot 1,5 - M_1 = 0.$$

Враховуючи значення M_1 , дістаємо рівняння:

$$x_3 + x_5 = 0; \quad (7.46)$$

$$x_2 + x_4 = 0; \quad (7.47)$$

$$x_1 + 1,5x_3 = 30. \quad (7.48)$$

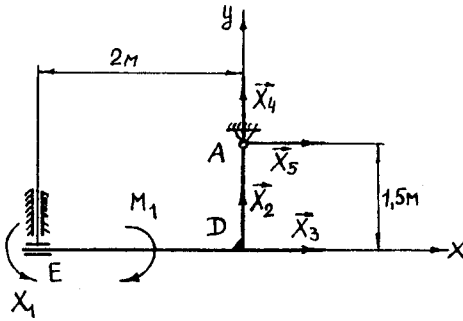


Рис. 7.23

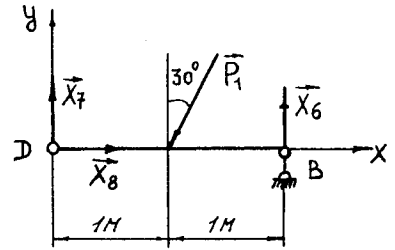


Рис. 7.24

3. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.24:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_8 - P_1 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_6 + x_7 - P_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) = 0; \quad x_6 \cdot 2 - P_1 \cos 30^\circ = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , $\sin 30^\circ$ і $\cos 30^\circ$, дістанемо рівняння:

$$x_8 = 7,5; \quad (7.49)$$

$$x_6 + x_7 = 12,9904; \quad (7.50)$$

$$x_6 = 6,4952. \quad (7.51)$$

4. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.25:

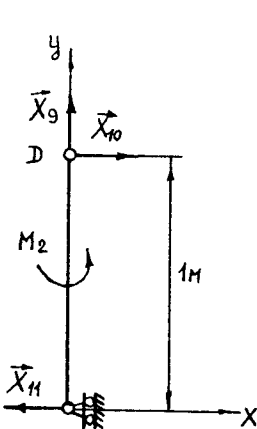


Рис. 7.25

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_{10} - x_{11} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_9 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_{11} + M_2 = 0.$$

Враховуючи значення M_2 , здобудемо рівняння:

$$x_{10} - x_{11} = 0; \quad (7.52)$$

$$x_9 = 0; \quad (7.53)$$

$$x_{11} = 21. \quad (7.54)$$

5. Складаємо рівняння рівноваги з'єднання D (рис. 7.23—7.25):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_3 + x_8 + x_{10} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_2 + x_7 + x_9 = 0.$$

Маємо рівняння:

$$x_3 + x_8 + x_{10} = 0; \quad (7.55)$$

$$x_2 + x_7 + x_9 = 0. \quad (7.56)$$

Для виконання III етапу виписуємо складені рівняння (7.46)—(7.56) у систему (A):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 + x_5 = 0; \\ x_2 + x_4 = 0; \\ x_1 + 1,5x_3 = 30; \\ x_8 = 7,5; \\ x_6 + x_7 = 12,9904; \\ x_6 = 6,4952; \\ x_{10} - x_{11} = 0; \\ x_9 = 0; \\ x_{11} = 21; \\ x_2 + x_7 + x_9 = 0; \\ x_3 + x_8 + x_{10} = 0. \end{array} \right. \quad (A)$$

Етап II. 1. Складаємо рівняння рівноваги конструкції в цілому (див. рис. 7.22). Реакції опор A , B , C і E напрямляємо і позначаємо так, як при виконанні I етапу:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_5 - x_{11} - P_1 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_4 - x_6 - P_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad x_1 + x_6 \cdot 2 - x_{11} \cdot 2,5 - M_1 + M_2 - P_1 \cos 30^\circ - P_1 \sin 30^\circ \cdot 1,5 = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , M_1 , M_2 , $\sin 30^\circ$ і $\cos 30^\circ$, дістаємо рівняння:

$$x_5 - x_{11} = 7,5; \quad (7.57)$$

$$x_4 - x_6 = 12,9904; \quad (7.58)$$

$$x_1 + 2x_6 - 2,5x_{11} = 33,2404. \quad (7.59)$$

2. Розглядаємо рівновагу яких-небудь двох частин конструкції. При цьому враховуємо, що II етап виконується, щоб перевірити розрахунки за рівняннями системи (А). Для цього достатньо визначити реакцію опор А, В, С і Е з рівнянь системи (А) і рівнянь рівноваги конструкції в цілому і порівняти ці розрахунки. Оскільки в рівняннях рівноваги конструкції в цілому є п'ять невідомих: x_1 , x_4 , x_5 , x_6 і x_{11} , а рівнянь — три, то, щоб їх визначити, необхідно додати ще два рівняння, тобто рівняння рівноваги двох частин конструкції, в які увійдуть лише реакції опор. Ці рівняння складаємо, розглядаючи рівновагу частин, зображених на рис. 7.24 і рис. 7.25.

З рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.24, маємо:

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0; \quad x_6 \cdot 2 - P_1 \cos 30^\circ = 0.$$

З рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.25, маємо:

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0; \quad -x_{11} + M_2 = 0.$$

Враховуючи значення M_2 , P_1 і $\cos 30^\circ$, дістаємо рівняння:

$$x_6 = 6,4952; \quad (7.60)$$

$$x_{11} = 21. \quad (7.61)$$

Для виконання III етапу виписуємо складені рівняння (7.57)—(7.61) у систему (В):

$$\begin{cases} x_5 - x_{11} = 7,5; \\ x_4 + x_6 = 12,9904; \\ x_1 + 2x_6 - 2,5x_{11} = 33,2404; \\ x_6 = 6,4952; \\ x_{11} = 21. \end{cases} \quad (B)$$

Етап III. Розв'язання систем рівнянь (А) і (В) виконується на персональному комп'ютері ІВМ РС у режимі діалогу за програмою, блок-схему якої подано на рис. 7.1.

Приклад 7.5. Визначити реакції опор і сили внутрішніх двобічних і однобічних в'язей складеної конструкції (рис. 7.26).

Дано: $P_1 = 8$ кН, $P_2 = 9$ кН, $M = 10$ кН · м, $q = 1,5$ кН/м, EK і NF — гнучка в'язь (нитка).

Розв'язання. Оскільки з умови задачі невідомо, в якій з однобічних в'язей EK чи NF виникає реакція, слід виконати розрахунок за двома варіантами.

1-й варіант

“Працює” в'язь EK , тобто реакція цієї в'язі не дорівнює нулю і має чітко визначений напрям (нитка має бути розтягнутою). В'язь NF “не працює”, тобто її реакція дорівнює нулю.

2-й варіант

“Працює” в'язь NF , тобто реакція цієї в'язі не дорівнює нулю і має строго визначений напрям (нитка має бути розтягнутою). В'язь EK “не працює”, тобто її реакція дорівнює нулю.

Якщо значення реакції однобічної в'язі, знайдене з розв'язання першого варіанта, — величина додатна, тобто реакція має початково указаний напрям, то задача визначення невідомих сил буде розв'язаною.

Якщо значення реакції однобічної в'язі буде величиною від'ємною або дорівнюватиме нулю, то визначені сили не задовольняють заданий режим “роботи” в'язі. В'язь “не працює”. Необхідно виконати розрахунок за 2-м варіантом.

Розрахунок за кожним з варіантів виконують у три етапи: на I конструкцію уявно роз'єднують на три частини по внутрішніх в'язях і складають рівняння рівноваги кожної частини конструкції; на II — складають рівняння рівноваги конструкції в цілому і, крім того, рівняння рівноваги двох її частин; на III — складені на I й II етапах рівняння розв'язують за допомогою ПЕОМ. При цьому програма передбачає порівняння результатів розрахунку невідомих реакцій опор і сил у внутрішніх дво- і однобічних в'язях, знайдених з рівнянь I і II етапів, що є перевіркою розрахунків. На III етапі також визначають “працюючу” в'язь EK .

1-й варіант

Етап I. “Працює” в'язь EK , тобто реакція цієї в'язі не дорівнює нулю, і має напрям уздовж EK від точки E до точки K для частини конструкції DC і вздовж EK від точки K до точки E для частини конструкції DN . В'язь NF “не працює”, тобто реакція цієї в'язі дорівнює нулю.

1. Роз'єдуємо конструкцію на три частини по внутрішніх в'язях (шарнір C , шарнір D і однобічна в'язь EK (рис. 7.26—7.29). Реакції опор, внутрішніх дво- і однобічних в'язей позначаємо \bar{x}_i , де $i = 1, 2, 3 \dots$. За законом рівності дії і протидії в шарнірах C, D і в однобічній в'язі EK діють протилежні за напрямом, але рівні за модулем реакції (рис. 7.27—7.29).

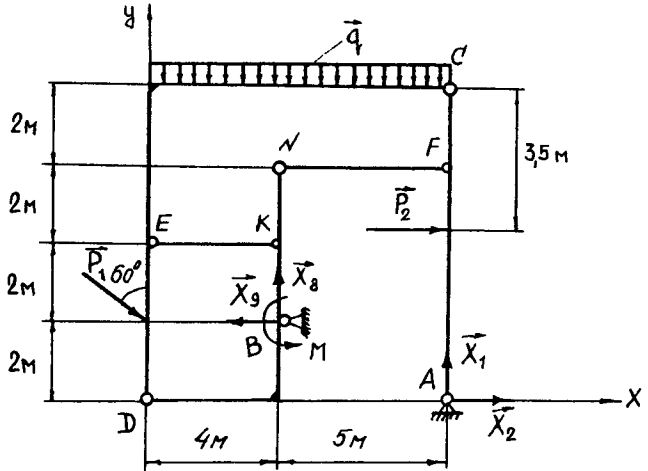


Рис. 7.26

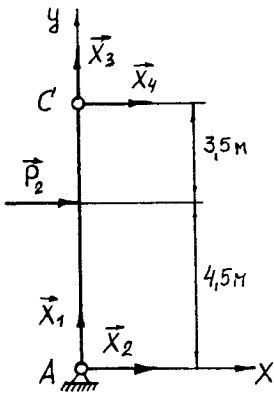


Рис. 7.27

2. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис.7.27 (частина AC):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 + x_4 + P_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 + x_3 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad x_2 \cdot 8 + P_2 \cdot 3,5 = 0.$$

Враховуючи значення P_2 , здобудемо рівняння:

$$x_2 + x_4 = -9; \quad (7.62)$$

$$x_1 + x_3 = 0; \quad (7.63)$$

$$x_2 = -3,9375. \quad (7.64)$$

3. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.29 (частина CD):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_4 + x_5 + x_7 + P_1 \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -x_3 + x_6 - P_1 \cos 60^\circ - q \cdot 9 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_3 \cdot 9 + x_4 \cdot 8 - x_5 \cdot 4 - q \cdot 9 \cdot 4,5 - P_1 \sin 60^\circ \cdot 2 = 0.$$

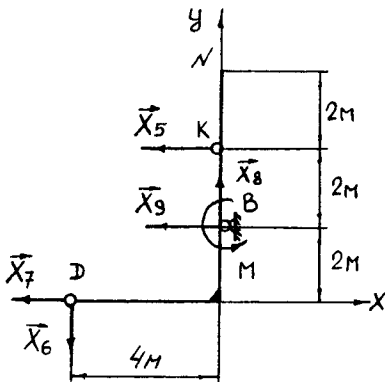


Рис. 7.28

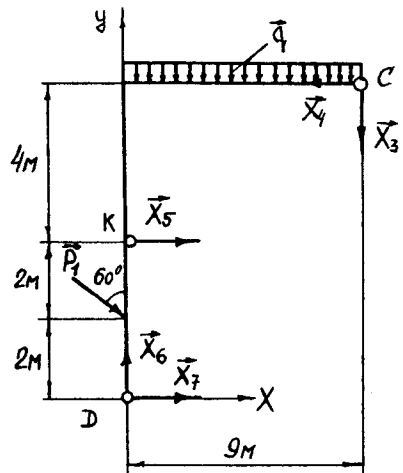


Рис. 7.29

Враховуючи значення P_1 , q , $\sin 60^\circ$ і $\cos 60^\circ$, дістанемо рівняння:

$$-x_4 + x_5 + x_7 = -6,9282; \quad (7.65)$$

$$-x_3 + x_6 = 17,5; \quad (7.66)$$

$$-9x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 74,6064. \quad (7.67)$$

4. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.28 (частина DN):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -x_5 - x_7 - x_9 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -x_6 + x_8 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad x_5 \cdot 2 + x_6 \cdot 4 - x_7 \cdot 2 + M = 0.$$

Враховуючи значення M , здобудемо рівняння:

$$-x_5 - x_7 - x_9 = 0; \quad (7.68)$$

$$-x_6 + x_8 = 0; \quad (7.69)$$

$$2x_5 + 4x_6 - 2x_7 = 0. \quad (7.70)$$

Для виконання III етапу виписуємо складені рівняння (7.62)—(7.70) у систему (A):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_4 = -9; \\ x_1 + x_3 = 0; \\ x_2 = -3,9375; \\ -x_4 + x_5 + x_7 = -6,9282; \\ -x_3 + x_6 = 17,5; \\ -9x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 74,6064; \\ -x_5 - x_7 - x_9 = 0; \\ -x_6 - x_8 = 0; \\ 2x_5 + 4x_6 - 2x_7 = -10. \end{array} \right. \quad (A)$$

Реакцію однобічної в'язі EK позначено літерою x_5 .

Етап II. 1. Складаємо рівняння рівноваги конструкції в цілому (див. рис. 7.26):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 - x_9 + P_2 + P_1 \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 + x_8 - P_1 \cos 60^\circ - q \cdot 9 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad x_1 \cdot 5 + x_2 \cdot 2 + M + P_1 \cos 60^\circ \cdot 4 - P_2 \cdot 2,5 - q \cdot 9 \cdot 0,5 = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , P_2 , q , M , $\sin 60^\circ$ і $\cos 60^\circ$, здобудемо рівняння:

$$x_2 - x_9 = -15,9282; \quad (7.71)$$

$$x_1 + x_8 = 17,5; \quad (7.72)$$

$$5x_1 + 2x_2 = 3,25. \quad (7.73)$$

2. Розглядаємо рівновагу частин конструкції. При цьому враховуємо, що II етап виконується, щоб перевірити розрахунки за рівняннями системи (А), а для цього достатньо визначити реакції опор А і В з рівнянь системи (А) і рівнянь рівноваги конструкції в цілому і порівняти ці розрахунки. Оскільки у рівняннях рівноваги конструкції в цілому є чотири невідомих: x_1 , x_2 , x_8 і x_9 , а рівнянь — три, то, щоб їх визначити, досить додати ще одне рівняння, тобто рівняння рівноваги якої-небудь частини конструкції, яке містить лише реакції опор. Це рівняння складаємо, розглядаючи рівновагу частини АС (див. рис. 7.27):

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad -x_2 \cdot 8 - P_2 \cdot 3,5 = 0.$$

Враховуючи значення P_2 , дістаємо

$$-x_2 = 3,9375. \quad (7.74)$$

Для виконання III етапу виписуємо складені рівняння (7.71)—(7.74) у систему (В):

$$\begin{cases} x_2 - x_9 = -15,9282; \\ x_1 + x_8 = 17,5; \\ 5x_1 + 2x_2 = 3,25; \\ -x_2 = 3,9375. \end{cases} \quad (B)$$

2-й варіант

Етап I. “Працює” в’язь NF , тобто реакція цієї в’язі не дорівнює нулю і має напрям уздовж NF від точки N до точки F (для частини конструкції АС). В’язь EK “не працює”, тобто реакція цієї в’язі дорівнює нулю.

1. Роз'єднуємо конструкцію на три частини по внутрішніх в'язях (шарнір C , шарнір D і одnobічна в'язь NF (див. рис. 7.26 і 7.30—7.32). Реакції зовнішніх в'язей (опор A і B) напрямляємо і позначаємо так, як при виконанні 1-го варіанта.

2. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.32 (частина AC):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad x_2 - x_3 + x_4 + P_2 = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad x_1 + x_5 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) &= 0; \quad x_3 \cdot 6 - x_4 \cdot 8 - P_2 \cdot 4,5 = 0.\end{aligned}$$

Враховуючи значення P_2 , дістанемо рівняння:

$$x_2 - x_3 + x_4 = -9; \quad (7.75)$$

$$x_1 + x_5 = 0; \quad (7.76)$$

$$6x_3 - 8x_4 = 40,5. \quad (7.77)$$

3. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.30 (частина DC):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad -x_4 - x_7 + P_1 \sin 60^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad -x_5 + x_6 - P_1 \cos 60^\circ - q \cdot 9 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) &= 0; \quad x_4 \cdot 8 - x_5 \cdot 9 - P_1 \sin 60^\circ \cdot 2 - q \cdot 9 \cdot 4,5 = 0.\end{aligned}$$

Враховуючи значення P_1 , q , $\sin 60^\circ$ і $\cos 60^\circ$, здобудемо рівняння:

$$x_4 + x_7 = 6,9282; \quad (7.78)$$

$$-x_5 + x_6 = 17,5; \quad (7.79)$$

$$8x_4 - 9x_5 = 74,6064. \quad (7.80)$$

4. Складаємо рівняння рівноваги частини конструкції, зображеної на рис. 7.31 (частина DN):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad x_3 + x_7 - x_9 = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad -x_6 + x_8 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) &= 0; \quad -x_3 \cdot 6 + x_8 \cdot 4 + x_9 \cdot 2 + M = 0.\end{aligned}$$

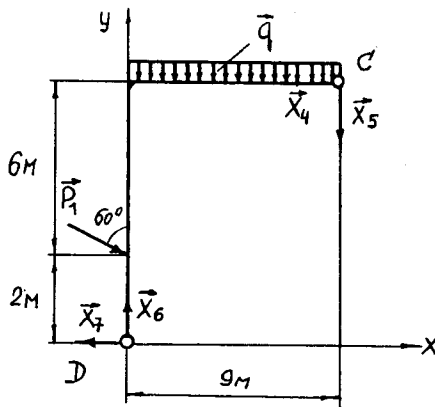


Рис. 7.30

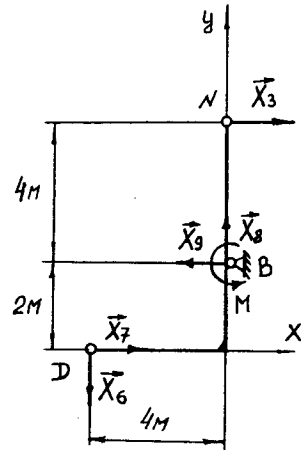


Рис. 7.31

Враховуючи значення M , здобудемо рівняння:

$$x_3 + x_7 - x_9 = 0; \quad (7.81)$$

$$-x_6 + x_8 = 0; \quad (7.82)$$

$$-6x_3 + 4x_8 + 2x_9 = -10. \quad (7.83)$$

Для виконання III етапу виписуємо складені рівняння (7.75)–(7.83) у систему (С):

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = -9; \\ x_1 + x_5 = 0; \\ 6x_3 - 8x_4 = 40,5; \\ x_4 + x_7 = 6,9282; \\ -x_5 + x_8 = 17,5; \\ 8x_4 - 9x_5 = 74,6064; \\ x_3 + x_7 - x_9 = 0; \\ x_6 + x_8 = 0; \\ -6x_3 + 4x_8 + 2x_9 = -10. \end{cases} \quad (C)$$

Реакцію однічної в'язі NF позначено літерою x_3 .

Етап II. 1. Складаємо рівняння рівноваги конструкції в цілому (див. рис. 7.26):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad x_2 - x_9 + P_2 + P_1 \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad x_1 + x_8 - P_1 \cos 60^\circ - q \cdot 9 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad x_1 \cdot 5 + x_2 \cdot 2 + M - P_2 \cdot 2,5 - q \cdot 9 \cdot 0,5 + P_1 \cos 60^\circ \cdot 4 = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , P_2 , q , M , $\sin 60^\circ$ і $\cos 60^\circ$, здобудемо рівняння:

$$x_2 - x_9 = -15,9282; \quad (7.84)$$

$$x_1 + x_8 = 17,5; \quad (7.85)$$

$$5x_1 + 2x_2 = 3,25. \quad (7.86)$$

2. Розглядаємо рівновагу частин конструкції. Як відомо (див. 1-й варіант, етап II), II етап виконуємо, щоб перевірити розрахунки за рівняннями системи (А). Для цього достатньо визначити реакції опор А і В з рівнянь системи (А) і рівнянь рівноваги конструкції в цілому і порівняти ці розрахунки. Оскільки у рівняннях рівноваги конструкції в цілому є чотири невідомих: x_1, x_2, x_8 і x_9 , а рівнянь — три, то, щоб визначити ці невідомі, слід додати ще одне рівняння, тобто рівняння рівноваги якої-небудь частини конструкції, яке містить лише реакції опор. У цьому випадку скласти таке рівняння неможливо. Тому потрібно розглянути рівновагу яких-небудь двох частин конструкції і скласти якнайменше додаткових рівнянь, які разом з рівняннями рівноваги конструкції в цілому дають змогу визначити реакцію опор А і В. З рівноваги частини DC (див. рис. 7.30) маємо

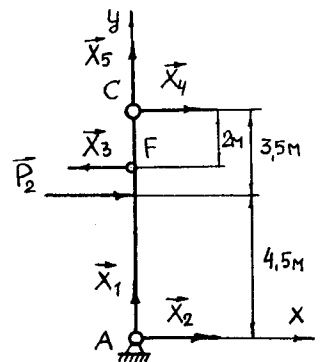


Рис. 7.32

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -x_6 \cdot 9 - x_7 \cdot 8 + q \cdot 9 \cdot 4,5 + P_1 \sin 60^\circ \cdot 6 + P_1 \cos 60^\circ \cdot 9 = 0.$$

Враховуючи значення P_1 , q , $\sin 60^\circ$ і $\cos 60^\circ$, здобудемо рівняння

$$9x_6 + 8x_7 = 138,3192. \quad (7.87)$$

З рівноваги частини DN (див. рис. 7.31) маємо:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -x_6 + x_8 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_N(\vec{F}_k) = 0; \quad x_6 \cdot 4 + x_7 \cdot 6 - x_9 \cdot 4 + M = 0.$$

Враховуючи значення M , дістанемо рівняння:

$$-x_6 + x_8 = 0; \quad (7.88)$$

$$4x_6 + 6x_7 - 4x_9 = -10. \quad (7.89)$$

Для виконання III етапу виписуємо складені рівняння (7.84)—(7.89) у систему (D):

$$\begin{cases} x_2 - x_9 = -15,9282; \\ x_1 + x_8 = 17,5; \\ 5x_1 + 2x_2 = 3,25; \\ 9x_6 + 8x_7 = 138,3\text{B}192; \\ -x_6 + x_8 = 0; \\ 4x_6 + 6x_7 - 4x_9 = -10 \end{cases} \quad (D)$$

Етап III. Розв'язання систем (A), (B), (C) і (D), а також визначення “працюючої” в'язі виконується на персональному комп'ютері ІВМ РС у режимі діалогу за програмою, блок-схему якої подано на рис. 7.1.

Глава 8

ТИПОВІ ЗАДАЧІ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ ПРОРОБКИ ТА САМОКОНТРОЛЮ¹

8.1. Рівновага твердого тіла під дією збіжної системи сил

Задача 8.1. Стрижні AC та BC з'єднані між собою та з вертикальною стіною за допомогою шарнірів (рис. 8.1). На шарнірний болт C діє вертикальна сила $P = 1000$ Н. Визначити реакції стрижнів на шарнірний болт C , якщо кути, що утворюють стрижні зі стіною, такі: $\alpha = 30^\circ$ та $\beta = 60^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу шарнірного болта C . Звільняємо болт C від в'язей. На болт C діють активна сила \vec{P} , реакції стрижнів \vec{S}_{AC} та \vec{S}_{BC} . Сили \vec{P} , \vec{S}_{AC} та \vec{S}_{BC} утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{S}_{AC} та \vec{S}_{BC} (рис. 8.2). З силового трикутника знайдемо:

$$S_{AC} = P \cos \alpha = 1000 \cdot 0,866 = 866 \text{ (Н)};$$

$$S_{BC} = P \sin \alpha = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ (Н)}.$$

Сили \vec{S}_{AC} та \vec{S}_{BC} прикладені до шарнірного болта C і напрямлені так, як це подано на рис. 8.1.

Задача 8.2. Щогловий кран (рис. 8.3) складається зі стріли AB , яка прикріплена шарніром A до щогли та ланцюга CB . До кінця B стріли підвішений вантаж $P = 2$ кН; кути $\angle CAB = 15^\circ$, $\angle BCA = 135^\circ$. Визначити натяг ланцюга CB та зусилля в стрілі AB .

¹ Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986. — 448 с.

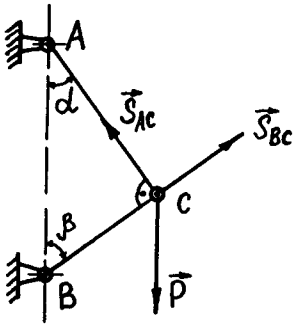


Рис. 8.1

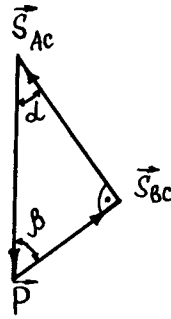


Рис. 8.2

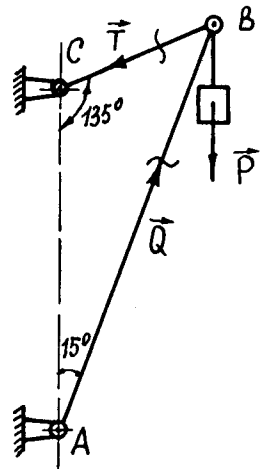


Рис. 8.3

Розв'язання. Розглянемо рівновагу шарніра B . Застосуємо метод перерізів. Уявно вирізаємо шарнір B . На шарнір B діють активна сила \vec{P} , зусилля в стрілі \vec{Q} та сила натягу ланцюга \vec{T} . Сили \vec{P} , \vec{Q} та \vec{T} утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{Q} та \vec{T} (рис. 8.4). З силового трикутника маємо

$$\frac{P}{\sin \gamma} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{T}{\sin \alpha}.$$

Звідси

$$Q = \frac{P \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2 \cdot 0,707}{0,5} = 2,83 \text{ (кН)};$$

$$T = \frac{P \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{2 \cdot 0,259}{0,5} = 1,04 \text{ (кН)},$$

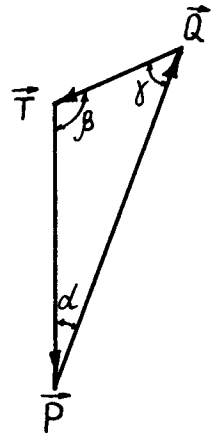


Рис. 8.4

де $\alpha = 15^\circ$; $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

Стріла працює на стиск, а ланцюг — на розтяг (рис. 8.3).

Задача 8.3. Вантаж $P = 20$ кН підіймається краном BAC за допомогою ланцюга, який перекинутий через блок A та блок D (рис. 8.5). Кран закріплений на стіні так, що кут $\angle CAD = 30^\circ$. Кути між стрижнями крана: $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. Визначити зусилля в стрижнях AB та AC . Розмірами блока A знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу блока A . Застосуємо метод перерізів. Уявно вирізаємо блок A . На блок A діють активна сила \vec{P} , зусилля в стрижнях \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 та сила натягу ланцюга \vec{P}_1 (сила \vec{P}_1 за модулем дорівнює силі \vec{P}). Сили \vec{P} , \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 та \vec{P}_1 утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил.

Побудуємо декартову систему координат з початком у точці А. Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{P} , \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 та \vec{P}_1 :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad Q_2 - P_1 \cos 30^\circ - P \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Q_1 + P_1 \sin 30^\circ - P \sin 30^\circ = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходимо:

$$Q_2 = 2P \cos 30^\circ = 2 \cdot 20 \cdot 0,866 = 34,6 \text{ (кН);}$$

$$Q_1 = 0.$$

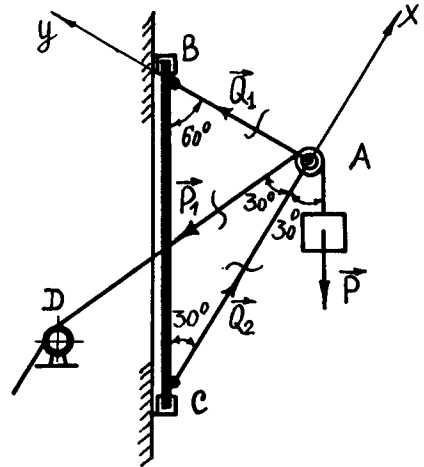


Рис. 8.5

Стрижень AC працює на стиск, а стрижень AB не працює.

Задача 8.4. Два однакових циліндри I, що мають вагу P , підвішені на нитках до точки O . Між циліндрами лежить циліндр II, що має вагу Q . Уся система перебуває у стані рівноваги. Циліндри I не торкаються один до одного (рис. 8.6). Визначити залежність між кутом α , що утворюється ниткою і вертикаллю, та кутом β , що утворюється між прямою $O_I O_{II}$ та вертикаллю.

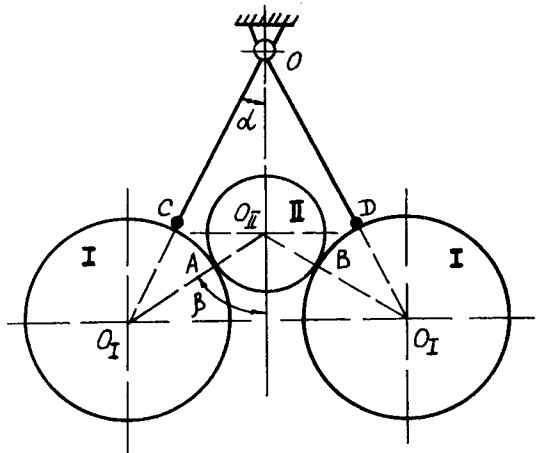


Рис. 8.6

Розв'язання. Циліндри утворюють систему твердих тіл. Розглянемо спочатку рівновагу циліндра II. Звільняємо циліндр II від в'язей. На циліндр II діють активна сила \vec{Q} і нормальні реакції \vec{N}_A та \vec{N}_B (рис. 8.7). Сили \vec{Q} , \vec{N}_A та \vec{N}_B утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силувий трикутник сил \vec{Q} , \vec{N}_A та \vec{N}_B (рис. 8.8). Із силового трикутника знайдемо

$$N_A = N_B = \frac{Q}{2 \cos \beta}.$$

Тепер розглянемо рівновагу одного з циліндрів I, наприклад лівого. Звільняємо циліндри від в'язей. На циліндр I діють активна сила \vec{P} , реакція нитки \vec{T} , нормальна реакція \vec{N}'_A (сила \vec{N}'_A за модулем дорівнює силі \vec{N}_A). Сили \vec{P} , \vec{T} та \vec{N}'_A утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил

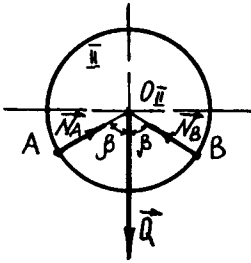


Рис. 8.7

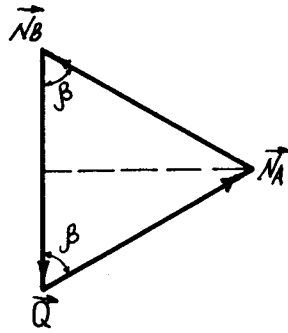


Рис. 8.8

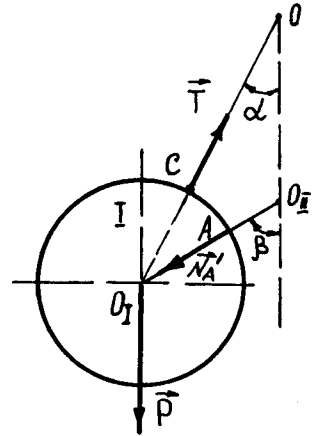


Рис. 8.9

(рис. 8.9). Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{T} та \vec{N}'_A (рис. 8.10). Із силового трикутника маємо

$$\frac{N'_A}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin(\beta - \alpha)}, \text{ або } \frac{Q}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{P}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Звідси

$$Q \sin \beta \cos \alpha - Q \cos \beta \sin \alpha = 2P \cos \beta \sin \alpha;$$

$$\frac{Q}{2P} (\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha - 1) = 0;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{2P}{Q} + 1 \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

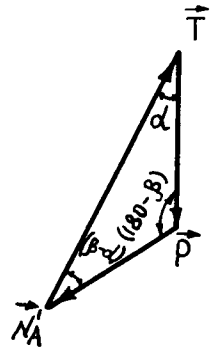


Рис. 8.10

Задача 8.5. Кулька B , вага якої P , підвішена до нерухомої точки A ниткою AB та лежить на поверхні гладенької сфери, що має радіус r ; відстань між точками A та C дорівнює d , довжина нитки $AB = l$, пряма AO є вертикальною (рис. 8.11). Визначити натяг нитки та реакцію сфери. Радіусом кульки знехтувати.

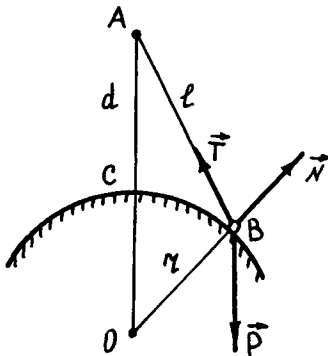


Рис. 8.11

Розв'язання. Розглянемо рівновагу кульки B . Звільняємо кульку від в'язей. На кульку діють активна сила \vec{P} , реакція нитки \vec{T} та нормальна реакція \vec{N} . Сили \vec{P} , \vec{T} та \vec{N} утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{T} та \vec{N} (рис. 8.12). Трикутники $\triangle OAB$ та $\triangle \vec{P}\vec{N}\vec{T}$ подібні (рис. 8.11, рис. 8.12). З подібних трикутників маємо

$$\frac{r+d}{P} = \frac{r}{N} = \frac{l}{T}.$$

Звідси

$$T = \frac{Pl}{r+d}; N = \frac{Pr}{r+d}.$$

Сили \vec{T} та \vec{N} прикладені до кульки B і напрямлені так, як це зображено на рис. 8.11.

Задача 8.6. Котел з рівномірно розподіленою за довжиною вагою $P = 40$ кН та радіусом $R = 1$ м лежить на виступах кам'яної кладки. Відстань між стінками кладки дорівнює $1,6$ м. Нехтуючи тертям, визначити тиск котла на кладку в точках A і B (рис. 8.13).

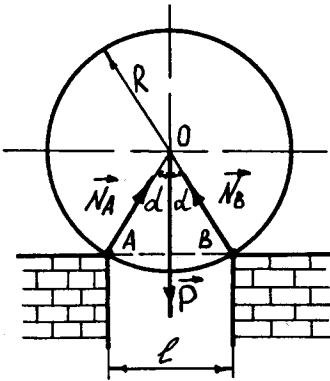


Рис. 8.13

$$N_A = N_B = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{40}{2 \cdot 0,6} = 33,3 \text{ (кН)},$$

де $\sin \alpha = \frac{l}{2R} = \frac{1,6}{2 \cdot 1} = 0,8$; $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$.

Сили тиску котла на кам'яну кладку в точках A і B (рис. 8.13) за модулем дорівнюють реакціям \vec{N}_A та \vec{N}_B , але мають протилежний до них напрям.

Задача 8.7. Вага однорідного котка для трамбування дорівнює 20 кН, радіус $R = 60$ см. Визначити горизонтальне зусилля P , що необхідне для перетягування котка через кам'яну плиту, висота якої дорівнює 8 см (рис. 8.15).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу котка. Звільняємо коток від в'язей. У положенні, зображеному на рис. 8.15, на коток діють активна сила \vec{G} , нормальна реакція горизонтальної поверхні \vec{N} , нормальна реакція \vec{N}_C та горизонтальне зусилля \vec{P} . Щоб визначити зусилля перетягування котка \vec{P} , необхідно взяти $\vec{N} = \vec{0}$. Сили \vec{G} , \vec{N}_C та \vec{P} утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{G} , \vec{N}_C та \vec{P} (рис. 8.16). З силового трикутника знайдемо

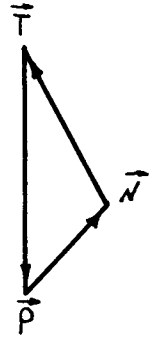


Рис. 8.12

Розв'язання. Розглянемо рівновагу котла. Звільняємо котел від в'язей. На котел діють активна сила \vec{P} , нормальні реакції \vec{N}_A та \vec{N}_B . Сили \vec{P} , \vec{N}_A та \vec{N}_B утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{N}_A та \vec{N}_B (рис. 8.14). З силового трикутника знайдемо

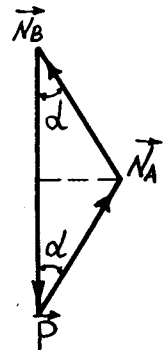


Рис. 8.14

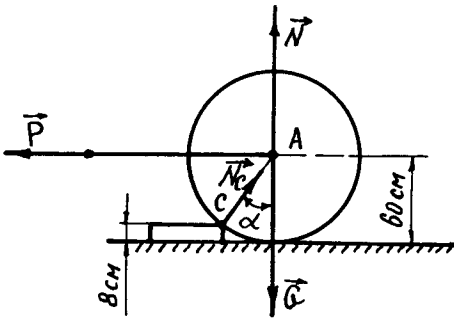


Рис. 8.15

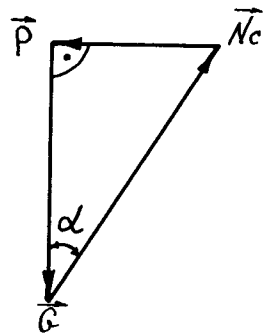


Рис. 8.16

$$P = N_c \sin \alpha = \frac{G}{\cos \alpha} \sin \alpha = \frac{20 \cdot 0,5}{0,867} = 11,5 \text{ (кН)},$$

де $\cos \alpha = \frac{52}{60} = 0,867$; $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,867^2} = 0,5$.

Задача 8.8. Однорідний стрижень AB , що має вагу $P = 160$ Н, довжину $l = 12$ м, підвішений у точці C на тросах AC та BC . Троси мають одну і ту саму довжину $l_1 = 1$ м. Визначити натяг тросів (рис. 8.17).

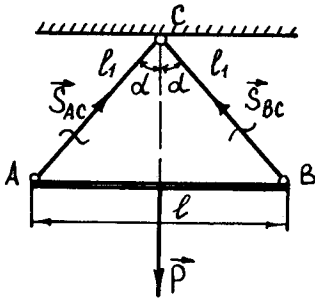


Рис. 8.17

Розв'язання. Розглянемо рівновагу однорідного стрижня AB . Застосуємо метод перерізів. Уявно перерізаємо троси AC та BC . На стрижень AB діють активна сила \vec{P} , сили натягу тросів \vec{S}_{AC} та \vec{S}_{BC} . Сили \vec{P} , \vec{S}_{AC} та \vec{S}_{BC} утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{S}_{AC} та \vec{S}_{BC} (рис. 8.18). Із силового трикутника знайдемо

$$S_{AC} = S_{BC} = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{160}{2 \cdot 0,8} = 100 \text{ (Н)},$$

де $\sin \alpha = \frac{l}{2l_1} = \frac{1,2}{2 \cdot 1} = 0,6$; $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$.

Троси AC та BC працюють на розтяг (рис. 8.17).

Задача 8.9. Віконна рама AB , зображена на рис. 8.19 у перерізі, може обертатися навколо горизонтальної осі шарніра A та своїм нижнім кінцем B вільно опирається на уступ паза. Визначити реакції опор, якщо вага рами $P = 89$ Н. Сила \vec{P} прикладена до середини рами (точка C).

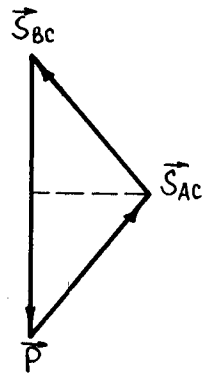


Рис. 8.18

Розв'язання. Розглянемо рівновагу рами AB . Звільняємо раму від в'язей. На раму діють активна сила \vec{P} , нормальна реакція \vec{N}_B та реакція нерухомого шарніра \vec{R}_A . Лінія дії реакції \vec{R}_A визначається відповідно до теореми про три сили. Сили \vec{P} , \vec{N}_B та \vec{R}_A утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{N}_B та \vec{R}_A (рис. 8.20). З силового трикутника маємо

$$\frac{P}{\sin \gamma} = \frac{R_A}{\sin \beta} = \frac{N_B}{\sin \alpha}.$$

Звідси

$$R_A = \frac{P \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{89 \cdot 0,707}{0,894} = 70,4 \text{ (Н)};$$

$$N_B = \frac{P \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{89 \cdot 0,316}{0,894} = 31,5 \text{ (Н)},$$

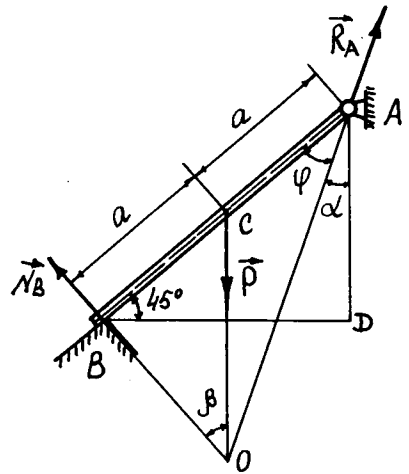


Рис. 8.19

де $\beta = 45^\circ$; $\alpha = 45^\circ - \varphi$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2a} = 0,5$; $\varphi = 26^\circ 36'$; $\gamma = 116^\circ 36'$.

Реакції \vec{N}_B та \vec{R}_A напрямлені так, як це зображено на рис. 8.19.

Задача 8.10. Балка AB шарнірно закріплена на опорі A ; кінець B балки лежить на котках. По середині балки під кутом 45° до її осі прикладена сила $P = 2$ кН (рис. 8.21). Визначити реакції опор балки. Вагою балки знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільняємо балку від в'язей. На балку діють активна сила \vec{P} , нормальна реакція \vec{N}_B та реакція нерухомого шарніра \vec{R}_A . Лінія дії реакції \vec{R}_A визначається за теоремою про три сили. Сили \vec{P} , \vec{N}_B та \vec{R}_A утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{N}_B та \vec{R}_A (рис. 8.22). Із силового трикутника знайдемо:

$$R_A = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{2}{0,894} = 2,24 \text{ (кН)};$$

$$N_B = R_A \sin \alpha = 2,24 \cdot 0,447 = 1,0 \text{ (кН)},$$

$$\text{де } \sin \alpha = \frac{AC \sin \varphi}{OC} = \frac{AC \cdot OD}{AO \cdot OC} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin^2 45^\circ}{3,162 \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 0,707}{3,162} = 0,447.$$

Реакції \vec{N}_B та \vec{R}_A напрямлені так, як це зображено на рис. 8.21.

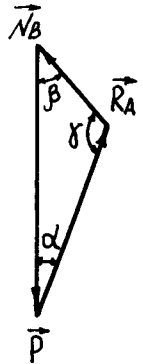


Рис. 8.20

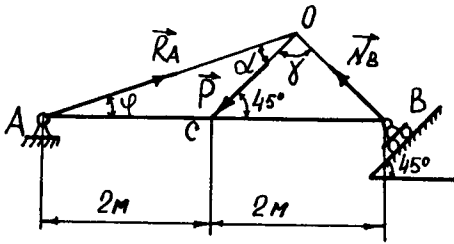


Рис. 8.21

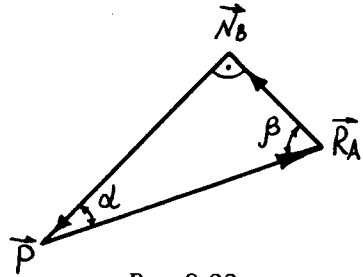


Рис. 8.22

Задача 8.11. Прямолинійний одно-
рідний брус AB, що має вагу P , та не-
вагомий стрижень BC, який має кри-
волінійну вісь довільного обрису,
з'єднані шарнірно у точці B і так само
з'єднані з опорами A та C, які розта-
шовані на одній горизонталі AC.
Прямі AB та BC утворюють з прямою
AC кути $\alpha = 45^\circ$ (рис. 8.23). Визна-
чити реакції опор A та C.

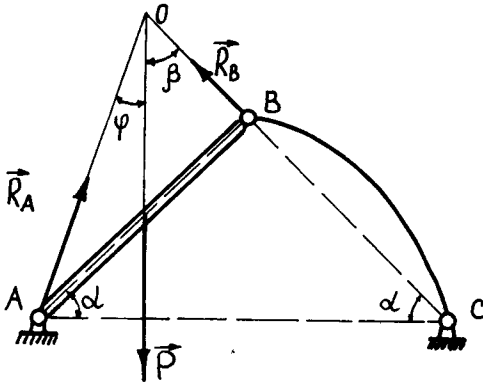


Рис. 8.23

Розв'язання. Брус AB та неваго-
мий стрижень BC утворюють систему
твердих тіл. Розглянемо спочатку
рівновагу стрижня BC. Звільняємо
стрижень від в'язей. На стрижень
діють сили \vec{R}_C та \vec{R}'_B (рис. 8.24). Сили
 \vec{R}_C та \vec{R}'_B утворюють найпростішу
зрівноважену систему сил. Тому
 $R'_B = R_C$.

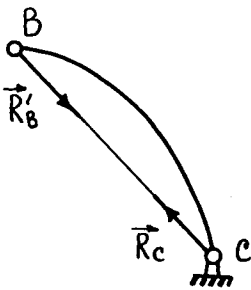


Рис. 8.24

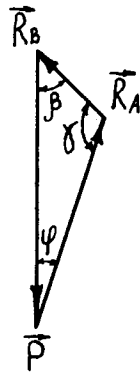


Рис. 8.25

Тепер розглянемо рівновагу бруса
AB. На брус діють активна сила \vec{P} ,
реакція стрижня \vec{R}_B (сила \vec{R}_B за мо-
дулем дорівнює силі \vec{R}'_B) та реакція
шарніра \vec{R}_A . Лінія дії сили \vec{R}_A ви-
значається на підставі теореми про три

сили. Сили \vec{P} , \vec{R}_A та \vec{R}_B утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{R}_A та \vec{R}_B (рис. 8.25). З силового трикутника маємо

$$\frac{P}{\sin \gamma} = \frac{R_B}{\sin \phi} = \frac{R_A}{\sin \beta}.$$

Звідси

$$R_A = \frac{P \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{P \cdot 0,707}{0,895} = 0,79P; \quad R_B = \frac{P \sin \varphi}{\sin \gamma} = \frac{P \cdot 0,317}{0,895} = 0,354P,$$

де $\operatorname{tg}(\beta + \varphi) = \frac{2\ell}{\ell} = 2$; $\varphi = 18^\circ 30'$; $\gamma = 116^\circ 30'$.

Сили \vec{R}_A та \vec{R}_B напрямлені так, як це зображено на рис. 8.23 та 8.24.

Задача 8.12. На коловому гладенькому циліндрі, що має горизонтальну вісь та радіус $OA = 0,1$ м, лежать дві кульки A та B ; вага першої кульки $P_1 = 1$ Н, другої $P_2 = 2$ Н. Кульки з'єднані ниткою AB , що має довжину $0,2$ м (рис. 8.26). Визначити кути φ_1 , φ_2 , які утворюються радіусами OA та OB з вертикаллю у стані рівноваги, та тиск N_1 та N_2 кульок на циліндр у точках A та B . Розмірами кульок знехтувати.

Розв'язання. Циліндр і кульки утворюють систему твердих тіл. Розглянемо спочатку рівновагу кульки A . Звільняємо кульку A від в'язей. На кульку A діють активна сила \vec{P}_1 , нормальна реакція \vec{N}_1 та реакція нитки \vec{T} . Сили \vec{P}_1 , \vec{N}_1 та \vec{T} утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P}_1 , \vec{N}_1 та \vec{T} (рис. 8.27). Із силового трикутника маємо

$$\frac{T}{\sin \varphi_1} = \frac{N_1}{\sin \beta} = \frac{P_1}{\sin \alpha}.$$

Тепер розглянемо рівновагу кульки B . Звільняємо кульку від в'язей. На кульку діють активна сила \vec{P}_2 , нормальна реакція \vec{N}_2 та реакція нитки \vec{T} (рис. 8.26). Сили \vec{P}_2 , \vec{N}_2 та \vec{T} утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P}_2 , \vec{N}_2 та \vec{T} (рис. 8.28). Із силового трикутника маємо

$$\frac{T}{\sin \varphi_2} = \frac{N_2}{\sin \psi} = \frac{P_2}{\sin \gamma}.$$

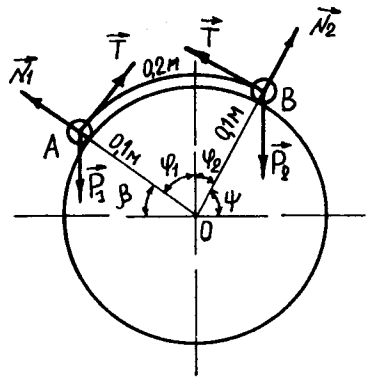


Рис. 8.26

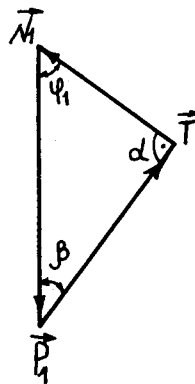


Рис. 8.27

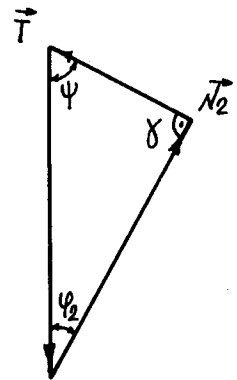


Рис. 8.28

З рис. 8.26 випливає: $0,2 = 0,1(\varphi_1 + \varphi_2)$; $\varphi_1 = 2 - \varphi_2$.

Тоді

$$P_1 \sin(2 - \varphi_2) = P_2 \sin \varphi_2; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{P_1 \sin 2}{P_2 + \cos 2} = \frac{0,9089}{2 - 0,417} = 0,574;$$

$$\varphi_2 = 29^\circ 50'; \quad \varphi_1 = 2 - \varphi_2 = 114^\circ 40' - 29^\circ 50' = 84^\circ 50';$$

$$N_1 = P_1 \sin \beta = 1 \cdot 0,09 = 0,09 \text{ (Н)}; \quad N_2 = P_2 \cos \varphi_2 = 2 \cdot 0,868 = 1,74 \text{ (Н)}.$$

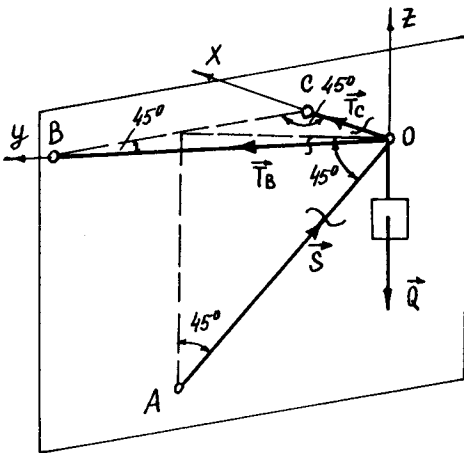


Рис. 8.29

Уявно вирізаємо шарнір O . На шарнір O діють активна сила \vec{Q} , зусилля в брусі \vec{S} та сили натягу ланцюгів \vec{T}_C та \vec{T}_B (рис. 8.29). Сили \vec{Q} , \vec{S} , \vec{T}_C та \vec{T}_B утворюють зрівноважену просторову збіжну систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O (рис. 8.29). Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{Q} , \vec{S} , \vec{T}_C та \vec{T}_B :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad T_C - S \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad T_B - S \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad S \cos 45^\circ - Q = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходимо:

$$S = \frac{Q}{\cos 45^\circ} = \frac{100}{0,707} = 141,4 \text{ (Н)};$$

$$T_C = T_B = S \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 141,4 \cdot 0,707^2 = 70,7 \text{ (Н)}.$$

Брус AO працює на стиск, а ланцюги BO та CO — на розтяг.

Сили тиску кульок на циліндр у точках A та B (див. рис. 8.26) за модулем дорівнюють реакціям \vec{N}_1 та \vec{N}_2 , але мають протилежний до них напрям.

Задача 8.13. Вантаж $Q = 100$ Н підтримується брусом AO , який шарнірно закріплений у точці A і має нахил, як подано на рис. 8.29, і двома горизонтальними ланцюгами BO та CO , що мають однакову довжину; $\angle CBO = \angle BCO = 45^\circ$. Визначити зусилля S в брусі та натяг T ланцюгів.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу шарніра O . Застосуємо метод перерізів.

Задача 8.14. Вантаж $Q = 1$ кН підвішений у точці D (рис. 8.30). Кріплення стрижнів у точках A, B , та D шарнірні. Визначити реакції стрижнів.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу шарніра D . Звільняємо шарнір D від в'язей. На шарнір D діють активна сила \vec{Q} та реакції стрижнів \vec{R}_A, \vec{R}_B та \vec{R}_C (рис. 8.30). Сили $\vec{Q}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$ та \vec{R}_C утворюють зрівноважену просторову збіжну систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O . Складемо рівняння рівноваги системи сил $\vec{Q}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$ та \vec{R}_C :

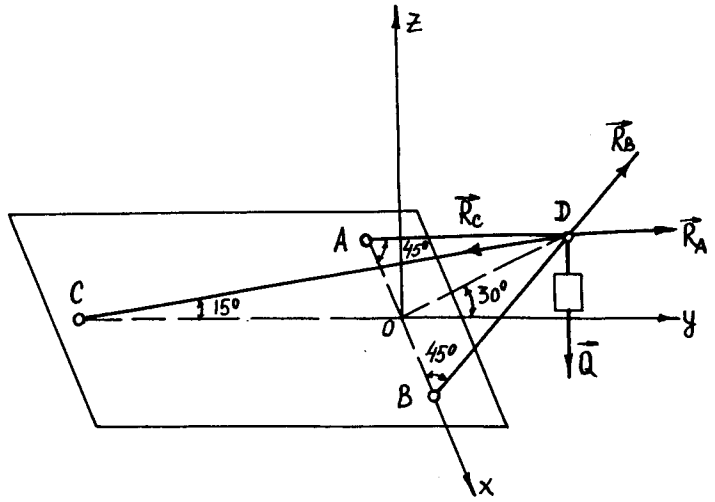


Рис. 8.30

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -R_B \cos 45^\circ + R_A \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -R_C \cos 15^\circ + R_B \sin 45^\circ \cos 30^\circ + R_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad -Q - R_C \sin 15^\circ + R_B \sin 45^\circ \sin 30^\circ + R_A \sin 45^\circ \sin 30^\circ = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходимо:

$$\begin{aligned} R_A = R_B &= \frac{Q \cos 15^\circ}{2 \sin 45^\circ (\sin 30^\circ \cos 15^\circ - \cos 30^\circ \sin 15^\circ)} = \\ &= \frac{0,966}{2 \cdot 0,707 (\sin 30^\circ \cos 15^\circ - \cos 30^\circ \sin 15^\circ)} = 2,64 \text{ (кН)}; \end{aligned}$$

$$R_C = \frac{2R_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{2 \cdot 2,64 \cdot 0,707 \cdot 0,866}{0,966} = 3,35 \text{ (кН)};$$

Сили \vec{R}_A, \vec{R}_B та \vec{R}_C прикладені до шарніра D і напрямлені так, як це зображено на рис. 8.30.

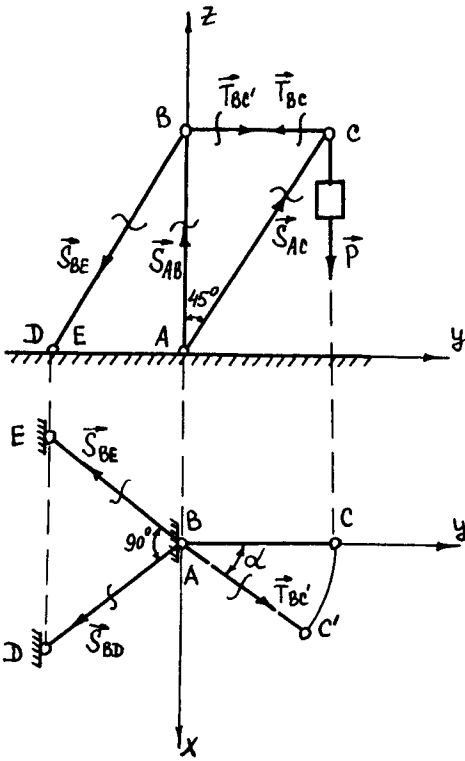


Рис. 8.31

лем дорівнює силі T'_{BC}). Сили \vec{S}_{AB} , \vec{S}_{BD} , \vec{S}_{BE} та \vec{T}'_{BC} утворюють зрівноважену просторову збіжну систему сил (рис. 8.31). Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A (рис. 8.31). Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{S}_{AB} , \vec{S}_{BD} , \vec{S}_{BE} та \vec{T}'_{BC} :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; T'_{BC} \sin \alpha + S_{BD} \sin^2 45^\circ - S_{BE} \sin^2 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; T'_{BC} \cos \alpha - S_{BD} \sin 45^\circ \cos 45^\circ - S_{BE} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; S_{AB} - S_{BD} \cos 45^\circ - S_{BE} \cos 45^\circ = 0,$$

де $T'_{BC} = T_{BC} = P \operatorname{tg} 45^\circ = P$.

Задача 8.15. Визначити зусилля в вертикальному стояку та ногах крана (рис. 8.31) залежно від кута α , якщо $AB = BC = AD = AE$. Кріплення елементів крана в точках A, B, D та E шарнірні. Вагою елементів крана знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо спочатку рівновагу шарніра C. Застосуємо метод перерізів. Уявно вирізаємо шарнір C. На шарнір C діють активна сила \vec{P} , зусилля в стрижні \vec{S}_{AC} та сили натягу троса \vec{T}_{BC} . Сили \vec{P} , \vec{S}_{AC} та \vec{T}_{BC} утворюють зрівноважену плоску збіжну систему сил. Побудуємо замкнений силовий трикутник сил \vec{P} , \vec{S}_{AC} та \vec{T}_{BC} (рис. 8.32). З силового трикутника знайдемо

$$T_{BC} = P \operatorname{tg} 45^\circ = P.$$

Тепер розглянемо рівновагу шарніра B. Застосуємо метод перерізів. Уявно вирізаємо шарнір B. На шарнір B діють зусилля в стрижнях \vec{S}_{AB} , \vec{S}_{BD} , \vec{S}_{BE} та сила натягу троса \vec{T}'_{BC} (сила \vec{T}'_{BC} за моду-

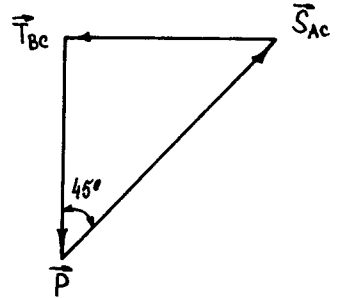


Рис. 8.32

Розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходимо:

$$S_{BD} = P(\cos \alpha - \sin \alpha);$$

$$S_{BE} = P(\cos \alpha + \sin \alpha);$$

$$S_{AB} = P\sqrt{2} \cos \alpha.$$

Задача 8.16. Визначити зусилля в стрижнях просторової ферми, зібраної зі стрижнів 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо на вузол A діє вертикальна сила \vec{P} . Стрижні 1, 3, 4 і 6 лежать у горизонтальній площині, стрижні 2 і 5 мають нахил до горизонту, кут нахилу дорівнює 45° (рис. 8.33).

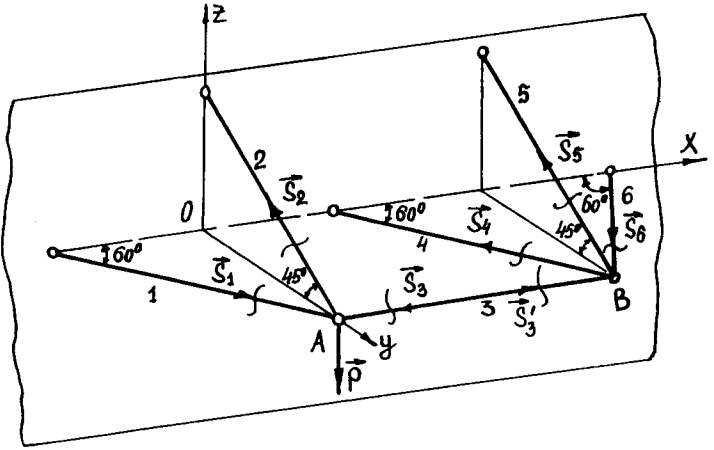


Рис. 8.33

Розв'язання. Розглянемо спочатку рівновагу вузла A . Застосуємо метод перерізів. Уявно вирізаємо вузол A . На вузол A діють активна сила \vec{P} , зусилля в стрижнях \vec{S}_1 , \vec{S}_2 та \vec{S}_3 . Сили \vec{P} , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 та \vec{S}_3 утворюють зрівноважену просторову збіжну систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці O . Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{P} , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 та \vec{S}_3 :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; S_1 \cos 60^\circ - S_3 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; S_1 \sin 60^\circ - S_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; S_2 \sin 45^\circ - P = 0.$$

Тепер розглянемо рівновагу вузла B . Уявно вирізаємо вузол B . На вузол B діють зусилля в стрижнях \vec{S}'_3 , \vec{S}_4 , \vec{S}_5 та \vec{S}_6 (сила \vec{S}'_3 дорівнює за модулем \vec{S}_3). Сили \vec{S}'_3 , \vec{S}_4 , \vec{S}_5 та \vec{S}_6 утворюють зрівноважену просторову збіжну систему сил (рис. 8.33). Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{S}'_3 , \vec{S}_4 , \vec{S}_5 та \vec{S}_6 :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \vec{S}'_3 - S_6 \cos 60^\circ - S_4 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; -S_4 \sin 60^\circ + S_6 \sin 60^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; S_5 \sin 45^\circ = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги, знайдемо:

$$S_1 = \frac{2P}{\sqrt{3}}; S_2 = P\sqrt{2}; S_3 = \bar{S}'_3 = \frac{P}{\sqrt{3}}; S_4 = S_6 = \frac{P}{\sqrt{3}}; S_5 = 0.$$

Стрижні 1, 3, 6 працюють на стиск, а стрижні 2, 4 та 5 — на розтяг.

Задача 8.17. Визначити натяг тросів OC , OA , OB , якщо до вузла O підвішений вантаж G . Площина тросів OA та OB нахилена до вертикалі на кут β і перпендикулярна до вертикальної площини, що проходить через вісь троса OC (рис. 8.34).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вузла O . Застосуємо метод перерізів. Уявно вирізаємо вузол O . На вузол O діють активна сила \vec{G} та сили натягу тросів \vec{T}_A , \vec{T}_B та \vec{T}_C . Сили \vec{G} , \vec{T}_A , \vec{T}_B та \vec{T}_C утворюють зрівноважену просторову збіжну систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O . Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{G} , \vec{T}_A , \vec{T}_B та \vec{T}_C :

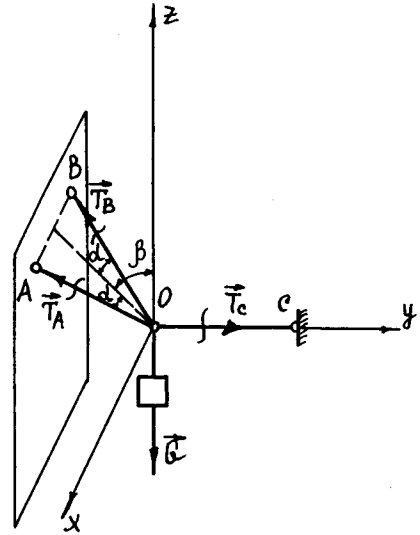


Рис. 8.34

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; T_A \sin \alpha - T_B \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; T_C - T_A \cos \alpha \sin \beta - T_B \cos \alpha \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; T_A \cos \alpha \cos \beta + T_B \cos \alpha \cos \beta - G = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходимо:

$$T_1 = 2T_2 \cos \alpha \sin \beta = G \operatorname{tg} \beta;$$

$$T_2 = T_3 = \frac{G}{2 \cos \alpha \cos \beta}.$$

Усі стрижні працюють на розтяг.

8.2. Рівновага твердого тіла під дією довільної просторової системи сил

Задача 8.18. На круглій похилій площадці, вісь якої ACD має нахил до вертикалі $\alpha = 20^\circ$, у точці B закріплене тіло, вага якого $P = 400$ Н. Визначити момент, що утворюється від ваги тіла, відносно осі AD , якщо радіус $CB = 3$ м. Пряма CB є горизонтальною лінією (рис. 8.35).

Розв'язання. Розкладемо силу ваги \vec{P} по осях координат $Bxyz$. На підставі визначення моменту сили відносно осі маємо

$$M_{AD} = P_y CB = P \sin 20^\circ \cdot CB = 400 \cdot 0,342 \cdot 3 = 410,4 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Задача 8.19. До трьох дисків: A , що має радіус 15 см, B , що має радіус 10 см, та C , що має радіус 5 см, прикладені пари сил (рис. 8.36); величини сил відповідно $P_1 = P'_1 = 10$ Н, $P_2 = P'_2 = 20$ Н та $P = P'$ Н. Осі OA , OB та OC розташовані в одній площині; кут $\angle AOB$ прямий. Визначити величину сили $P = P'$ та кут $\angle BOC = \alpha$ так, щоб система трьох дисків перебувала у стані рівноваги.

Розв'язання. Подамо моменти пар, що діють на диски A , B та C , векто-

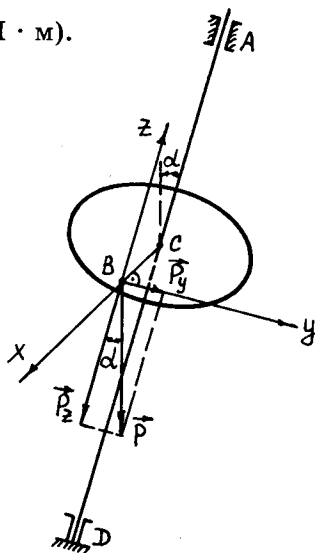


Рис. 8.35

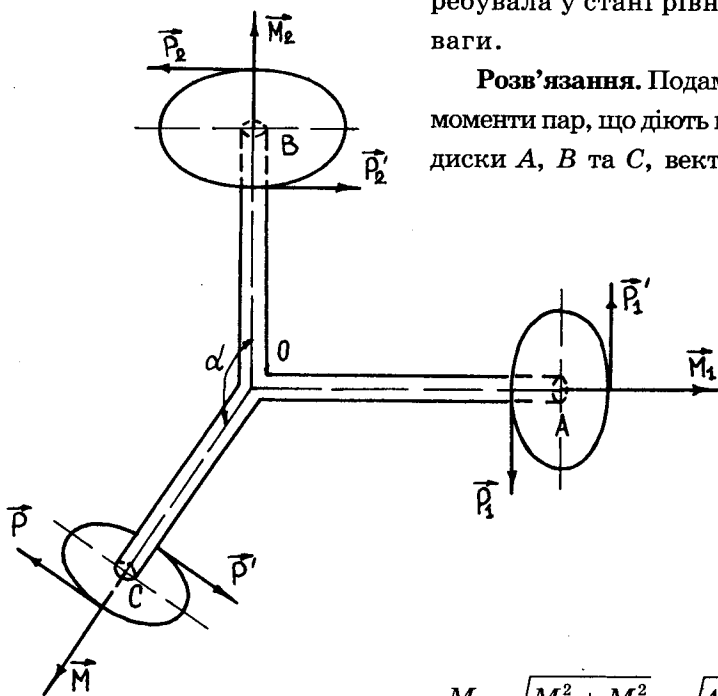


Рис. 8.36

рами \vec{M} , \vec{M}_1 та \vec{M}_2 (рис. 8.36). При рівновазі дисків вектори-моменти \vec{M} , \vec{M}_1 та \vec{M}_2 утворюють зрівноважену плоску систему моментів пар сил і трикутник, побудований з цих векторів, буде замкнений (рис. 8.37). З векторного трикутника знайдемо

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ (Н} \cdot \text{см)}.$$

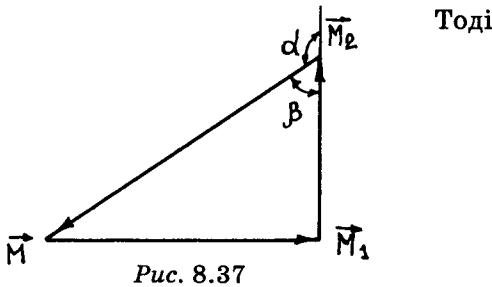


Рис. 8.37

$$P = P' = \frac{M}{10} = \frac{500}{10} = 50 \text{ (Н)};$$

$$\cos \beta = \frac{M_2}{M} = \frac{400}{500} = 0,8; \quad \beta = 36^\circ 50';$$

$$\alpha = 180 - 36^\circ 50' = 143^\circ 10'.$$

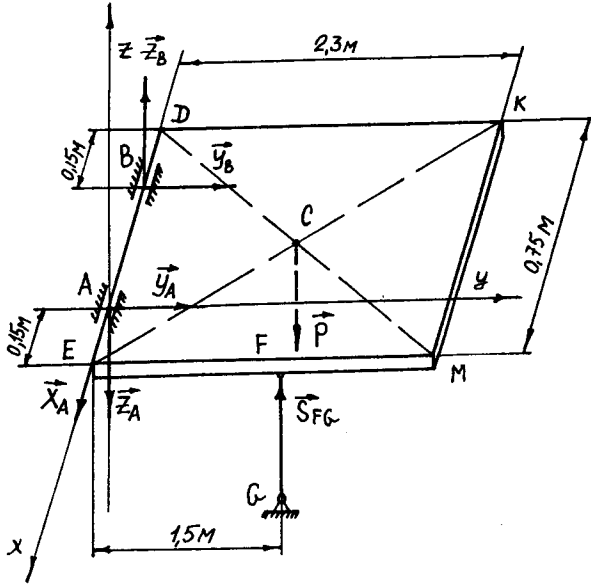


Рис. 8.38

Задача 8.20. Кришка люка утримується в положенні, що зображене на рис. 8.38. Вага кришки $P = 180$ Н. Визначити реакції шарнірів A, B та реакцію стрижня FG.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу кришки. Звільняємо кришку від в'язей. На кришку діють активна сила \vec{P} , реакції шарнірів $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_A, \vec{Z}_B$ та реакція стрижня \vec{S}_{FG} (рис. 8.38). Сили $\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_A, \vec{Z}_B, \vec{S}_{FG}$ утворюють зрівноважену довільну просторову систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A. Складемо рівняння рівноваги системи сил $\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_A, \vec{Z}_B$ та \vec{S}_{FG} :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad -Z_A + Z_B - P + S_{FG} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \cdot 1,15 + S_{FG} \cdot 1,5 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \cdot 0,225 - S_{FG} \cdot 0,15 + Z_B \cdot 0,45 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y_B \cdot 0,45 = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходимо:

$$X_A = Y_A = Y_B = 0; S_{FG} = \frac{P \cdot 1,15}{1,5} = \frac{180 \cdot 1,15}{1,5} = 138 \text{ (Н)};$$

$$Z_B = \frac{P \cdot 0,225 + S_{FG} \cdot 0,15}{0,45} = \frac{180 \cdot 0,225 + 138 \cdot 0,15}{0,45} = 136 \text{ (Н)};$$

$$Z_A = Z_B - P + S_{FG} = 136 - 180 + 138 = 94 \text{ (Н)}.$$

Реакції \vec{Z}_A , \vec{Z}_B та \vec{S}_{FG} напрямлені так, як це зображено на рис. 8.38.

Задача 8.21. Шків CD має радіус 10 см; розміри вала зображено на рис. 8.39.

Натяг верхньої ведучої гілки паса $T_1 = 100$ Н, нижньої веденої $T_2 = 50$ Н. (\vec{P}, \vec{P}_1) — пара сил, що утворюється силами опору. Визначити обертальний момент пари сил опору та реакції підшипників A та B при рівновазі системи.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу системи, що складається зі шківів CD та вала AB . Звільняємо вал AB від в'язей. На шків з валом діють сили натягу \vec{T}_1 , \vec{T}_2 , пара сил опору (\vec{P}, \vec{P}_1) та реакції підшипників \vec{X}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{Z}_A , \vec{Z}_B (рис. 8.39). Сили та пара сил утворюють зрівноважену довільну просторову систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A . Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{T}_1 , \vec{T}_2 , \vec{X}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{Z}_A , \vec{P} , \vec{P}_1 (момент пари (\vec{P}, \vec{P}_1) позначасмо через M):

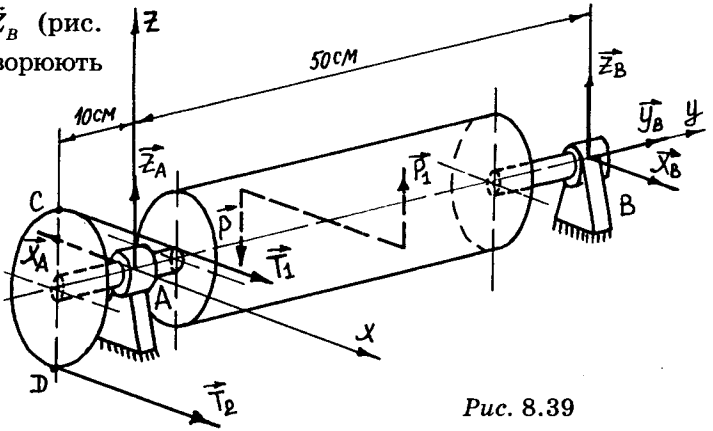


Рис. 8.39

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; -X_A + T_1 + T_2 + X_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; Z_A + Z_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; Z_B \cdot 50 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; T_1 \cdot 10 - T_2 \cdot 10 - M = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; -X_B \cdot 50 + T_1 \cdot 10 + T_2 \cdot 10 = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходимо:

$$Y_B = Z_A = Z_B = 0; X_B = \frac{T_1 \cdot 10 + T_2 \cdot 10}{50} = \frac{1000 + 500}{50} = 30 \text{ (Н)};$$

$$M = T_1 \cdot 10 - T_2 \cdot 10 = 1000 - 500 = 500 \text{ (Н} \cdot \text{см)} = 5 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$X_A = T_1 + T_2 + X_B = 100 + 50 + 30 = 180 \text{ (Н)}.$$

Реакції \vec{X}_A , \vec{X}_B напрямлені так, як це зображено на рис. 8.39.

Задача 8.22. Однорідна прямокутна рама, що має вагу $P = 200$ Н, закріплена за допомогою сферичного шарніра A та підшипника B і утримується у стані рівноваги в горизонтальному положенні ниткою CE (рис. 8.40). Кути $\angle ECA$ та $\angle BAC$ дорівнюють 30° . Визначити натяг нитки та реакцію опор.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу рами. Звільняємо раму від в'язей. На раму діють активна сила \vec{P} , реакції сферичного шарніра \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , реакція підшипника B — \vec{X}_B , \vec{Z}_B та реакція нитки \vec{T} (рис. 8.40). Сили \vec{P} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B , \vec{Z}_B та \vec{T} утворюють зрівноважену довільну просторову систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A . Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{P} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B , \vec{Z}_B та \vec{T} :

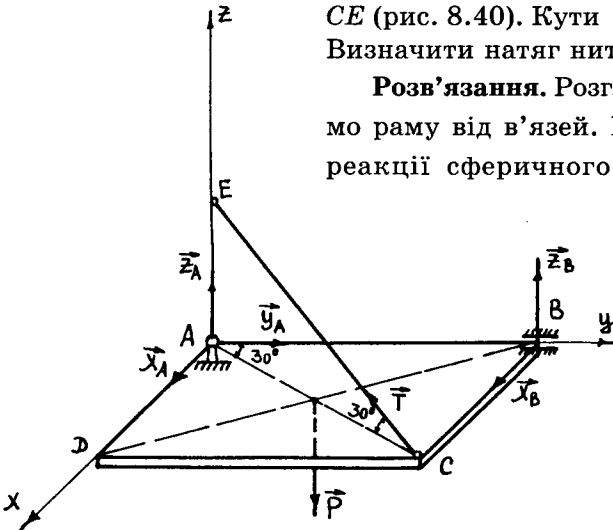


Рис. 8.40

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A - T \cos 30^\circ \sin 30^\circ + X_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - T \cos^2 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; Z_A + Z_B - P + T \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; -P \frac{AC}{2} \cos 30^\circ + T \sin 30^\circ \cdot AC \cos 30^\circ + Z_B AC \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; P \frac{AC}{2} \sin 30^\circ - T \sin 30^\circ \cdot AC \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; -X_B \cdot AC \cos 30^\circ = 0.$$

З рівнянь знайдемо:

$$X_B = 0; T = \frac{P}{2 \sin 30^\circ} = P = 200 \text{ (Н)}; Z_B = \frac{P}{2} - T \sin 30^\circ = 100 - 100 = 0;$$

$$Z_A = P - T \sin 30^\circ = 200 - 100 = 100 \text{ (Н)}; Y_A = T \cos^2 30^\circ = 200 \cdot 0,75 = 150 \text{ (Н)};$$

$$X_A = T \cos 30^\circ \sin 30^\circ = 200 \cdot 0,5 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ (Н)}.$$

Реакції \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{Z}_B та \vec{T} напрямлені так, як це зображено на рис. 8.40

Задача 8.23. Квадратна однорідна пластинка $ABCD$, що має розмір $a = 30$ см і вагу $P = 5$ Н, закріплена в точці A за допомогою сферичного шарніра, а в точці B — за допомогою циліндричного шарніра. В точці E пластинка спирається на вістря. В точці H на пластинку діє сила \vec{F} , що є паралельною стороні AB (рис. 8.41). Визначити реакції в точках A , B і E , якщо $CE = ED$, $BH = 10$ см, $F = 10$ Н. Пластинка утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу пластинки $ABCD$. Звільняємо пластинку від в'язей. На пластинку діють активні сили \vec{P} , \vec{F} та реакції в'язей \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{Y}_B , \vec{Z}_B , \vec{N}_E (рис. 8.41). Сили, що діють на пластинку, утворюють довільну просторову систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A . Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{P} , \vec{F} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{Y}_B , \vec{Z}_B , \vec{N}_E :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A - F = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - Y_B + N_E \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; -Z_A + Z_B - P + N_E \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; -P \frac{a}{2} \cos \alpha + N_E a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; -Z_B a + P \frac{a}{2} - N_E \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} + F \cdot BH \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; F \cdot BH \cos \alpha - Y_B a + N_E \sin \alpha \cdot \frac{a}{2} = 0.$$

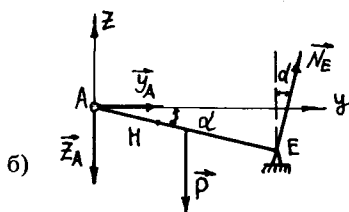
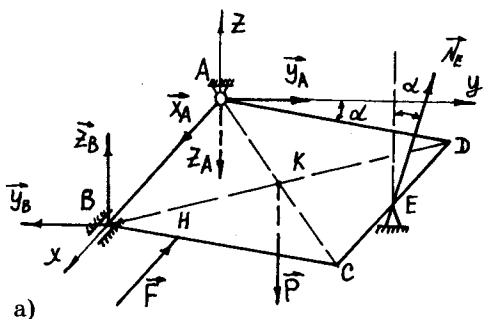


Рис. 8.41

З рівнянь знаходимо:

$$X_A = F = 10 \text{ Н}; N_E = \frac{Pa \cos \alpha}{2a} = \frac{P}{2} \cos \alpha = \frac{5}{2} \cdot 0,866 = 2,16 \text{ (Н)};$$

$$Y_B = \frac{F \cdot BH \cos \alpha + N_E \sin \alpha \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,866 + 2,16 \cdot 0,5 \cdot 15}{30} = 3,43 \text{ (Н)};$$

$$Y_A = Y_B - N_E \sin \alpha = 3,43 - 2,16 \cdot 0,5 = 2,35 \text{ (Н)};$$

$$Z_B = \frac{P \frac{a}{2} - N_E \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} + F \cdot BH \sin \alpha}{a} =$$

$$= \frac{5 \cdot 15 - 2,16 \cdot 0,866 \cdot 15 + 10 \cdot 10 \cdot 0,5}{30} = 3,23 \text{ (Н)}.$$

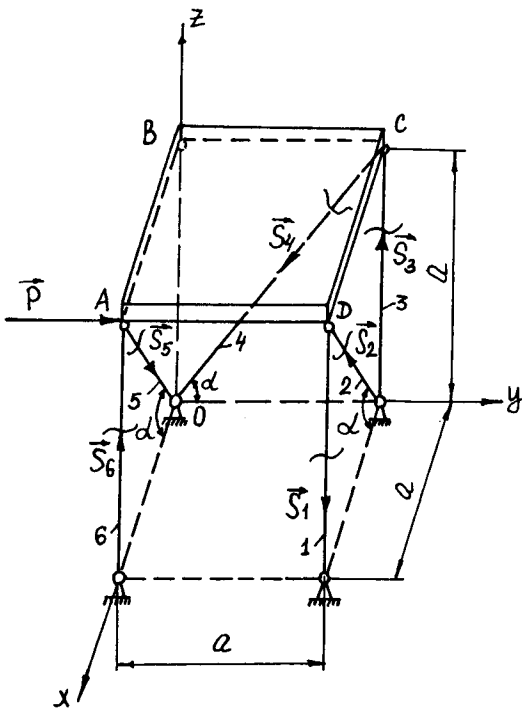


Рис. 8.42

Реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ та \vec{N}_E напрямлені так, як це зображено на рис. 8.41.

Задача 8.24. Визначити зусилля в шести стрижнях, що підтримують квадратну плиту $ABCD$. На плиту уздовж сторони AD діє горизонтальна сила \vec{P} (рис. 8.42). Вагою плити знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу плити $ABCD$. Застосуємо метод перерізів. Уявно перерізуємо стрижні. На плиту діють зусилля в стрижнях $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$ та активна сила \vec{P} (рис. 8.42). Сили утворюють зрівноважену довільну просторову систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O . Складемо рівняння рівноваги системи сил $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$ та \vec{P} :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S_5 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad P - S_4 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad S_6 + S_3 - S_1 + S_2 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - S_4 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_1 a + S_3 a + S_2 \sin \alpha \cdot a - Pa = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_6 a + S_1 a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad P a - S_2 \cos \alpha \cdot a = 0.$$

З рівнянь знаходимо:

$$S_1 = S_3 = S_6 = P;$$

$$S_2 = S_4 = S_5 = P\sqrt{2}.$$

З рис. 8.42 випливає, що стрижні 1, 4 та 5 розтягуються, а стрижні 2, 3 та 6 стискаються.

Задача 8.25. Пара сил, що обертає турбіну T (рис. 8.43), має момент $M = 2$ кН·м. Момент пари сил зрівноважується моментом сили \vec{P} , що прикладена до зубця B зубчастого колеса OB , та реакціями опор. Лінія дії сили \vec{P} перпендикулярна до радіуса $OB = 0,6$ м та утворює з горизонтом кут $\alpha = 15^\circ$. Визначити реакції опор вала турбіни, якщо вага турбіни з валом і колесом $G = 12$ кН. Лінія дії сили \vec{G} напрямлена уздовж осі OC . Також ще відомо, що $AC = 3$ м, $AO = 1$ м.

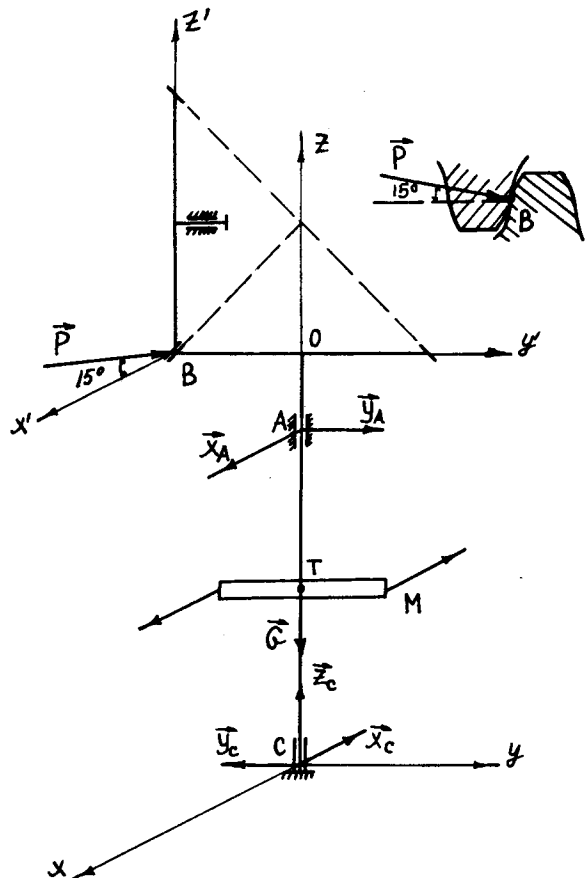


Рис. 8.43

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вала з колесом та турбіною. Звільняємо вал від в'язей. На вал з колесом та турбіною діють сила \vec{P} , що прикладена до зубця колеса, реакції підшипників $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C$ та пара сил з моментом M . Сили та пара утворюють довільну просторову систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці C . Складемо рівняння рівноваги сил $\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C$ та пари сил з моментом M :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad -X_C + X_A - P \cos 15^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad Y_C + Y_A = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \quad -G + Z_C - P \sin 15^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0; \quad -Y_A \cdot 3 + P \sin 15^\circ \cdot OB = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) &= 0; \quad X_A \cdot 3 - P \cos 15^\circ \cdot 4 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) &= 0; \quad M - P \cos 15^\circ \cdot OB = 0. \end{aligned}$$

З рівнянь знаходимо:

$$\begin{aligned} P &= \frac{M}{\cos 15^\circ \cdot OB} = \frac{1,2}{0,966 \cdot 0,6} = 2,07 \text{ (кН)}; \\ X_A &= \frac{P \cos 15^\circ \cdot 4}{3} = \frac{2,07 \cdot 0,966 \cdot 4}{3} = 2,67 \text{ (кН)}; \\ Y_A &= \frac{P \sin 15^\circ \cdot OB}{3} = \frac{2,07 \cdot 0,259 \cdot 0,6}{3} = 0,107 \text{ (кН)}; \\ X_C &= X_A - P \cos 15^\circ = 2,67 - 2,07 \cdot 0,966 = 0,67 \text{ (кН)}; \\ Y_C &= Y_A = 0,107 \text{ (кН)}; \\ Z_C &= G + P \sin 15^\circ = 12 + 2,07 \cdot 0,259 = 12,54 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C$ та \vec{P} напрямлені так, як це зображено на рис. 8.43.

Задача 8.26. Прямокутні двері, що мають вертикальну вісь обертання AB , відчинені на кут $\angle CAD = 60^\circ$ та утримуються у цьому положенні двома нитками. Нитка CD проходить через блок D та натягується вантажем $P = 320$ Н. Нитка EF закріплена в точці F підлоги. Вага дверей $G = 640$ Н;

$AC = AD = 1,8$ м; $AB = 2,4$ м.
 Нехтуючи тертям, визначити
 натяг нитки EF , а також ре-
 акції опор A та B
 (рис. 8.44).

Розв'язання. Розглянемо
 рівновагу дверей. Звільняє-
 мо двері від в'язей. На двері
 діють активні сили \vec{P} , \vec{G} ,
 реакції підшипників
 \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{Z}_B та нит-
 ки \vec{T} . Сили утворюють
 зрівноважену довільну про-
 сторову систему сил. Побу-
 дуємо декартову систему ко-
 ординат з початком у точці
 B . Складемо рівняння рівно-
 ваги системи сил \vec{P} , \vec{G} ,
 \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{Z}_B та \vec{T} :

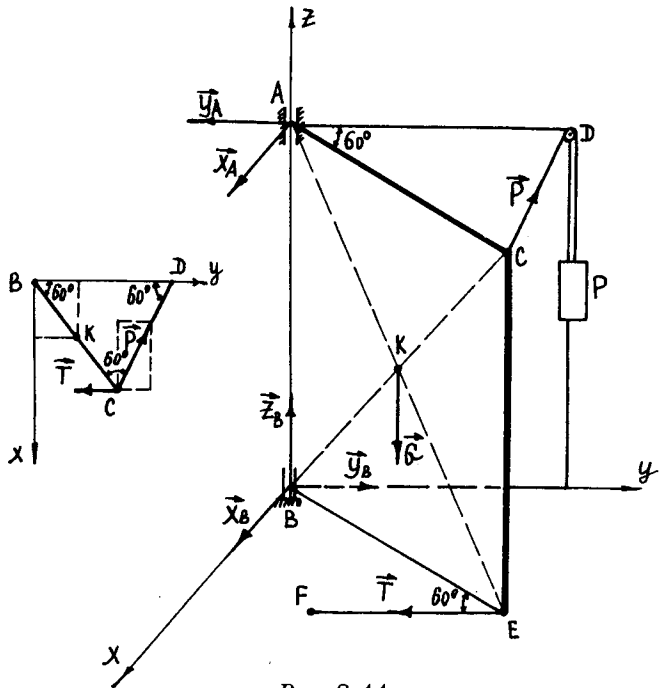


Рис. 8.44

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - P \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Y_A + Y_B + P \sin 30^\circ - T = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_B - G = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad -G \frac{AC}{2} \cos 60^\circ - P \sin 30^\circ \cdot AB + Y_A \cdot AB = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \cos 30^\circ \cdot AB + G \frac{AC}{2} \sin 60^\circ + X_A \cdot AB = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad -T \cdot AC \sin 60^\circ + P \sin 30^\circ \sin 60^\circ \cdot AC +$$

$$+ P \cos 30^\circ \cos 60^\circ \cdot AC = 0.$$

З рівнянь знаходимо:

$$Z_B = G = 640 \text{ (H)};$$

$$Y_A = \frac{G \frac{AC}{2} \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \cdot AB}{AB} = \frac{640 \cdot 0,9 \cdot 0,5 + 320 \cdot 0,5 \cdot 2,4}{2,4} = 280 \text{ (H)};$$

$$X_A = \frac{P \cos 30^\circ \cdot AB - G \frac{AC}{2} \sin 60^\circ}{AB} =$$

$$= \frac{320 \cdot 0,866 \cdot 2,4 - 640 \cdot 0,9 \cdot 0,866}{2,4} = 69,3 \text{ (Н)};$$

$$T = \frac{P \sin 30^\circ \sin 60^\circ \cdot AC + P \cos 30^\circ \cos 60^\circ \cdot AC}{AC \sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{320 \cdot 0,5 \cdot 0,866 + 320 \cdot 0,866 \cdot 0,5}{0,866} = 320 \text{ (Н)};$$

$$X_B = P \cos 30^\circ - X_A = 320 \cdot 0,866 - 69,3 = 207,8 \text{ (Н)};$$

$$Y_B = Y_A + T - P \sin 30^\circ = 280 + 320 - 320 \cdot 0,5 = 440 \text{ (Н)}.$$

Реакції \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B , \bar{Z}_B та \bar{T} напрямлені так, як це зображено на рис. 8.44.

Задача 8.27. Підвіска підшипника пасового шківa D прикріплена до гладенької горизонтальної стелі MN у точках A та C і спирається на неї в точці B (рис. 8.45). Трикутник $\triangle ABC$ рівнобічний. Його сторони дорівнюють 30 см. Положення центра шківa D визначається вертикаллю $EF = 40$ см, що побудована із центра E трикутника $\triangle ABC$, і горизонталлю $FD = 50$ см, що є паралельною до сторони AC . Площина шківa є перпендикулярною до прямої FD . Натяг P кожної гілки паса дорівнює 1200 Н і має нахил до вертикалі, що дорівнює 30° . Нехтуючи вагою частин підвіски, визначити реакції опор A , B та C .

Розв'язання. Розглянемо рівновагу підвіски. Звільняємо підвіску від в'язей. На підвіску діють сили натягу пасів \bar{P} та реакції в'язей \bar{Z}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_B , \bar{Y}_C , \bar{Z}_C . Сили утворюють зрівноважену довільну просторову систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці E . Складемо рівняння рівноваги системи сил \bar{P} , \bar{Z}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_B , \bar{Y}_C та \bar{Z}_C :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad 0 \equiv 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - Y_C + 2P \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_B + Z_A - Z_C + 2P \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad Z_B \cdot 17,32 + Z_C \cdot 8,66 - Z_A \cdot 8,66 - 2P \sin 30^\circ \cdot 40 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad Z_C \cdot 15 + Z_A \cdot 15 - 2P \cos 30^\circ \cdot 50 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot 15 - Y_C \cdot 15 + 2P \sin 30^\circ \cdot 50 = 0.$$

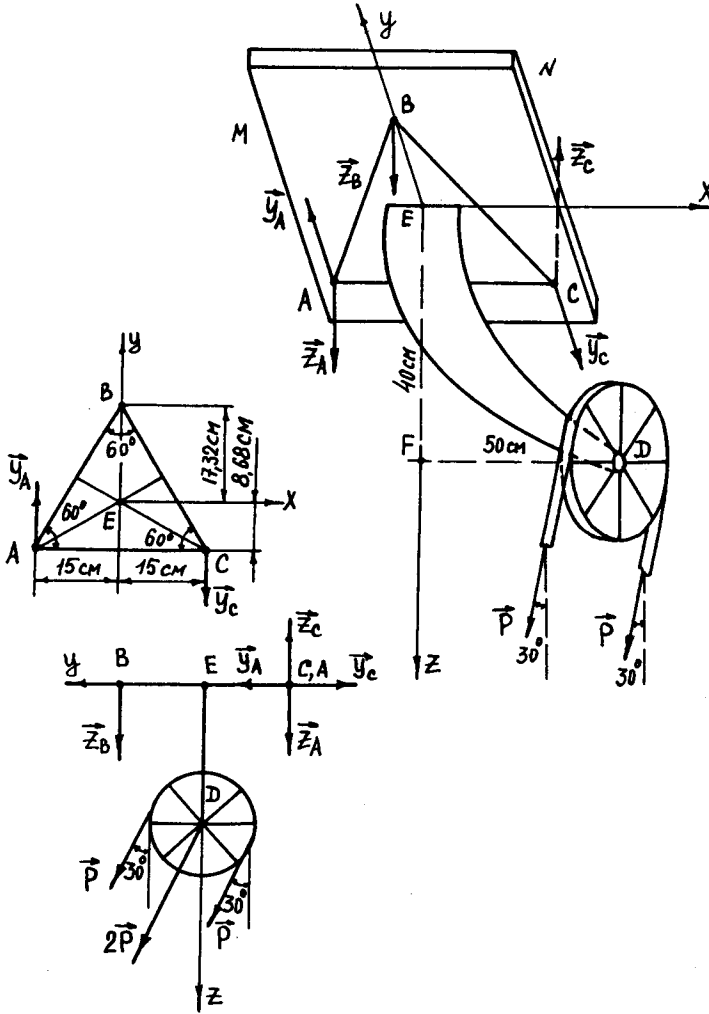


Рис. 8.45

З рівнянь знайдемо:

$$Y_A = 1400 \text{ Н}; Z_A = 1847 \text{ Н}; Z_B = 1154 \text{ Н}; Y_C = 2600 \text{ Н}; Z_C = 5081 \text{ Н}.$$

Реакції \bar{Y}_A , \bar{Z}_A , \bar{Z}_B , \bar{Y}_C та \bar{Z}_C напрямлені так, як це зображено на рис. 8.45.

Задача 8.28. Тринога $ABDE$, що має форму правильної піраміди, закріплена шарнірно на двох консольних балках. Через блок E триноги проходить трос, який рівномірно за допомогою лебідки підіймає вантаж, вага якого P . Від блока до лебідки трос тягнеться паралельно до консолі (рис. 8.46). Визначити реакції жорсткого защемлення першої консолі. Вагою консолі та триноги знехтувати. Висота триноги $l/2$.

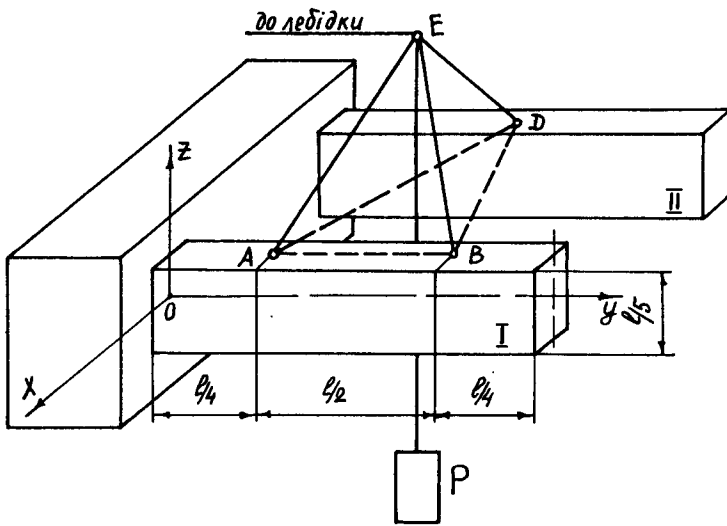


Рис. 8.46

Розв'язання. Тринога та консолі утворюють систему твердих тіл. Розглянемо спочатку рівновагу блока E триноги $ABDE$ (рис. 8.47). Застосуємо метод перерізів. Уявно перерізуємо стрижні триноги. На блок E діють активна сила \bar{P} та зусилля в стрижнях триноги \bar{S}_{AE} , \bar{S}_{BE} та \bar{S}_{DE} . Сили \bar{P} , \bar{S}_{AE} , \bar{S}_{BE} та \bar{S}_{DE} утворюють зрівноважену

просторову збіжну систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O_1 (рис. 8.47). Складемо рівняння рівноваги системи сил \bar{P} , \bar{S}_{AE} , \bar{S}_{BE} та \bar{S}_{DE} :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx_1} = 0; \quad -S_{AE} \sin^2 30^\circ - S_{BE} \sin^2 30^\circ + S_{DE} \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky_1} = 0; \quad -P + S_{AE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ - S_{BE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz_1} = 0; \quad -P + S_{AE} \cos 30^\circ + S_{BE} \cos 30^\circ + S_{DE} \cos 30^\circ = 0.$$

З рівнянь визначаємо:

$$S_{AE} = 1,54 P; \quad S_{BE} = -0,77 P$$

(змінюємо напрям сили \bar{S}_{BE} на рис. 8.47 на протилежний).

Тепер розглянемо рівноваги консолі (рис. 8.47). Звільняємо консоль від в'язей. На консоль діють сили \bar{S}'_{AE} та \bar{S}'_{BE} (на рис. 8.48 ці сили подано трьома складовими) та реакції консолі \bar{X}_O , \bar{Y}_O , \bar{Z}_O , M_x , M_y та M_z . Сили та пари утворюють зрівноважену довільну просторову систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O . Складемо рівняння рівноваги системи сил, що діють на консоль:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_0 + S'_{AE} \sin^2 30^\circ - S'_{BE} \sin^2 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_0 - S'_{AE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ - S'_{BE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; Z_0 - S'_{AE} \cos 30^\circ + S'_{BE} \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; M_x - S'_{AE} \cos 30^\circ \cdot \frac{l}{4} + S'_{BE} \cos 30^\circ \cdot \frac{3l}{4} + S'_{AE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cdot \frac{l}{10} + S'_{BE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cdot \frac{l}{10} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; M_y + S'_{AE} \sin^2 30^\circ \cdot \frac{l}{10} - S'_{BE} \sin^2 30^\circ \cdot \frac{l}{10} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; M_z - S'_{AE} \sin^2 30^\circ \cdot \frac{l}{4} + S'_{BE} \sin^2 30^\circ \cdot \frac{3l}{4} = 0.$$

З рівнянь знаходимо:

$$X_O = -S'_{AE} \sin^2 30^\circ + S'_{BE} \sin^2 30^\circ = 1,54 \cdot 0,5^2 P - 0,77 \cdot 0,5^2 P = -0,192P$$

(змінюємо напрям сили \vec{X}_O на рис. 8.48 на протилежний);

$$Y_O = S'_{AE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ + S'_{BE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 1,54 \cdot 0,5 \cdot 0,866P + 0,77 \cdot 0,5 \cdot 0,866P = P;$$

$$Z_O = -S'_{BE} \cos 30^\circ + S'_{AE} \cos 30^\circ = -0,77 \cdot 0,866P + 1,54 \cdot 0,866P = 0,67P;$$

$$M_x = S'_{AE} \cos 30^\circ \cdot \frac{l}{4} - S'_{BE} \cos 30^\circ \cdot \frac{3l}{4} - S'_{AE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cdot \frac{l}{10} - S'_{BE} \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cdot \frac{l}{10} = 0,303Pl - 0,5Pl - 0,067Pl - 0,083Pl = -0,347Pl$$

(змінюємо напрям моменту M_x на рис. 8.48 на протилежний);

$$M_y = S'_{BE} \sin^2 30^\circ \cdot \frac{l}{10} - S'_{AE} \sin^2 30^\circ \cdot \frac{l}{10} = 0,019Pl - 0,038Pl = -0,019Pl$$

(змінюємо напрям моменту M_y на рис. 8.48 на протилежний);

$$M_z = S'_{AE} \sin^2 30^\circ \cdot \frac{l}{4} - S'_{BE} \sin^2 30^\circ \cdot \frac{3l}{4} = 0,096Pl - 0,144Pl = -0,048Pl$$

(змінюємо напрям моменту M_z на рис. 8.48 на протилежний).

Сили \vec{X}_O , \vec{Y}_O , \vec{Z}_O та пари сил з моментами M_x , M_y , M_z напрямлені так, як це зображено на рис. 8.48.

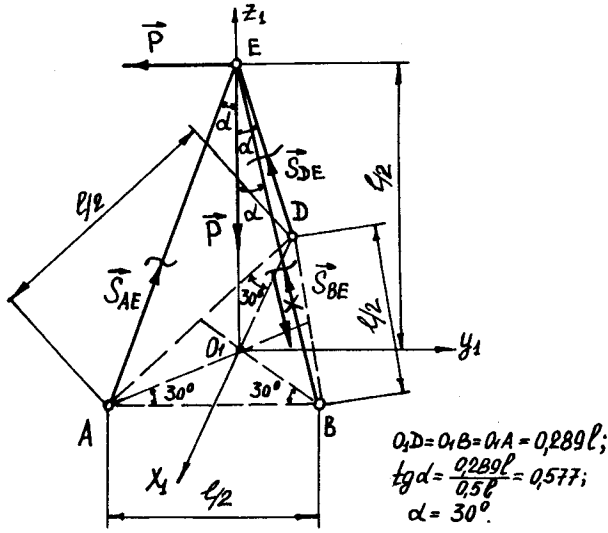


Рис. 8.47

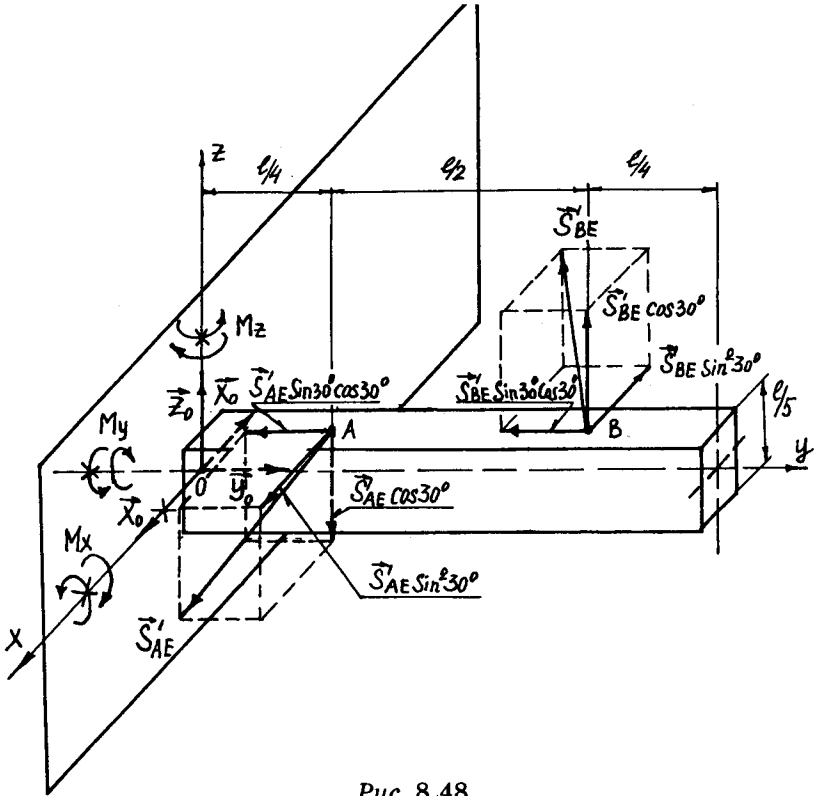


Рис. 8.48

Задача 8.29. До вершин A , H , B та D куба прикладені чотири рівні за модулем сили: $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |\vec{P}_3| = |\vec{P}_4| = |\vec{P}|$, при цьому сила \vec{P}_1 напрямлена вздовж AC , \vec{P}_2 — вздовж HF , \vec{P}_3 — вздовж BE та \vec{P}_4 — вздовж DG (рис. 8.49). Звести систему до найпростішого вигляду. При розрахунках прийняти, що довжина ребра куба дорівнює a см.

Розв'язання. Приймаємо за центр зведення точку A . Визначаємо головний вектор та головний момент системи сил \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 та \vec{P}_4 :

$$R_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2} = \sqrt{(P\sqrt{2})^2 + (P\sqrt{2})^2} = 2P,$$

$$\text{де } R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = P_1 \cos \alpha - P_2 \cos \alpha = 0;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = P_2 \sin \alpha + P_1 \sin \alpha + P_4 \cos \alpha - P_3 \cos \alpha = P\sqrt{2};$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = P_4 \sin \alpha + P_3 \sin \alpha = P\sqrt{2};$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

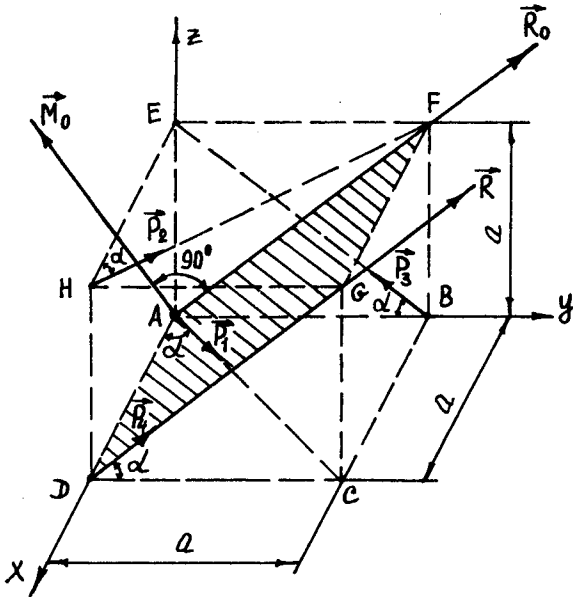


Рис. 8.49

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)\right)^2} = \\ = \sqrt{(-Pa\sqrt{2})^2 + (Pa\sqrt{2})^2} = 2Pa,$$

де $M_x = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = -P_2 \sin \alpha \cdot a + P_3 \sin \alpha \cdot a = 0;$

$$M_y = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = -P_2 \cos \alpha \cdot a - P_4 \sin \alpha \cdot a = -Pa\sqrt{2};$$

$$M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = P_2 \sin \alpha \cdot a + P_4 \cos \alpha \cdot a = Pa\sqrt{2};$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Визначаємо косинус кута між \vec{M}_O та \vec{R}_O , тобто

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{R}_O) = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{M_O R_O} = \frac{-Pa\sqrt{2} \cdot P\sqrt{2} + Pa\sqrt{2} \cdot P\sqrt{2}}{2Pa \cdot 2P} = 0.$$

Оскільки $\vec{R}_O \neq \vec{0}$; $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ та $\cos(\vec{M}_O, \vec{R}_O) = 0$, система сил \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 та \vec{P}_4 зводиться до рівнодійної $\vec{R} = \vec{R}_O$. Лінія дії рівнодійної проходить через точку D , як це зображено на рис. 8.49, оскільки

$$AD = \frac{|\vec{M}_O|}{R_O} = \frac{2Pa}{2P} = a.$$

Головний вектор \vec{R}_O , головний момент \vec{M}_O та рівнодійна $\vec{R} = \vec{R}_O$ зображено на рис. 8.49.

Задача 8.30. До вершин куба, ребра якого дорівнюють 5 см, прикладені шість рівних за модулем сил по 2 Н кожна (рис. 8.50). Звести цю систему до найпростішого вигляду.

Розв'язання. Приймаємо за центр зведення точку O . Визначаємо головний вектор та головний момент системи сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_4 , \vec{F}_5 та \vec{F}_6 :

$$R_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2} = 0,$$

$$\text{де } R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = F_2 - F_5 = 2 - 2 = 0;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_3 - F_6 = 2 - 2 = 0;$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_4 - F_1 = 2 - 2 = 0;$$

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)\right)^2} = \\ = \sqrt{20^2 + 20^2 + 20^2} = 34,64 \text{ (Н} \cdot \text{см)};$$

$$\text{де } M_x = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = F_4 \cdot 5 + F_6 \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20 \text{ (Н} \cdot \text{см)};$$

$$M_y = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = F_5 \cdot 5 + F_3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20 \text{ (Н} \cdot \text{см)};$$

$$M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = F_3 \cdot 5 + F_5 \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20 \text{ (Н} \cdot \text{см)}.$$

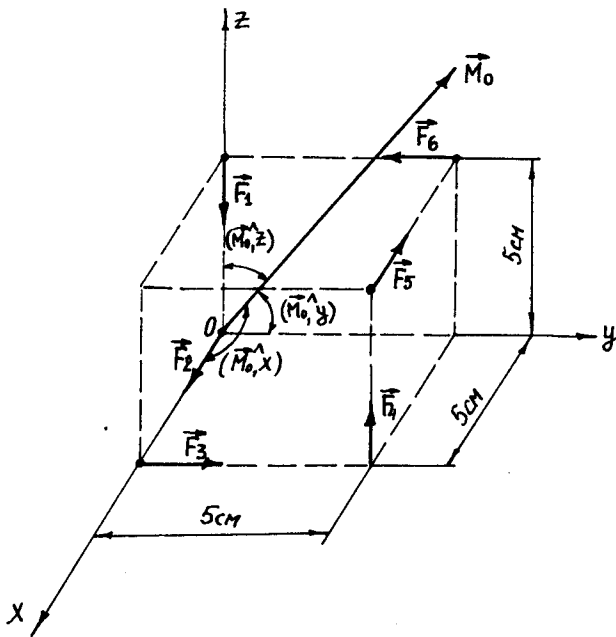


Рис. 8.50

Оскільки $\vec{R}_O = \vec{0}$; $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, то система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_6$ зводиться до пари сил, момент якої $M_O = 34,64 \text{ Н} \cdot \text{см}$.

Визначаємо напрямні косинуси вектора \vec{M}_O :

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, x}) = \frac{M_x}{M_O} = \frac{20}{34,64} = 0,577;$$

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, y}) = \frac{M_y}{M_O} = \frac{20}{34,64} = 0,577;$$

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, z}) = \frac{M_z}{M_O} = \frac{20}{34,64} = 0,577.$$

Кут $(\widehat{\vec{M}_O, z})$ дорівнює $54^\circ 48'$. Вектор \vec{M}_O зображено на рис. 8.50.

Задача 8.31. Уздовж ребер прямокутного паралелепіпеда, які відповідно дорівнюють 10, 4 та 5 м, діють шість сил (рис. 8.51): $P_1 = 4 \text{ Н}$, $P_2 = 6 \text{ Н}$, $P_3 = 3 \text{ Н}$, $P_4 = 2 \text{ Н}$, $P_5 = 6 \text{ Н}$, $P_6 = 8 \text{ Н}$. Звести цю систему сил до найпростішого вигляду.

Розв'язання. Приймаємо за центр зведення точку O . Визначаємо головний вектор та головний момент системи сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_6$:

$$R_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5,38 \text{ (Н} \cdot \text{м)},$$

$$\text{де } R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = -P_5 + P_2 = -6 + 6 = 0;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = P_1 - P_4 = 4 - 2 = 2 \text{ (Н)};$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = P_6 - P_3 = 8 - 3 = 5 \text{ (Н)};$$

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)\right)^2} = \\ = \sqrt{(-50)^2 + (42)^2 + (-68)^2} = 94,28 \text{ (Н} \cdot \text{м)},$$

$$\text{де } M_x = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = -P_1 \cdot 5 - P_3 \cdot 10 = -20 - 30 = -50 \text{ (Н} \cdot \text{м)};$$

$$M_y = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = P_2 \cdot 5 + P_3 \cdot 4 = 30 + 12 = 42 \text{ (Н} \cdot \text{м)};$$

$$M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = -P_2 \cdot 10 - P_4 \cdot 4 = -60 - 8 = -68 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Визначаємо косинус кута між \vec{R}_O та \vec{M}_O :

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{R}_O}) = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{M_O R_O} = \frac{-50 \cdot 0 + 42 \cdot 2 - 68 \cdot 5}{5,38 \cdot 94,28} = -0,505.$$

Оскільки $\vec{R}_O \neq \vec{0}$; $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, та $0 < \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{R}_O}) < \pm 1$, то система сил зводиться до динамічного гвинта. Динамічний гвинт складається з сили \vec{R}_O та пари сил з моментом M^* :

$$M^* = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{R_O} = \frac{-50 \cdot 0 + 42 \cdot 2 - 68 \cdot 5}{5,38} = -47,58 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Визначимо положення центральної осі системи сил:

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z},$$

або

$$\frac{-50 - (5y - 2z)}{0} = \frac{42 + 5x}{2} = \frac{-68 - 2x}{5}.$$

Звідси

$$10y - 4z + 100 = 0;$$

$$29x + 348 = 0.$$

З рівнянь знайдемо: при $z = 0$ $y = -10$ м; $x = -12$ м; при $z = 5$ $y = -8$ м; $x = -12$ м.

Положення центральної осі, сили \vec{R}_O та моменту M^* зображено на рис. 8.51.

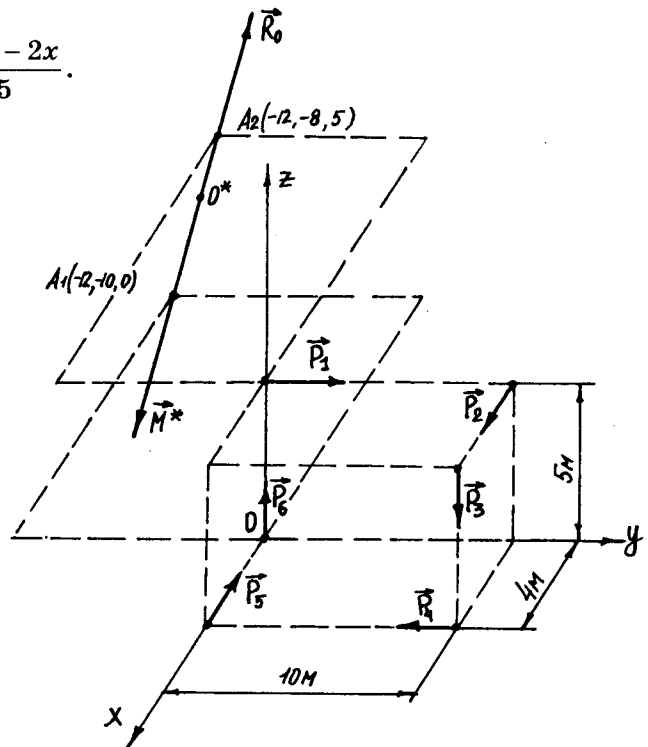


Рис. 8.51

8.3. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил. Урахування сил тертя

Задача 8.32. Горизонтальна балка, що підтримує балкон, зазнає дії рівномірно розподіленого навантаження, яке має інтенсивність $q = 2$ кН/м. На балку також діє сила $P = 2$ кН (рис. 8.52). Визначити реакції опори А балки.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільняємо балку від в'язей. На балку діють активна сила \vec{P} , розподілені сили інтенсивністю \vec{q} та реакції жорсткого защемлення \vec{X}_A , \vec{Y}_A та M_A . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці А. Складемо рівняння рівноваги системи сил:

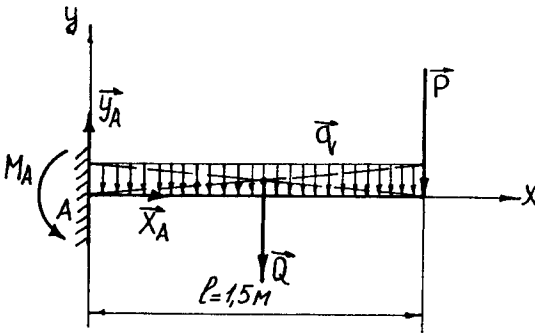


Рис. 8.52

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - Q - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; M_A - 1,5P - Q \frac{l}{2} = 0,$$

де $Q = ql = 2 \cdot 1,5 = 3$ (кН).

З рівнянь визначаємо:

$$X_A = 0;$$

$$Y_A = 1,5q + P = 1,5 \cdot 2 + 2 = 5 \text{ (кН)};$$

$$M_A = 1,5P + \frac{q l^2}{2} = 1,5 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 1,5^2}{2} = 5,25 \text{ (кН)}.$$

Реакції жорсткого защемлення А (\vec{Y}_A та M_A) напрямлені так, як зображено на рис. 8.52.

Задача 8.33. Визначити реакції опор балки (рис. 8.53), якщо $M = 6$ кН, $P = 2$ кН.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільняємо балку від в'язей. На балку діють активна сила \vec{P} , пара сил з момен-

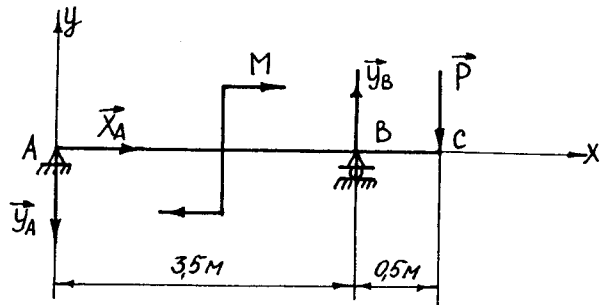


Рис. 8.53

том M та реакції опор \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Y}_B . Сили та пара утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A . Складемо рівняння рівноваги системи сил, що діють на балку:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_B \cdot 3,5 - P \cdot 4 - M = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; Y_A \cdot 3,5 - M - P \cdot 0,5 = 0.$$

З рівнянь визначаємо:

$$X_A = 0;$$

$$Y_A = \frac{M + P \cdot 0,5}{3,5} = \frac{6 + 1}{3,5} = 2 \text{ (кН)};$$

$$Y_B = \frac{P \cdot 4 + M}{3,5} = \frac{8 + 6}{3,5} = 4 \text{ (кН)}.$$

Перевірка визначення реакцій \vec{Y}_A та \vec{Y}_B :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; -Y_A + Y_B - P = 0; -2 + 4 - 2 = 0.$$

Реакції \vec{Y}_A та \vec{Y}_B напрямлені так, як зображено на рис. 8.53.

Задача 8.34. Визначити реакції опор балки (рис. 8.54), якщо $M = 0,8$ кН·м, $P = 2$ кН, $q = 2$ кН/м.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільняємо

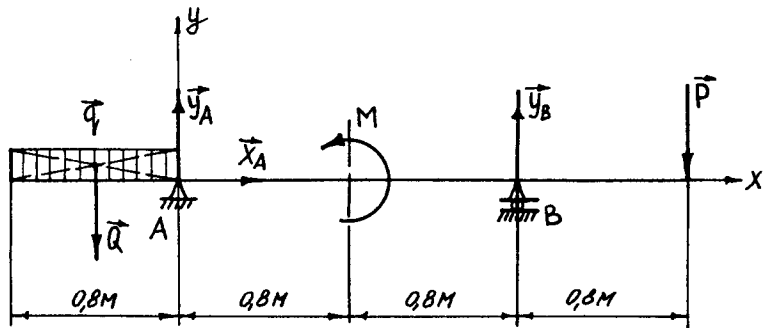


Рис. 8.54

балку від в'язей. На балку діють активна сила \vec{P} , пара сил з моментом M , розподілені сили інтенсивністю \vec{q} та реакції опор балки \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Y}_B . Сили та пара сил утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги системи сил, що діють на балку:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot 0,4 + M + Y_B \cdot 1,6 - P \cdot 2,4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot 2 - Y_B \cdot 1,6 + M - P \cdot 0,8 = 0,$$

де $Q = 0,8q = 0,8 \cdot 2 = 1,6$ (кН).

З рівнянь знаходимо:

$$X_A = 0;$$

$$Y_A = \frac{Q \cdot 2 + M - P \cdot 0,8}{1,6} = \frac{3,2 + 0,8 - 1,6}{1,6} = 1,5 \text{ (кН)};$$

$$Y_B = \frac{P \cdot 2,4 - M - Q \cdot 0,4}{1,6} = \frac{2 \cdot 2,4 - 0,8 - 0,64 + 0,8 - 1,6}{1,6} = 2,1 \text{ (кН)}.$$

Перевірка визначення реакцій \vec{Y}_A та \vec{Y}_B :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Q + Y_A + Y_B - P = 0;$$

$$-1,6 + 1,5 + 2,1 - 2 = 0;$$

$$36 - 36 = 0.$$

Реакції \vec{Y}_A та \vec{Y}_B напрямлені так, як зображено на рис. 8.54.

Задача 8.35. Визначити реакції опор балки (рис. 8.55), якщо $\bar{q}_{\max} = \bar{q}$.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільняємо балку від в'язей. На балку діють розподілені сили інтенсивністю $\bar{q}_{\max} = \bar{q}$ та реакції опор балки \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Y}_B . Сили та пара сил утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці А та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на балку:

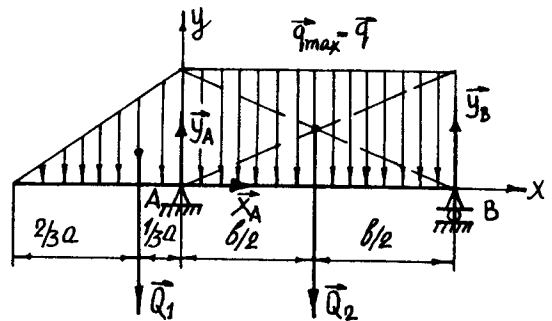


Рис. 8.55

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad Q_1 \cdot \frac{1}{3}a - Q_2 \frac{b}{2} + Y_B b = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y_A b + Q_1 \left(b + \frac{a}{3}\right) + Q_2 \frac{b}{2} = 0,$$

де $Q_1 = \frac{1}{2}qa$, $Q_2 = qb$.

З рівнянь знаходимо:

$$X_A = 0;$$

$$Y_A = \frac{Q_1 \left(b + \frac{a}{3}\right) + Q_2 \frac{b}{2}}{b} = \frac{q}{6} \left(3a + \frac{a^2}{b} + 3b\right);$$

$$Y_B = \frac{Q_2 \frac{b}{2} - Q_1 \frac{a}{3}}{b} = \frac{q}{6} \left(3b - \frac{a^2}{b}\right).$$

Перевірка визначення реакцій \vec{Y}_A та \vec{Y}_B :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - Q_1 - Q_2 = 0;$$

$$\frac{q}{6} \left(3a + \frac{a^2}{b} + 3b\right) + \frac{q}{6} \left(3b - \frac{a^2}{b}\right) - \frac{qa}{2} - qb = 0;$$

$$\frac{qa}{2} + \frac{qa^2}{6b} + \frac{qb}{2} + \frac{qb}{2} - \frac{qa^2}{6b} - \frac{qa}{2} - qb = 0;$$

$$qb - qb = 0.$$

Реакції \vec{Y}_A та \vec{Y}_B напрямлені так, як зображено на рис. 8.55.

Задача 8.36. Однорідна балка, що має вагу $P = 600$ Н та довжину $l = 4$ м, спирається одним кінцем на гладеньку підлогу, а проміжною точкою B — на стовп, що має висоту 3 м (рис. 8.56). Балка утримується в положенні, що подане на рисунку, ниткою AC . Нехтуючи тертям, визначити натяг нитки та реакції стовпа і підлоги.

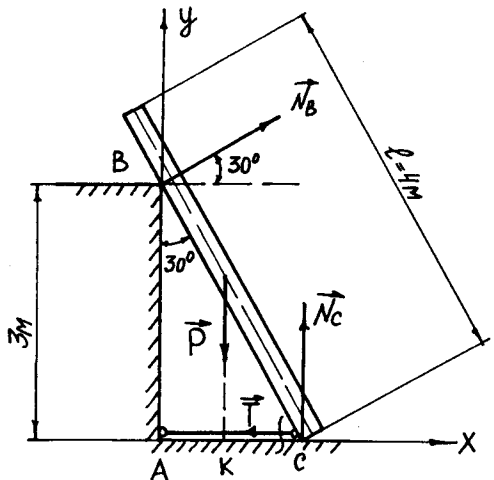


Рис. 8.56

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільнимо балку від в'язей. На балку діють активна сила \vec{P} , сила натягу нитки \vec{T} та реакції \vec{N}_B , \vec{N}_C . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги системи сил, що діють на балку:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; N_B \cos 30^\circ - T = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; N_B \sin 30^\circ - P + N_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; P \cdot KC - N_B \cos 30^\circ \cdot AB - N_B \sin 30^\circ \cdot AC = 0,$$

де $AB = 3$ м; $KC = 2 \sin 30^\circ = 1$ м; $AC = 1,73$ м.

З рівнянь визначаємо:

$$N_B = \frac{P \cdot KC}{(AB \cos 30^\circ + AC \sin 30^\circ)} = \frac{600}{3 \cdot 0,866 + 1,73 \cdot 0,5} = 173,3 \text{ (Н)};$$

$$T = N_B \cos 30^\circ = 173,3 \cdot 0,866 = 150 \text{ (Н)};$$

$$N_C = P - N_B \sin 30^\circ = 600 - 173,3 \cdot 0,5 = 513,3 \text{ (Н)}.$$

Реакції \vec{N}_B , \vec{N}_C та сила натягу нитки \vec{T} напрямлені так, як зображено на рис. 8.56.

Задача 8.37. Однорідна плита AB , що має вагу $P = 100$ Н, вільно спирається в точці A та утримується під кутом 45° до горизонту стрижнями BC та BD . $\triangle BCD$ — рівнобічний трикутник. Точки C та D розташовані на вертикальній прямій CD (рис. 8.57). Нехтуючи вагою стрижнів та вважаючи, що кріплення в точках B , C , D шарнірні, визначити реакцію опору A та зусилля в стрижнях.

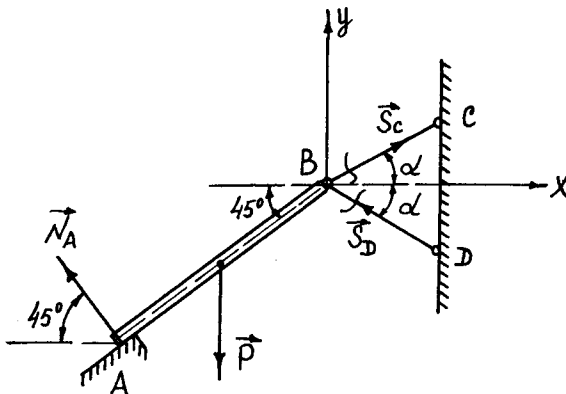


Рис. 8.57

Розв'язання. Розглянемо рівновагу плити. Звільняємо плиту від в'язей (уявно відкидаємо опору A та перерізаємо стрижні BC та BD). На плиту діють активна сила \vec{P} , реакція опору \vec{N}_A та зусилля в стрижнях \vec{S}_C , \vec{S}_D . Сили \vec{P} , \vec{N}_A , \vec{S}_C та \vec{S}_D утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову си-

стему координат з початком в точці B та складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{P} , \vec{N}_A , \vec{S}_C та \vec{S}_D :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -N_A \cos 45^\circ + S_C \cos \alpha - S_D \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_A \sin 45^\circ + S_C \sin \alpha + S_D \sin \alpha - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -N_A l + P \frac{l}{2} \cos 45^\circ = 0.$$

З рівнянь знаходимо:

$$N_A = \frac{P \cos 45^\circ}{2} = \frac{100 \cdot 0,707}{2} = 35,35 \text{ (Н)};$$

$$S_D = \frac{P}{2 \sin \alpha} - \frac{N_A}{2 \sin \alpha} \left(0,707 - \frac{\cos 45^\circ \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) =$$

$$= \frac{100}{2 \cdot 0,5} - \frac{35,35}{2 \cdot 0,5} \left(0,707 - \frac{0,707 \cdot 0,5}{0,866} \right) = 60,4 \text{ (Н)};$$

$$S_C = \frac{S_D \cos \alpha + N_A \cos 45^\circ}{\cos \alpha} = \frac{60,4 \cdot 0,866 + 35,35 \cdot 0,707}{0,866} = 89,3 \text{ (Н)}.$$

Дійсний напрям реакції \vec{N}_A зображено на рис. 8.57. Стрижень BC працює на розтяг, BD — на стиск.

Задача 8.38. Однорідний стрижень AB , що має вагу $G = 100$ Н, спирається одним кінцем на гладеньку підлогу, другим — на гладеньку площину, яка має кут нахилу до горизонту $\alpha = 30^\circ$ (рис. 8.58). До кінця B стрижня закріплена нитка, яка перекинута через блок C і несе вантаж P ; частина нитки BC є паралельною похилій площині. Нехтуючи тертям, визначити вагу вантажу та сили тиску стрижня в точках A та B при рівновазі стрижня.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу стрижня AB . Звільняємо стрижень від в'язей (рис. 8.58). На стрижень діють активні сили \vec{G} , \vec{P} та реакції \vec{N}_A та \vec{N}_B . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці B та складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{G} , \vec{P} , \vec{N}_A , \vec{N}_B :

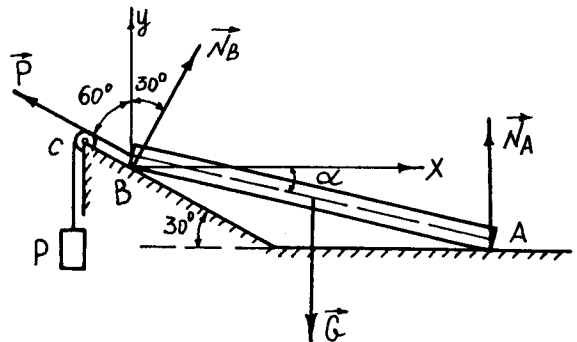


Рис. 8.58

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; N_B \sin 30^\circ - P \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; N_B \cos 30^\circ + P \cos 60^\circ - G + N_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; -G \frac{l}{2} \cos \alpha + N_A l \cos \alpha = 0,$$

де l — довжина стрижня.

З рівнянь знаходимо:

$$N_A = \frac{G}{2} = 50 \text{ (Н)}; N_B = \frac{P \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{25 \cdot 0,866}{0,5} = 43,3 \text{ (Н)};$$

$$P = \frac{G - N_A}{\left(\cos 60^\circ + \frac{\sin 60^\circ \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \right)} = \frac{50}{2} = 25 \text{ (Н)}.$$

Сили тиску стрижня в точках A та B за модулем дорівнюють реакціям \vec{N}_A та \vec{N}_B , але мають протилежний до них напрям.

Задача 8.39. При спорудженні моста виникла необхідність підняття ферми ABC трьома канатами за схемою, що подано на рис. 8.59. Вага ферми $P = 42$ кН, центр ваги ферми розміщений у точці D . Визначити сили натягу канатів, якщо пряма AC є горизонталлю.

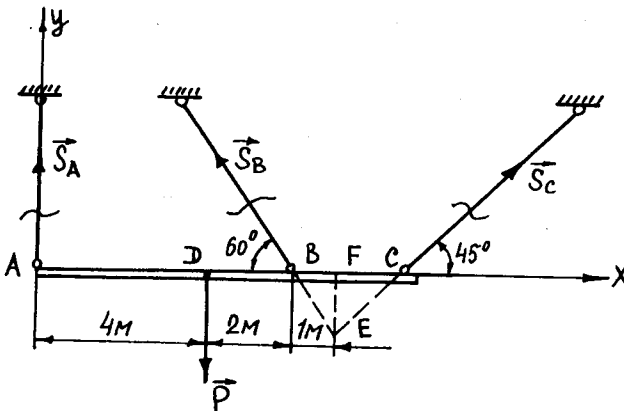


Рис. 8.59

Розв'язання. Розглянемо рівновагу ферми. Звільняємо ферму від в'язей (уявно перерізаємо канати). На ферму діють активна сила \vec{P} та сили натягу канатів $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C$. Сили $\vec{P}, \vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C$ утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A . Складемо рівняння рівноваги системи сил $\vec{P}, \vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C$:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; -S_B \cos 60^\circ + S_C \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; S_A + S_B \sin 60^\circ + S_C \sin 45^\circ - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_E(\vec{F}_k) = 0; P \cdot 3 - S_A \cdot 7 = 0.$$

З рівнянь визначаємо:

$$S_A = \frac{P \cdot 3}{7} = \frac{42 \cdot 3}{7} = 18 \text{ (кН)};$$

$$S_C = \frac{P - S_A}{\left(\frac{\cos 45^\circ \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \sin 45^\circ \right)} = \frac{42 - 18}{\left(\frac{0,707 \cdot 0,866}{0,5} + 0,707 \right)} = 12,43 \text{ (кН)};$$

$$S_B = \frac{S_C \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{12,43 \cdot 0,707}{0,5} = 17,57 \text{ (кН)}.$$

Задача 8.40. На підйомній однорідній драбині довжиною $\ell = 6$ м та вагою $G = 2,4$ кН, яка може обертатися навколо горизонтальної осі A і має кут нахилу до горизонту 60° , в точці D стоїть людина вагою $P = 0,8$ кН на відстані 2 м від кінця B (рис. 8.60). Драбина підтримується у кінця B ниткою BC , що має кут нахилу до горизонту 75° . Визначити силу натягу нитки та реакції опори A .

Розв'язання. Розглянемо рівноваги драбини. Звільняємо драбину від в'язей. На драбину діють активні сили \vec{G} та \vec{P} , реакції опори \vec{X}_A , \vec{Y}_A та сила натягу нитки \vec{T} . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A . Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{G} , \vec{P} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A та \vec{T} :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - T \cos 75^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad T \sin 75^\circ - Y_A - G - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad T \sin 75^\circ \cdot KB - T \cos 75^\circ \cdot AK - G \cdot KM - P \cdot KN = 0,$$

де $KB = 3$ м; $AK = 5,2$ м; $KM = 1,5$ м; $KN = 2$ м.

З рівнянь знайдемо:

$$T = \frac{P \cdot KN + G \cdot KM}{\sin 75^\circ \cdot KB - \cos 75^\circ \cdot AK} = \frac{0,8 \cdot 2 + 2,4 \cdot 1,5}{0,966 \cdot 3 - 0,259 \cdot 5,2} = 3,35 \text{ (кН)};$$

$$X_A = T \cos 75^\circ = 3,35 \cdot 0,259 = 0,87 \text{ (кН)};$$

$$Y_A = T \sin 75^\circ - G - P = 3,35 \cdot 0,966 - 2,4 - 0,8 = 0,036 \text{ (кН)}.$$

Сили \vec{T} , \vec{X}_A та \vec{Y}_A напрямлені так, як це зображено на рис. 8.60.

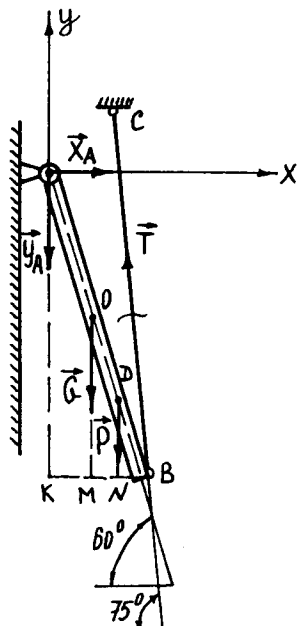


Рис. 8.60

Задача 8.41. Вага ферми з навантаженням $G = 100$ кН. Сила \vec{G} прикладена у точці C ферми. На ферму діє також рівнодійна сил тиску вітру $F = 20$ кН. Лінія дії рівнодійної \vec{F} проходить так, як це зображено на

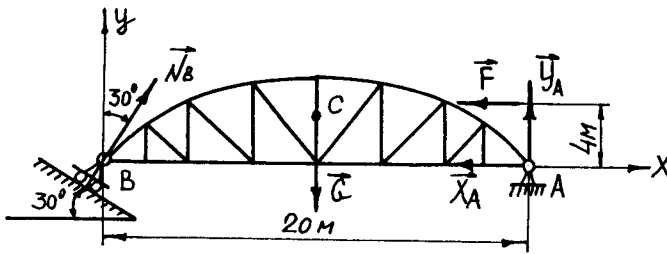


Рис. 8.61

рис. 8.61. Визначити реакції опор ферми.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу ферми. Звільняємо ферму від в'язей. На ферму діють активні сили \vec{G} , \vec{F} та реакції опор ферми \vec{N}_B , \vec{X}_A , \vec{Y}_A . Сили

утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо систему декартових координат з початком у точці B . Складемо рівняння рівноваги системи сил \vec{G} , \vec{F} , \vec{N}_B , \vec{X}_A , \vec{Y}_A :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -X_A - F + N_B \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_B \cos 30^\circ - G + Y_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad F \cdot 4 + G \cdot 10 - N_B \cos 30^\circ \cdot 20 = 0.$$

З рівнянь знаходимо:

$$N_B = \frac{F \cdot 4 + G \cdot 10}{20 \cos 30^\circ} = \frac{20 \cdot 4 + 100 \cdot 10}{20 \cdot 0,866} = 62,4 \text{ (кН)};$$

$$X_A = N_B \sin 30^\circ - F = 62,4 \cdot 0,5 - 20 = 11,2 \text{ (кН)};$$

$$Y_A = G - N_B \cos 30^\circ = 100 - 62,4 \cdot 0,866 = 46 \text{ (кН)}.$$

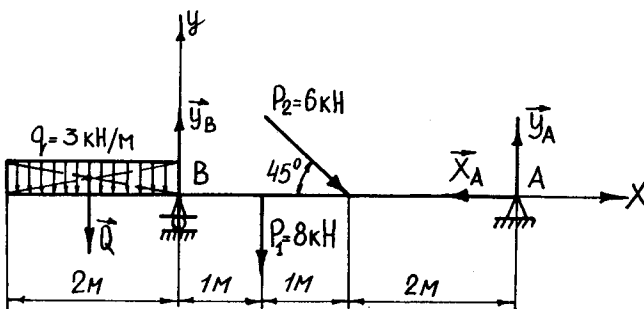


Рис. 8.62

Реакції \vec{N}_B , \vec{X}_A та \vec{Y}_A напрямлені так, як це зображено на рис. 8.61.

Задача 8.42. Визначити реакції опор балки (рис. 8.62).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільняємо балку від в'язей. На балку діють сили \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , розподілені сили інтенсивністю \vec{q} та

реакції опор \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Y}_B . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці B та складемо рівняння рівноваги системи сил, що діють на балку:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad P_2 \cos 45^\circ - X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_B - Q - P_1 - P_2 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot 5 - Y_B \cdot 4 + P_1 \cdot 3 + P_2 \sin 45^\circ \cdot 2 = 0,$$

де $Q = 2q = 6$ кН.

З рівнянь визначаємо:

$$Y_B = \frac{Q \cdot 5 + P_1 \cdot 3 + P_2 \sin 45^\circ \cdot 2}{4} = \frac{6 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 0,707 \cdot 2}{4} = 15,62 \text{ (кН)};$$

$$Y_A = Q + P_1 + P_2 \sin 45^\circ - Y_B = 6 + 8 + 6 \cdot 0,707 - 15,62 = 2,62 \text{ (кН)};$$

$$X_A = P_2 \cos 45^\circ = 6 \cdot 0,707 = 4,24 \text{ (кН)}.$$

Реакції \vec{X}_A , \vec{Y}_A та \vec{Y}_B напрямлені так, як це зображено на рис. 8.62.

Задача 8.43. Визначити реакції опор балки (рис. 8.63).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільняємо балку від в'язей. На балку діють активна сила \vec{P} , розподілені сили інтенсивністю \vec{q} , пара сил з

моментом M та реакції опори балки M_A , \vec{X}_A , \vec{Y}_A . Сили та пари сил утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги системи сил, що діють на балку:

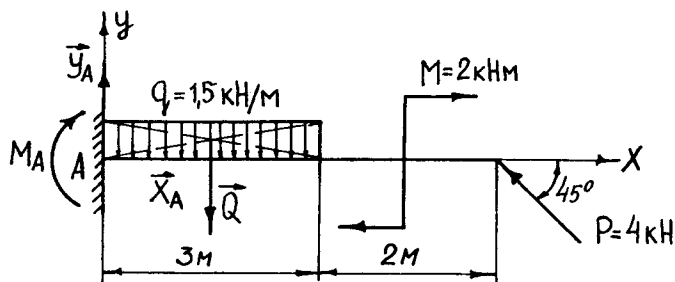


Рис. 8.63

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q + P \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -M_A - Q \cdot 1,5 - M + P \sin 45^\circ \cdot 5 = 0,$$

де $Q = 3q = 1,5 \cdot 3 = 4,5$ (кН).

З рівнянь визначаємо:

$$X_A = P \cos 45^\circ = 4 \cdot 0,707 = 2,83 \text{ (кН)};$$

$$Y_A = Q - P \sin 45^\circ = 4,5 - 4 \cdot 0,707 = 4,5 - 2,83 = 1,67 \text{ (кН)};$$

$$M_A = P \sin 45^\circ \cdot 5 - Q \cdot 1,5 - M = 4 \cdot 0,707 \cdot 5 - 4,5 \cdot 1,5 - 2 = 5,39 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Сили \vec{X}_A , \vec{Y}_A та момент пари сил M_A напрямлені так, як це подано на рис. 8.63.

Задача 8.44. Визначити реакції опор балки (рис. 8.64).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки. Звільняємо балку від в'язей. На балку діють активна сила \vec{P} , пара сил з моментом M , розподілені сили інтенсивністю \vec{q}_{\max} та реакції опори балки \vec{X}_A , \vec{Y}_A , M_A . Сили та пара сил

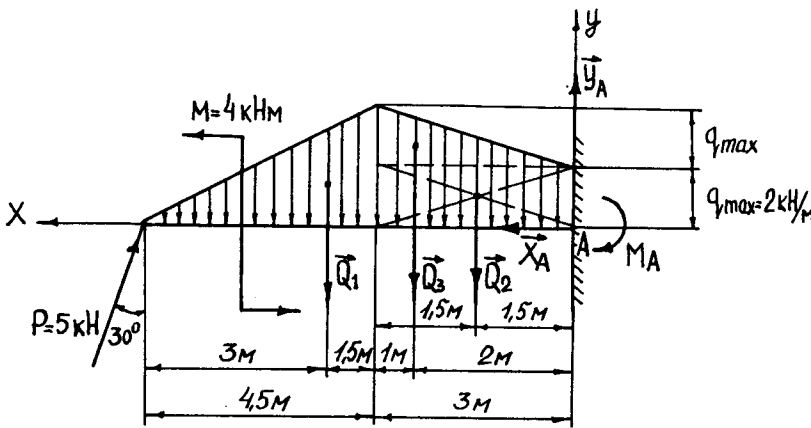


Рис. 8.64

утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці А та складемо рівняння рівноваги системи сил, що діють на балку:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A - P \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A + P \cos 30^\circ - Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; -M_A + M + Q_1 \cdot 4,5 + Q_2 \cdot 1,5 + Q_3 \cdot 2 - P \cos 30^\circ \cdot 7,5 = 0,$$

де $Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 2q_{\max} \cdot 4,5 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4,5 = 9 \text{ (кН)};$

$$Q_2 = q_{\max} \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (кН)};$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ (кН)}.$$

З рівнянь знаходимо:

$$X_A = P \sin 30^\circ = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ (кН)};$$

$$Y_A = Q_1 + Q_2 + Q_3 - P \cos 30^\circ = 9 + 6 + 3 - 5 \cdot 0,866 = 13,67 \text{ (кН)};$$

$$\begin{aligned} M_A &= -P \cos 30^\circ \cdot 7,5 + M + Q_1 \cdot 4,5 + Q_2 \cdot 1,5 + Q_3 \cdot 2 = \\ &= -32,47 + 4 + 9 \cdot 4,5 + 6 \cdot 1,5 + 3 \cdot 2 = 27 \text{ (кН} \cdot \text{м)}. \end{aligned}$$

Сили \vec{X}_A , \vec{Y}_A та момент пари сил M_A напрямлені так, як це зображено на рис. 8.64.

Задача 8.45. Визначити реакції опор A , B , C та шарніра D складеної балки (рис. 8.65).

Розв'язання. Розглянемо спочатку рівновагу частини OD складеної балки. Звільняємо частину OD балки від в'язей (рис. 8.65 та 8.66). На частину OD діють

активна сила \vec{P}_1 , розподілені сили інтенсивністю \bar{q} та реакції \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Y}_B , \vec{X}_D , \vec{Y}_D (рис. 8.66). Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A (рис. 8.65) та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на балку:

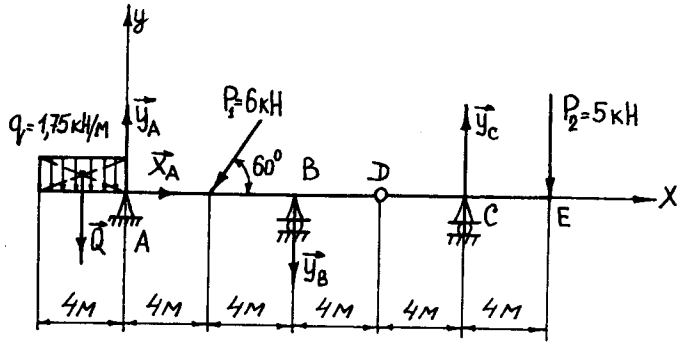


Рис. 8.65

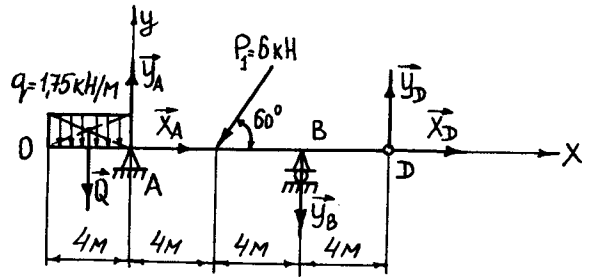


Рис. 8.66

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A + X_D - P_1 \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; -Q + Y_A - P_1 \sin 60^\circ - Y_B + Y_D = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; Q \cdot 2 - P_1 \sin 60^\circ \cdot 4 - Y_B \cdot 8 + Y_D \cdot 12 = 0, \quad (3)$$

де $Q = q \cdot 4 = 1,75 \cdot 4 = 7$ (кН).

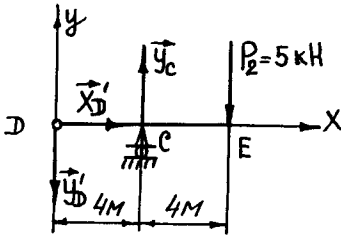


Рис. 8.67

Тепер аналогічним чином розглянемо рівновагу частини DE складеної балки (рис. 8.67). На частину DE балки діють активна сила \bar{P}_2 та реакції \bar{Y}_C , \bar{X}'_D , \bar{Y}'_D . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці D та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на частину DE :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X'_D = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_C - P_2 - Y'_D = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) = 0; \quad Y_C \cdot 4 - P_2 \cdot 8 = 0. \quad (6)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1)—(6) з урахуванням, що $X_D = X'_D$, $Y_D = Y'_D$, здобудемо:

$$X_D = X'_D = 0;$$

$$Y_C = \frac{P_2 \cdot 8}{4} = 2P_2 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (кН)};$$

$$Y_D = Y'_D = Y_C - P_2 = 10 - 5 = 5 \text{ (кН)};$$

$$X_A = P_1 \cos 60^\circ = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ (кН)};$$

$$Y_B = \frac{Q \cdot 2 - P_1 \sin 60^\circ \cdot 4 + Y_D \cdot 12}{8} = \frac{7 \cdot 2 - 6 \cdot 0,866 \cdot 4 + 5 \cdot 12}{8} = 6,65 \text{ (кН)};$$

$$Y_A = Q + P_1 \sin 60^\circ + Y_B - Y_D = 7 + 6 \cdot 0,866 + 6,65 - 5 = 13,85 \text{ (кН)}.$$

Сили \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Y}_B , \bar{Y}_D та \bar{Y}_C напрямлені так, як це зображено на рис. 8.66 та рис. 8.67.

Перевірка визначення реакцій балки. Розглянемо рівновагу балки в цілому (див. рис. 8.65). На балку діють активні сили \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , розподілені сили інтенсивністю \bar{q} та реакції опор \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Y}_B , \bar{Y}_C . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на балку:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - P_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$3 - 6 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q - P_1 \sin 60^\circ - Y_B + Y_C - P_2 = 0;$$

$$13,85 - 7 - 6 \cdot 0,866 - 6,65 + 10 - 5 = 0;$$

$$23,85 - 23,85 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot 2 + Y_C \cdot 16 - P_1 \sin 60^\circ \cdot 4 - Y_B \cdot 8 - P_2 \cdot 20 = 0;$$

$$7 \cdot 2 + 10 \cdot 16 - 6 \cdot 0,866 \cdot 4 - 6,68 \cdot 8 - 5 \cdot 20 = 0;$$

$$174 - 174,22 \approx 0, (0,13 \%).$$

Задача 8.46. Міст складається з двох однакових частин M та N , які з'єднані між собою та з нерухомими опорами за допомогою шести стрижнів (рис. 8.68). У точці K на міст діє сила \vec{P} . Визначити зусилля в стрижнях.

Розв'язання. Розглянемо спочатку рівновагу частини M моста. Звільняємо частину M від в'язей (уявно перерізаємо стрижні). На частину M діють активна сила \vec{P} та зусилля в стрижнях $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_E, \vec{S}_F$ (рис. 8.69). Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O та складемо рівняння рівноваги сил $\vec{P}, \vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_E, \vec{S}_F$:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad S_E + S_A - P \cos 45^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad S_F + S_B - P \sin 45^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \cdot 2 + S_B h = 0, \quad (3)$$

де $h = 4,24$ м.

Тепер аналогічним чином розглянемо рівновагу частини N моста (рис. 8.70). На частину N діють зусилля в стрижнях $\vec{S}'_A, \vec{S}'_B, \vec{S}'_D$ та \vec{S}'_C . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O_1 та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на частину N :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S_C - S'_A = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -S'_B + S'_D = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{O_1}(\vec{F}_k) = 0; \quad S'_B h = 0, \quad (6)$$

де $h = 4,24$ м.

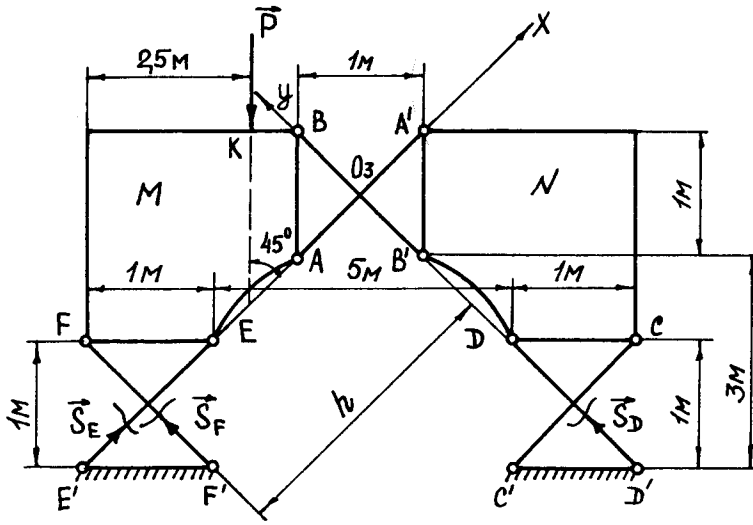


Рис. 8.68

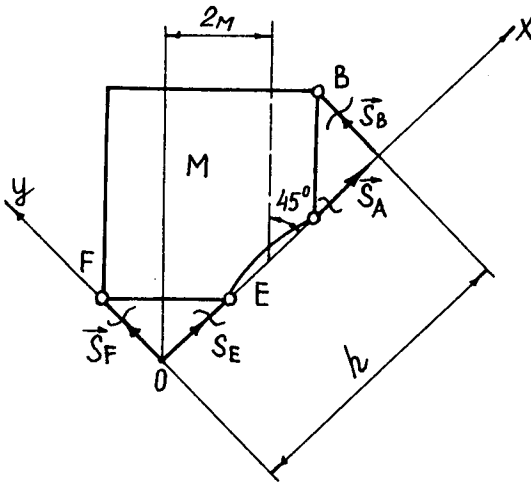


Рис. 8.69

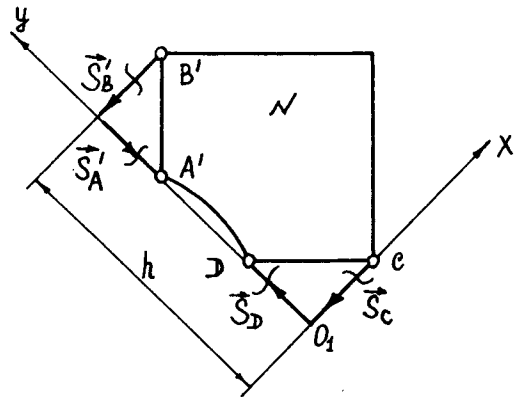


Рис. 8.70

Враховуючи, що $S_A = S'_A$, $S_B = S'_B$, з рівнянь (1)–(6) знаходимо:

$$S_A = S'_A = S_C = 0;$$

$$S_B = S'_B = S_D = \frac{P \cdot 2}{h} = \frac{2P}{4,24} = 0,47P;$$

$$S_E = P \cos 45^\circ = 0,707P;$$

$$S_F = -S_B + P \sin 45^\circ = -0,47P + 0,707P = 0,237P.$$

Стрижні BB' , EE' , FF' та DD' працюють на стиск. Зусилля в стрижнях AA' та CC' дорівнюють нулю.

Перевірка. Складемо рівняння рівноваги моста в цілому (див. рис. 8.68):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; S_E - P \cos 45^\circ = 0;$$

$$0,707P - 0,707P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; S_D + S_F - P \sin 45^\circ = 0;$$

$$0,47P + 0,23P - 0,707P = 0;$$

$$0,707P - 0,707P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_K(\vec{F}_k) = 0; P \cdot 1 - S_F h = 0;$$

$$P - 0,237 \cdot 4,24P = 0;$$

$$P - P = 0.$$

Задача 8.47. Однорідний брусок AB , який може обертатися навколо горизонтальної осі A , спирається на поверхню гладенького циліндра, що розміщений на гладенькій горизонтальній площині та утримується ниткою AC . Радіус циліндра r ; вага циліндра $P = 16$ Н; довжина $AB = 3r$, $AC = 2r$ (рис. 8.71). Визначити силу натягу нитки та сили тиску бруска на шарнір A .

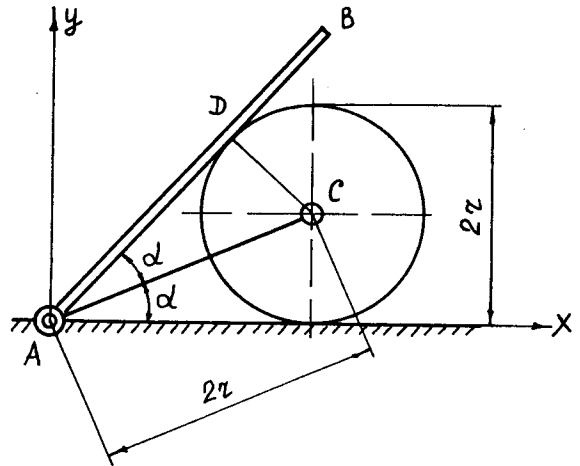


Рис. 8.71

Розв'язання. Розглянемо спочатку рівновагу бруска AB . Звільняємо брусок від в'язей (рис. 8.72). На брусок діють активна сила \vec{G} та реакції \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{N} . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги сил \vec{G} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{N} :

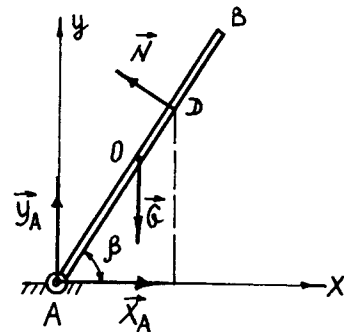


Рис. 8.72

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A - N \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - G + N \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; N \cdot AD - G \cdot AO \cos \beta = 0,$$

де $\beta = 2\alpha = 60^\circ$; $AD = 2r \cos 30^\circ = 2r \cdot 0,866 = 1,732r$; $AO = 1,5r$.

З рівнянь знаходимо:

$$N = \frac{G \cdot AO \cos \beta}{AD} = \frac{16 \cdot 1,5r \cdot \cos 60^\circ}{1,732r} = 6,93 \text{ (Н)};$$

$$X_A = N \sin \beta = 6,93 \cdot 0,866 = 6 \text{ (Н)};$$

$$Y_A = G - N \cos \beta = 16 - 6,93 \cdot 0,5 = 12,53 \text{ (Н)}.$$

Сили тиску на шарнір A за модулем дорівнюють реакціям \vec{X}_A та \vec{Y}_A , але мають протилежний до них напрям.

Тепер розглянемо рівновагу циліндра. Звільняємо циліндр від в'язей (рис. 8.73). На циліндр діють активна сила \vec{P} , реакції \vec{N}' , \vec{N}_1 , \vec{T} . Сили утворюють плоску збіжну зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці C та складемо рівняння рівноваги сил \vec{P} , \vec{N}' , \vec{N}_1 та \vec{T} :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad N' \sin 60^\circ - T \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_1 - T \cos 60^\circ - N' \cos 60^\circ = 0.$$

З рівнянь знаходимо:

$$T = N' = N = 6,93 \text{ (Н)};$$

$$N_1 = (T + N') \cos 60^\circ = 2 \cdot 6,93 \cdot 0,5 = 6,93 \text{ (Н)}.$$

Задача 8.48. До вала прикладена пара сил з моментом $M = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$. На вал насаджене гальмівне колесо, радіус якого $r = 25 \text{ см}$ (рис. 8.74). Визначити, з якою силою \vec{Q} необхідно притискувати до колеса гальмівні колодки, щоб колесо залишалося у спокої, якщо коефіцієнт тертя спокою f між колесом та колодками дорівнює $0,25$.

Розв'язання. Умова рівноваги колеса з валом має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0; \quad F^T \cdot 2r - M = 0,$$

де $F^T = Qf$ (за визначенням).

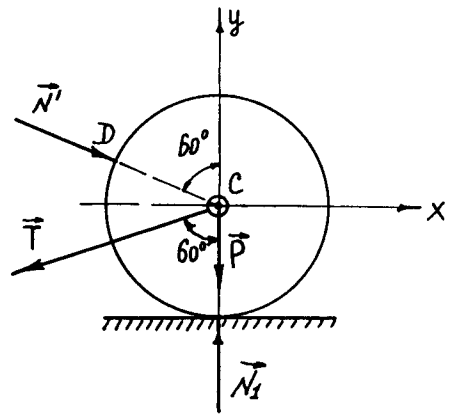


Рис. 8.73

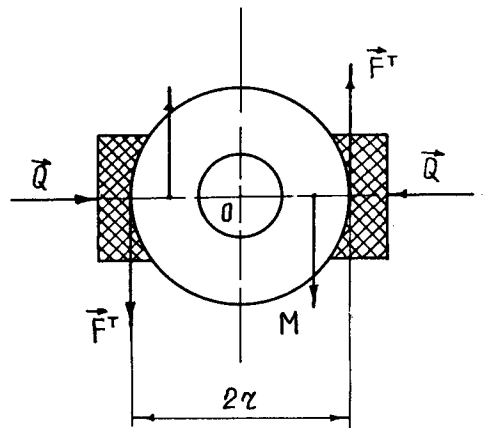


Рис. 8.74

З рівняння знаходимо

$$Q = \frac{M}{2rf} = \frac{100}{2 \cdot 0,25 \cdot 0,25} = 800 \text{ (Н)}.$$

Задача 8.49. Горизонтальний стрижень AB має на кінці A отвір, яким він надівається на вертикальний круглий стояк CD ; довжина втулки $b = 2$ см; у точці B на відстані a від осі стояка до стрижня підвішений вантаж P (рис. 8.75). Визначити, нехтуючи вагою стрижня AB , відстань a так, щоб під дією вантажу P стрижень залишався б у рівновазі, якщо коефіцієнт тертя між стрижнем та стояком $f = 0,1$.

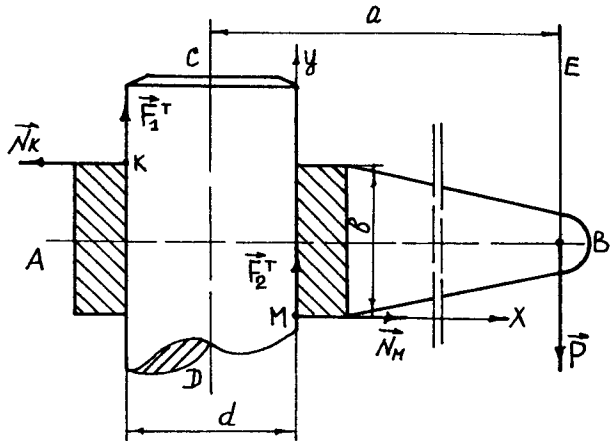


Рис. 8.75

Розв'язання. Розглянемо рівновагу стрижня AB . Звільняємо стрижень AB від в'язей. На стрижень діють активна сила \vec{P} , реакції \vec{N}_M , \vec{N}_K та сили тертя \vec{F}_1^T , \vec{F}_2^T . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці M та складемо рівняння рівноваги сил \vec{P} , \vec{N}_M , \vec{N}_K , \vec{F}_1^T та \vec{F}_2^T :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad N_M - N_K = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad F_1^T + F_2^T - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_M(\vec{F}_k) = 0; \quad N_K b - F_1^T d - P \left(a - \frac{d}{2} \right) = 0,$$

де $F_1^T = N_K f$; $F_2^T = N_M f$ (за визначенням).

З рівнянь знайдемо

$$a = \frac{N_K b}{P} - \frac{F_1^T d}{P} + \frac{d}{2} = \frac{Pb}{2fP} - \frac{Pfd}{2fP} + \frac{d}{2} = \frac{b}{2f} = \frac{2}{2 \cdot 0,1} = 10 \text{ (см)}.$$

Задача 8.50. До вертикальної стіни приставлена драбина AB , яка спирається своїм нижнім кінцем на горизонтальну підлогу. Коефіцієнт тертя між драбиною та стіною f_1 , а між драбиною та підлогою — f_2 . Вага драбини разом з людиною, що стоїть на ній, дорівнює P . Сила \vec{P} прикладена в точці C

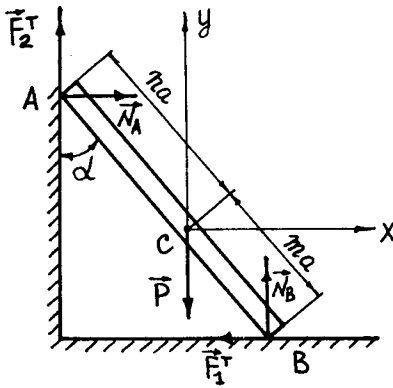


Рис. 8.76

драбини (рис. 8.76). Визначити найбільше значення кута α , що утворює драбина зі стіною у положенні рівноваги, а також нормальні реакції стіни та підлоги для цього значення кута α .

Розв'язання. Розглянемо рівновагу драбини AB . Звільняємо драбину AB від в'язей. На драбину діють активна сила \vec{P} , нормальні реакції \vec{N}_A , \vec{N}_B та сили тертя \vec{F}_1^T , \vec{F}_2^T . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці C та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на драбину:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -F_1^T + N_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_B - P + F_2^T = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -Pna \sin \alpha - F_1^T (na + ma) \cos \alpha + N_B (na + ma) \sin \alpha = 0,$$

де $F_1^T = N_B f$; $F_2^T = N_A f$ (за визначенням).

З рівнянь знаходимо:

$$N_A = \frac{Pf_2}{1 + f_1 f_2}; \quad N_B = \frac{P}{1 + f_1 f_2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f_2 (n + m)}{m - n f_1 f_2}.$$

Реакції \vec{N}_A та \vec{N}_B напрямлені так, як це зображено на рис. 8.76.

Задача 8.51. Драбина AB спирається на шорстку стіну та шорстку підлогу й у стані рівноваги утворює з підлогою кут, що дорівнює 60° (рис. 8.77). На драбину діє сила \vec{P} . Нехтуючи вагою драбини, визначити графічно відстань BC , за якої драбина залишається у стані спокою. Кут тертя для стіни та підлоги дорівнює 15° .

Розв'язання. З рис. 8.77 випливає: $BC = \frac{1}{2} AB$.

Задача 8.52. Однорідний брусок спирається у точці A на шорстку горизонтальну підлогу та утримується в точці B ниткою (рис. 8.78). Коефіцієнт тертя між бруском та підлогою f . Кут α , що утворюється бруском і підлогою, дорівнює 45° . За якого

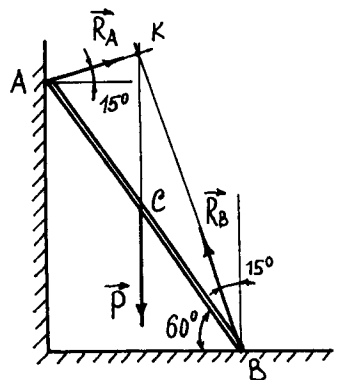


Рис. 8.77

значення кута φ нитки до горизонту брус почне ковзання по підлозі?

Розв'язання. Розглянемо рівновагу бруска AB . Звільняємо брусок від в'язей. На брусок діють активна сила \vec{P} , реакції \vec{N} , \vec{T} та сила тертя \vec{F}^T . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на брусок:

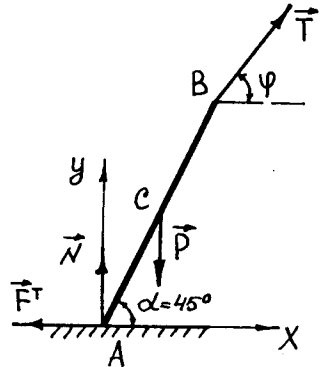


Рис. 8.78

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -F^T + T \cos \varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N - P + T \sin \varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \frac{AB}{2} \cos 45^\circ - T \cos \varphi \cdot AB \sin 45^\circ + T \sin \varphi \cdot AB \cos 45^\circ = 0,$$

де $F^T = Nf$ (за визначенням).

З рівнянь знаходимо:

$$T = \frac{Pf}{f \sin \varphi + \cos \varphi}; \quad -\frac{P}{2} - T \cos \varphi + T \sin \varphi = 0;$$

$$-\frac{P}{2} - \frac{Pf \cos \varphi}{f \sin \varphi + \cos \varphi} + \frac{Pf \sin \varphi}{f \sin \varphi + \cos \varphi} = 0; \quad \frac{f(\sin \varphi - \cos \varphi)}{f \sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{f(\operatorname{tg} \varphi - 1)}{f \operatorname{tg} \varphi + 1} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = 1 + \frac{1}{f}.$$

Задача 8.53. Циліндричний коток здійснює рівномірне кочення вздовж горизонтальної поверхні (рис. 8.79). Діаметр котка дорівнює 60 см, вага катка — 300 Н. Коефіцієнт тертя кочення дорівнює 0,5 см. Визначити силу \vec{P} , яку необхідно прикласти до котка під кутом 30° до горизонту, як це зображено на рис. 8.79, щоб коток здійснював означений рух.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу котка. Звільняємо коток від в'язей. На коток діють сила \vec{P} , сила ваги \vec{G} , реакція поверхні \vec{N} та сила тертя \vec{F}^T . Сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Побудуємо декарто-

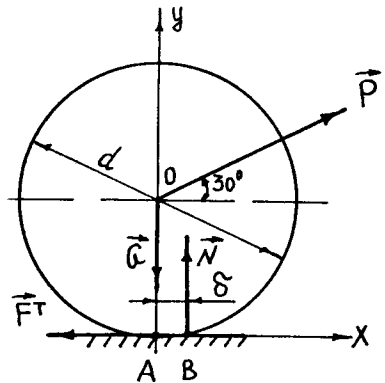


Рис. 8.79

ву систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги сил \vec{P} , \vec{G} , \vec{N} та \vec{F}^T :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -F^T + P \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -G + N = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad N\delta - P \cos 30^\circ \cdot \frac{d}{2} = 0.$$

З рівнянь знаходимо:

$$P = \frac{2G\delta}{\cos 30^\circ \cdot d} = \frac{2 \cdot 300 \cdot 0,5}{0,866 \cdot 60} = 5,77 \text{ (Н)};$$

$$F^T = P \cos 30^\circ = 5,77 \cdot 0,866 = 5 \text{ (Н)}.$$

Глава 9

ОСНОВИ СТАТИКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

9.1. Суцільне середовище. Об'ємні та поверхневі сили. Напруження

Для розв'язання задач практики та опису механічного руху і взаємодії матеріальних об'єктів їх абстракція (модель) у вигляді абсолютно твердого тіла не завжди є достатньою. Тому при вивченні руху і, зокрема, рівноваги твердих тіл, що деформуються, рідини, газів, газорідинних та газоповітряних середовищ у механіці застосовується інша модель — суцільне середовище.

Суцільне середовище — це змінна система матеріальних точок, що неперервно заповнюють частину простору, кожна з яких можна уявити як деякий об'єм. Таке уявлення про тверде тіло, що деформується, рідину, газ або інше середовище цілком можливе, якщо розглядати цю систему як єдину і цілу з неперервним розподілом речовини та фізичних властивостей і як таку, що перебуває у стані спокою або здійснює той чи інший рух під дією прикладених до неї сил.

Ідеалізоване уявлення про матеріальні об'єкти як суцільне середовище дає можливість при вивченні їх механічного руху і рівноваги застосовувати математичний апарат функціонального аналізу, диференціального та інтегрального обчислення.

У параграфі 1.8 розглянуто аксіому затвердіння (принцип затвердіння), в якій встановлено необхідні умови рівноваги деформованих середовищ, що зводяться до рівнянь рівноваги системи сил, які діють на відповідні виділені у цьому середовищі недеформовані об'єми. При цьому до таких об'ємів висувається певна вимога: лінійні розміри об'ємів мають бути достатньо малі, щоб можна було (з потрібною точністю) вважати сили, які діють у межах даного об'єму, сталими.

Однак зменшенню розмірів виділеного об'єму ставить межу дискретна структура середовища. У першому наближенні можна вважати, що атоми в кристалічній ґратці твердого тіла, молекули в рідині або газі рухаються незалежно. Якщо взяти об'єм середовища таким малим, що в ньому виявиться 3—4 атоми або молекули, то, здійснюючи тепловий рух, ці атоми чи молекули зближаються або віддаляються один від одного у самих різних напрямках. Відповідно до цього даний об'єм або збільшується, або зменшується незалежно від того, діють на нього зовнішні сили чи ні. До такого об'єму, що містить малу кількість атомів або молекул, закони рівноваги абсолютно твердого тіла непридатні. Очевидно, що об'єм має бути таким, щоб він містив достатню кількість атомів або молекул, щоб можна було знехтувати їхніми індивідуальними властивостями і скористатися для всього об'єму середніми фізичними характеристиками, прийнятими для усіх атомів та молекул даного середовища. Так, якщо виокремити у суцільному середовищі елементарний паралелепіпед, в якому молекул буде порядку $2,7 \cdot 10^{10}$, можна вважати, що за відсутності зовнішніх сил у напрямі будь-якої грані цього паралелепіпеда і від неї рухається одна й та сама кількість молекул. При цьому середня кількість руху молекул у бік кожної із граней однакова, отже, елемент середовища перебуває у стані відносного спокою. Якщо він рухається як ціле тіло, то можна вважати, що кількість руху здобута ним тільки під дією імпульсу зовнішніх сил.

Отже, до виділеного у суцільному середовищі об'єму висуваються такі вимоги:

- 1) об'єм має бути достатньо малим, щоб зовнішні сили, які діють в його межах, можна було вважати сталими;
- 2) об'єм має бути достатньо великим, щоб кількість атомів або молекул, що містяться в ньому, давала можливість усереднювати величини, які характеризують фізичний стан даного середовища.

Покажемо, що дві такі суперечні вимоги може бути виконано. Для цього наведемо такі дані. Найбільш розряджене суцільне середовище — газ. У повітрі за нормального тиску в одному кубічному сантиметрі міститься $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. Якщо б усі ці молекули були розміщені в об'ємі 1 см^3 рівномірно, то на кожну з них припадав би кубик з ребром трохи більшим ніж $3 \cdot 10^{-7} \text{ см}$. У кубіку, ребро якого дорівнює $0,01 \text{ мм}$, розміщено $2,7 \cdot 10^{10}$ молекул.

Для опису руху і, зокрема, рівноваги суцільного середовища доводиться переходити від зосереджених в окремих точках середовища значень фізичних величин до їх неперервних розподілень у середовищі і кількісно характеризувати ці розподілення щільністю розподілення фізичної величини у суцільному середовищі.

Кількість речовини, що її містить даний об'єм Δv суцільного середовища, характеризується масою Δm . *Маса, яку містить одиниця об'єму середовища, називається середньою густиною середовища:*

$$\rho_{\text{сер}} = \frac{\Delta m}{\Delta v}.$$

Зменшуючи об'єм (стягуючи його у точку), дістанемо в границі, до якої прямує відношення $\frac{\Delta m}{\Delta v}$, величину, що називається *густиною середовища у даній точці*:

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}. \quad (9.1)$$

Зауважимо, що тут зменшення Δv може продовжуватися лише до величини, що задовольняє наведені вище вимоги, які висуваються до елемента об'єму суцільного середовища.

З рівності (9.1) випливає вираз елементарної маси через густину середовища ρ та її елементарний об'єм dv :

$$dm = \rho dv. \quad (9.2)$$

Питома вага середовища у даній точці визначається за формулою

$$\gamma = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta v} = \frac{d(mg)}{dv} = \rho g, \quad (9.3)$$

де ΔG — вага одиниці об'єму середовища; g — прискорення вільного падіння.

Розмірністю густини ρ та питомої ваги γ в системі СІ відповідно є

$$\left[\text{кг} / \text{м}^3 \right], \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2} \right].$$

Величини ρ та γ характеризують щільність розподілу маси та ваги у даній точці суцільного середовища.

Розглянемо щільність розподілу сил у суцільному середовищі та їх кількісну оцінку.

Сили, що діють в суцільному середовищі, можна розділити на два класи:

1) *об'ємні (масові) сили*; 2) *поверхневі сили*.

Середню щільність розподілу об'ємних (масових) сил визначають як відношення головного вектора сил $\Delta \bar{R}_{об}$, прикладених до точок об'єму середовища Δv , до маси об'єму $\Delta m = \rho_{сер} \Delta v$:

$$\bar{F}_{сер} = \frac{\Delta \bar{R}_{об}}{\rho_{сер} \Delta v}.$$

Щільність розподілу об'ємних сил у даній точці суцільного середовища визначається за формулою

$$\bar{F} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}_{об}}{\rho_{сер} \Delta v} = \frac{d\bar{R}_{об}}{\rho dv}. \quad (9.4)$$

Щільність розподілу об'ємних сил \vec{F} у системі СІ має розмірність $\left[\frac{\text{Н}}{\text{кг}} \right]$,
або $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right]$.

З рівності (9.4) випливає вираз головного вектора об'ємних сил у даній точці суцільного середовища:

$$d\vec{R}_{об} = \rho \vec{F} dV. \quad (9.5)$$

Головний вектор об'ємних сил, прикладених до кінцевих об'ємів V , визначається як геометрична сума елементарних об'ємних сил, що діють у точках цього об'єму:

$$\vec{R}_{об} = \int_{(V)} \rho \vec{F} dV. \quad (9.6)$$

Складові сили головного вектора $\vec{R}_{об}$ за напрямом осей декартової системи координат визначаються за формулами:

$$\vec{R}_{(об)_x} = \int_{(V)} \rho \vec{F}_x dV; \quad \vec{R}_{(об)_y} = \int_{(V)} \rho \vec{F}_y dV; \quad \vec{R}_{(об)_z} = \int_{(V)} \rho \vec{F}_z dV. \quad (9.7)$$

Прикладами об'ємних (масових) сил є сили тяжіння, сили інерції та сили електромагнітного походження.

Поверхневі сили виникають під час тертя між шарами середовища або тиску в області контакту між двома середовищами. Ці сили визначаються щільністю розподілу по геометричній поверхні, що розмежовує області взаємодії середовищ.

Середню щільність розподілу поверхневих сил визначають як відношення головного вектора сил $\Delta \vec{R}_{пов}$ до площі ΔS поверхні, на яку ці сили діють:

$$\vec{q}_{сер} = \frac{\Delta \vec{R}_{пов}}{\Delta S}.$$

Щільність розподілу поверхневих сил у даній точці суцільного середовища визначається за формулою

$$\vec{q} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}_{пов}}{\Delta S} = \frac{d\vec{R}_{пов}}{dS}. \quad (9.8)$$

Щільність розподілу поверхневих сил у системі СІ має розмірність $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$.

З рівності (9.8) випливає вираз головного вектора поверхневих сил у даній точці суцільного середовища:

$$d\vec{R}_{\text{пов}} = \vec{q}dS. \tag{9.9}$$

Головний вектор поверхневих сил, прикладених до кінцевих площин S , визначається як геометрична сума елементарних поверхневих сил, що діють у точках цієї поверхні:

$$\vec{R}_{\text{пов}} = \int_{(S)} \vec{q}dS. \tag{9.10}$$

Якщо на елемент поверхні виділеного в суцільному середовищі елементарного об'єму Δv діє зовнішня сила, щільність розподілу якої

$$\vec{q} = \frac{d\vec{R}_{\text{пов}}}{dS},$$

то елемент буде перебувати у стані рівноваги тоді, коли міжатомні або міжмолекулярні сили утворюють таку саму за значенням, але протилежну за напрямом щільність розподілу внутрішніх для даного елементарного об'єму Δv поверхневих сил.

Щільність розподілу поверхневих сил, що діють в точках, які розміщені всередині суцільного середовища, називається **напруженням** \vec{q} .

У загальному випадку вектор напруження \vec{q} залежить від орієнтації поверхні, до якої він прикладений. Складова вектора \vec{q} за напрямом нормалі \vec{n} до поверхні ΔS називається *вектором нормального напруження* $\vec{\sigma}$ (рис. 9.1). Складова вектора \vec{q} за напрямом дотичної до поверхні ΔS називається *вектором дотичного напруження* $\vec{\tau}$ (рис. 9.1).

Для рідини вектор нормального напруження, напрямлений за напрямом внутрішньої нормалі до поверхні ΔS , називається *гідростатичним тиском* \vec{p} (рис. 9.2).

Визначення нормальних та дотичних напружень у різних точках суцільного середовища здійснюється за допомогою розглянутого в параграфі 1.9 метода перерізів.

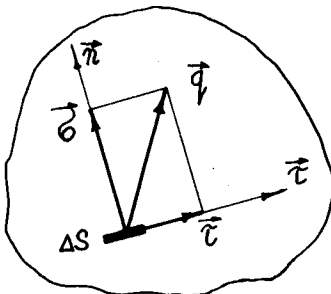


Рис. 9.1

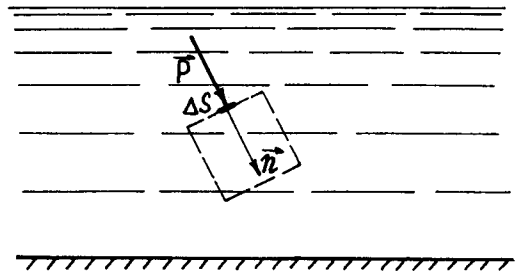


Рис. 9.2

Отже, уявлення про ньютонівську силу як кількісну міру взаємодії матерії при ідеалізації матеріальних об'єктів за допомогою моделі “абсолютно тверде тіло” виявляється недостатнім для опису взаємодії матерії при застосуванні моделі “суцільне середовище”. Тому при вивченні руху і рівноваги або при визначенні внутрішніх сил у твердих тілах, що деформуються, рідині, газах та газорідних середовищах застосовується інша кількісна міра механічної взаємодії — *напруження у даній точці середовища*.

9.2. Загальні диференціальні рівняння рівноваги суцільного середовища. Закон парності дотичних напружень. Компоненти напруженого стану в точці

Розглянемо суцільне середовище довільної геометричної форми. Нехай сили, що діють на середовище в цілому (об'ємні та поверхневі), утворюють зрівноважену систему сил. Визначимо внутрішні сили, що діють в околі довільної точки M середовища.

Застосуємо метод перерізів (див. параграф 1.9), тобто в околі точки M проводимо шість перерізів, паралельних площинам декартової системи координат $Oxyz$, виділяючи із середовища елементарний паралелепіпед, що має ребра dx , dy та dz (рис. 9.3). Якщо розміри паралелепіпеда зменшити, він буде стягуватися в точку M . У границі усі грані паралелепіпеда проходять через точку M .

Уявно відкидаючи середовище, яке оточує виділений елементарний паралелепіпед, необхідно врахувати його дію на грані паралелепіпеда внутрішніми поверхневими силами.

Як було зазначено в параграфі 9.1, щільність розподілу поверхневих сил характеризується напруженням. Напруження поділяються на *нормальні* σ_i та *дотичні* τ_i .

У загальному випадку напруження σ_i та τ_i у різних точках середовища різні, тобто $\sigma_i = f(x, y, z)$, $\tau_i = f_1(x, y, z)$. Звідси випливає, що на паралельних гранях паралелепіпеда вони мають різні значення. Нехай на лівій грані $ADCM$ паралелепіпеда (рис. 9.4) діє нормальне напруження σ_y . При переході до правої грані $NEKB$ координата y одержує приріст dy , тобто маємо: $\sigma'_y = f(x, y + dy, z)$. Застосуємо для цього виразу формулу Тейлора¹:

$$f(x, y + dy, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{2! \partial y^2} dy^2 + \dots$$

¹ Брук Тейлор (1685—1731) — англійський математик і філософ, член Лондонського королівського товариства.

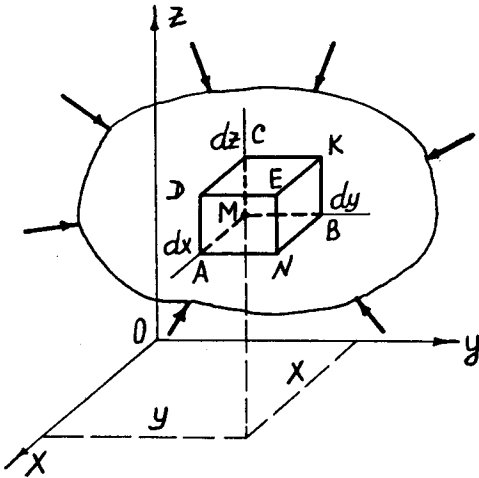


Рис. 9.3

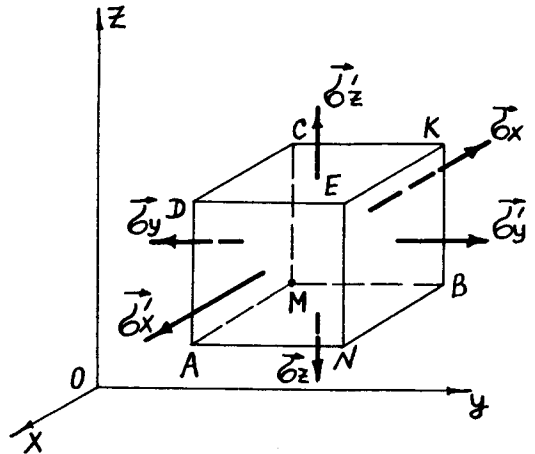


Рис. 9.4

Залишаючи в цій формулі члени не вище першого порядку малості, знайдемо напруження на правій грані $NEKB$ паралелепіпеда:

$$\sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy. \tag{9.11}$$

Аналогічно визначаються напруження σ'_x та σ'_z (рис. 9.4):

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx; \tag{9.12}$$

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz. \tag{9.13}$$

Оскільки система сил, що діє на суцільне середовище, є зрівноваженою, то вектори $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$ та $\bar{\sigma}'_x$, $\bar{\sigma}'_y$, $\bar{\sigma}'_z$ напрямлені у протилежні сторони (рис. 9.4).

Зауважимо, що якщо вектор нормального напруження $\bar{\sigma}_i$ має напрям, який збігається з напрямом зовнішньої нормалі до грані елемента середовища, то такому напруженню надають знак "+". *Додатнє напруження* ($+\sigma_i$) називається **розтяжним напруженням**. Якщо напрям вектора нормального напруження $\bar{\sigma}_i$ збігається з напрямом внутрішньої нормалі до грані елемента, виділеного в середовищі, то такому напруженню надається знак "-". *Від'ємне напруження* ($-\bar{\sigma}_i$) називається **стискальним напруженням**. *Від'ємне напруження на гранях елемента рідини називається гідростатичним тиском* і, як було зазначено в параграфі 9.1, позначається вектором \bar{p} . На рис. 9.4 зображено розтяжні напруження $\bar{\sigma}_i$.

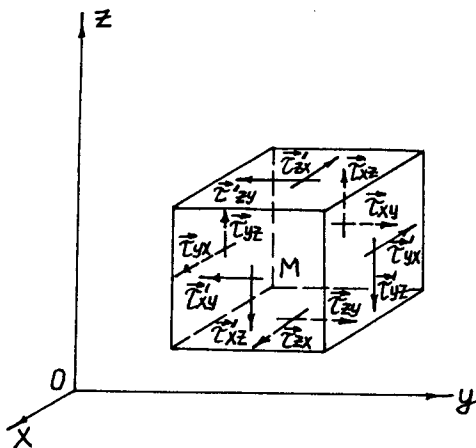


Рис. 9.5

На гранях паралелепіпеда крім нормальних напружень діють ще **дотичні напруження** $\bar{\tau}$. Розкладаючи вектор $\bar{\tau}$, що діє на гранях паралелепіпеда, за напрямом осей координат, матимемо дві складові цього вектора. Позначають ці складові $\bar{\tau}_{ij}$, де i — індекс осі координат, яка є перпендикулярною до грані, де розміщений вектор $\bar{\tau}$; j — індекс осі координат, якій складова вектора $\bar{\tau}_i$ паралельна (рис. 9.5).

На рис. 9.5 зображено дотичні напруження, що діють на гранях паралелепіпеда. Зауважимо, що на паралельних гранях напрями векторів $\bar{\tau}_{ij}$, які мають однакові індекси, протилежні один до одного, що випливає з умови зрівноваженості сил, що діють на суцільне середовище.

Для складових дотичних напружень, що діють на паралельних гранях паралелепіпеда, справедлива така сама залежність, як і для нормальних напружень на цих гранях:

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx; \quad (9.14)$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx; \quad (9.15)$$

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy; \quad (9.16)$$

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy; \quad (9.17)$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz; \quad (9.18)$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz. \quad (9.19)$$

Залежно від напрямку векторів $\bar{\tau}_{ij}$ дотичним напруженням надають знак “+” або “-”. На рис. 9.6 наведено проєкції трьох граней паралелепіпеда, що зображений на рис. 9.5 на площині декартової системи координат $Oxyz$, і проєкції векторів $\bar{\tau}_{ij}$, що діють на перпендикулярних до них гранях. Якщо вектор $\bar{\tau}_{ij}$ намагається обернути відповідну проєкцію грані паралелепіпеда відносно точки, що розташована всередині цієї проєкції (точки A, B, C на рис. 9.6) за напрямом

ходу стрілки годинника (цей напрям позначений стрілками), то дотичному напруженню надається знак "+". У протилежному разі — знак "-". Так, на рис. 9.6 τ'_{zx} — додатне, а τ'_{zy} — від'ємне напруження.

Добутки елементарної площі граней паралелепіпеда на відповідні нормальні \vec{b}_i , та дотичні $\vec{\tau}_{ij}$ напруження визначають елементарні внутрішні поверхневі сили, що діють на кожну із граней виділеного в суцільному середовищі паралелепіпеда (рис. 9.7).

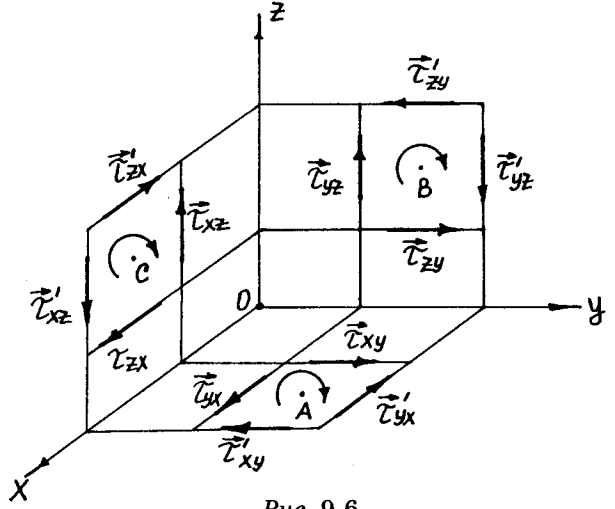


Рис. 9.6

На даний паралелепіпед поряд із внутрішніми поверхневими силами діють ще об'ємні сили. Щільність розподілу об'ємних сил у суцільному середовищі визначається вектором \vec{F} . Позначимо щільність розподілу об'ємних сил на одиницю маси паралелепіпеда за напрямом координатних осей $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$.

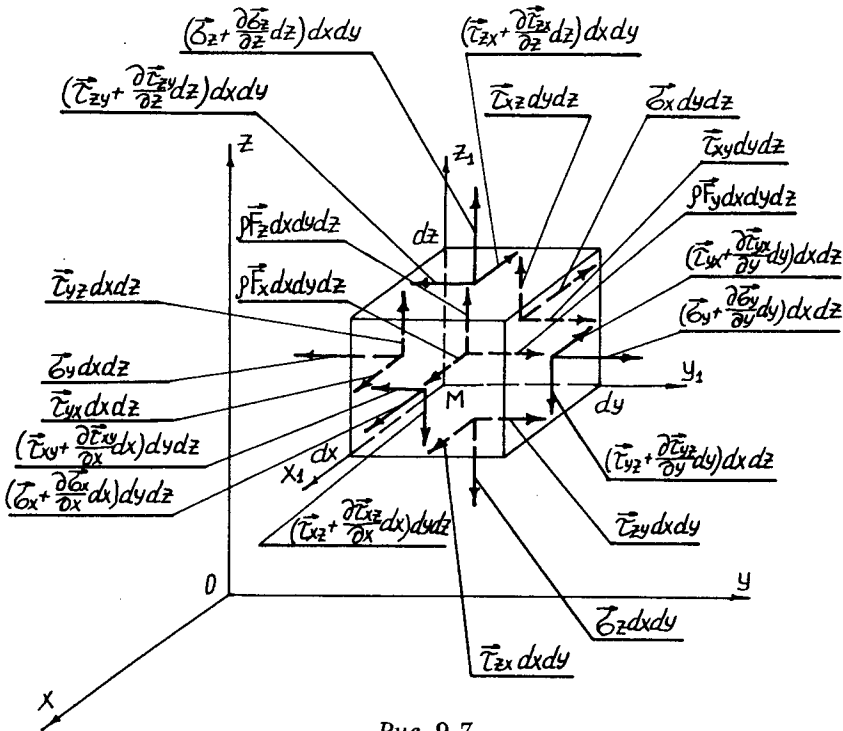


Рис. 9.7

Тоді на всю масу паралелепіпеда діятимуть об'ємні сили, що дорівнюють добутку відповідних векторів \vec{F}_i на масу паралелепіпеда, тобто $\rho\vec{F}_x dx dy dz$, $\rho\vec{F}_y dx dy dz$, $\rho\vec{F}_z dx dy dz$.

Застосовуючи до цього елемента суцільного середовища аксіому затвердіння та на підставі того, що сили, які діють на середовище, утворюють зрівноважену систему сил, можна стверджувати, що даний елемент середовища перебуває у стані рівноваги і діюча на нього довільна просторова система сил задовольняє умови рівноваги сил, що діють на абсолютно тверде тіло:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{kx_1} &= 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{x_1}(\vec{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky_1} &= 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{y_1}(\vec{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz_1} &= 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{z_1}(\vec{F}_k) = 0.\end{aligned}$$

Осі декартової системи координат $Mx_1y_1z_1$ наведено на рис. 9.7.

Складемо перші три рівняння рівноваги системи сил, що діють на даний елемент. Для цього необхідно розглянути усі сили, що є паралельними осям координат x_1y_1 та z_1 . На рис. 9.8 зображено сили, паралельні осі x_1 .

Складемо рівняння $\sum_{k=1}^n F_{kx_1} = 0$:

$$\begin{aligned}\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz + \rho F_x dx dy dz + \tau_{zx} dx dz + \tau_{yx} dy dz - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) dx dy - \\ - \sigma_x dx dy dz - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz = 0.\end{aligned}$$

Звідси маємо перше рівняння рівноваги сил:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \rho F_x = 0.$$

Аналогічно знайдемо два інших рівняння. Об'єднуючи рівняння рівноваги, остаточно маємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \rho F_x &= 0. \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + \rho F_y &= 0. \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \rho F_z &= 0.\end{aligned}\tag{9.20}$$

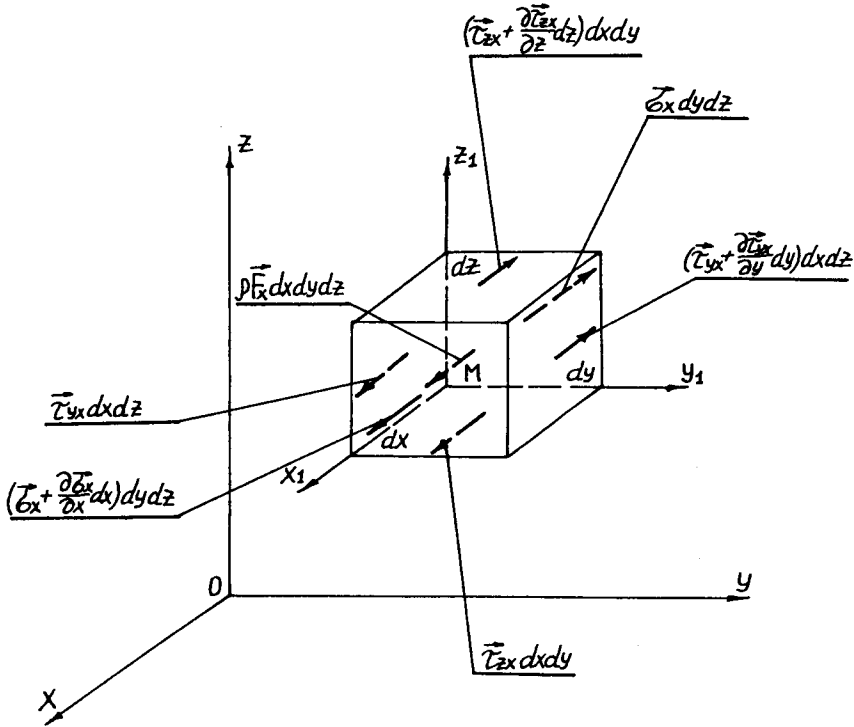


Рис. 9.8

Рівняння (9.20) називаються диференціальними рівняннями рівноваги суцільного середовища (рівняння Нав'є)¹.

Складемо тепер три інші рівняння рівноваги. Для цього розглянемо сили, які намагаються обертати паралелепіпед відносно осей x_1 , y_1 та z_1 . На рис. 9.9 наведено сили, що намагаються обертати паралелепіпед відносно осі x_1 (сили, паралельні осі x_1 , та сили, що перетинають цю вісь, на рис. 9.9 не зображено).

Складемо рівняння рівноваги $\sum_{k=1}^n M_{x_1}(\vec{F}_k) = 0$:

$$\begin{aligned} & \sigma_y dx dz \frac{dz}{2} + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dz}{2} - \sigma_z dx dy \frac{dy}{2} + \tau_{xy} \times \\ & \times dy dz \frac{dz}{2} - \tau_{xz} dy dz \frac{dz}{2} + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy dz + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dy}{2} - \left(\sigma_y + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dz}{2} - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz dy - \rho F_y dx dy dz \frac{dz}{2} + \rho F_z dx dy dz \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned}$$

¹ Клод Нав'є (1785—1836) — французький учений, член Паризької академії наук.

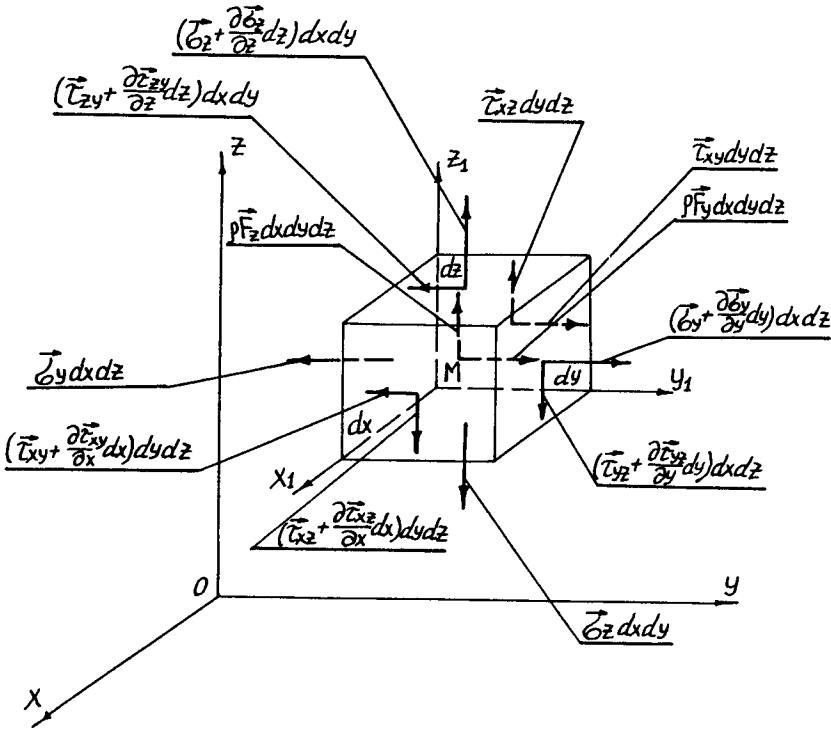


Рис. 9.9

Проводячи необхідні перетворення цього рівняння та не враховуючи величини четвертого порядку малості, здобудемо

$$\tau_{zy} dx dy dz - \tau_{yz} dx dy dz = 0.$$

Звідси

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Аналогічно знайдемо ще дві рівності: $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Об'єднуючи всі здобуті рівності, маємо:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx}; \\ \tau_{xz} = \tau_{zx}; \\ \tau_{yz} = \tau_{zy}. \end{cases} \quad (9.21)$$

З рівностей (9.21) випливає: на двох взаємно перпендикулярних гранях елемента суцільного середовища складові дотичних напружень, що є перпендикулярними до загального ребра, чисельно рівні і напрямлені обидві до ребра або від ребра (див. рис. 9.5). Це закон парності дотичних напружень. Він справедливий в усіх точках суцільного середовища.

Отже, для опису напружень, що діють на гранях елемента суцільного середовища, виділеного в околі довільної точки перерізами, паралельними площинам декартової системи координат, достатньо шести величин $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Ці величини називаються *компонентами напруженого стану у даній точці*.

9.3. Напруження на довільній площадці, що проходить через дану точку суцільного середовища. Граничні умови

Диференціальні рівняння рівноваги суцільного середовища (9.20) містять шість напружень: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Ці напруження діють на площадках, які є паралельними площинам декартової системи координат (див. рис. 9.3).

На практиці часто виникає необхідність визначення залежності між поверхневими силами, що діють у деяких точках поверхні середовища, і напруженнями в цих точках на площадках, що є паралельними площинам декартової системи координат. У цих випадках задача зводиться до визначення напружень на довільно орієнтованій площадці, що проходить через дану точку середовища.

Нехай у деякій точці O суцільного середовища відомі напруження, які діють на площадках, що є паралельними площинам декартової системи координат, і нехай ця точка перебуває у стані рівноваги. Виділимо в околі цієї точки нескінченно малий об'єм у вигляді тетраедра $BCDO$ (рис. 9.10). Три грані тетраедра збігаються з координатними площинами декартової системи координат $Oxyz$. Четверта грань BCD утворює площадку довільної орієнтації у суцільному середовищі. Її орієнтацію в системі координат $Oxyz$ будемо визначати напрямними конусами зовнішньої нормалі \vec{n} , тобто величинами:

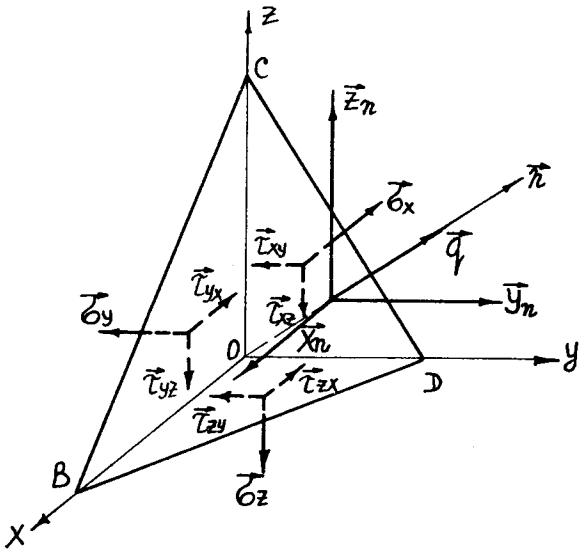


Рис. 9.10

$$l = \cos(\vec{n}, x); \quad m = \cos(\vec{n}, y); \quad n = \cos(\vec{n}, z). \quad (9.22)$$

Розглянутий тетраедр має ті самі властивості, що і розглянутий у параграфі 9.2 паралелепіпед.

Нехай напруження, що діють на гранях тетраедра OBC , OBD та ODC , відомі (рис. 9.10). Позначимо повне напруження, що діє на довільно орієнтованій площадці BCD , через \vec{q} , а складові цього напруження, що є паралельними осям координат, — через \vec{X}_n , \vec{Y}_n , \vec{Z}_n .

Визначимо значення X_n , Y_n та Z_n через відомі напруження на гранях OBC , OBD та ODC . Позначимо площу трикутника $\triangle BCD$ через S_{BCD} , площу трикутника $\triangle OBC$ — через S_{OBC} , $\triangle ODC$ — через S_{ODC} та $\triangle OBD$ — через S_{OBD} . Очевидно,

$$\begin{aligned} S_{OBC} &= S_{BCD} \cos(\widehat{\vec{n}, y}) = S_{BCD} m; \\ S_{ODC} &= S_{BCD} \cos(\widehat{\vec{n}, x}) = S_{BCD} l; \\ S_{OBD} &= S_{BCD} \cos(\widehat{\vec{n}, z}) = S_{BCD} n, \end{aligned} \quad (9.23)$$

оскільки площі трикутників $\triangle OBC$, $\triangle ODC$ та $\triangle OBD$ є проєкціями площі трикутника $\triangle BCD$ на площини координат xOz , yOz та xOy .

Помножуючи відповідні напруження на площі граней тетраедра, отримуємо внутрішні поверхневі сили, що діють на цих гранях. Об'ємними силами, що діють на елемент суцільного середовища, знехтуємо, оскільки для нескінченно малого елемента середовища об'ємні сили, наприклад сили тяжіння, є величинами більш високого порядку малості.

Для визначення компонент X_n , Y_n , Z_n застосуємо до тетраедра аксіому затвердіння та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на тетраедр:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad X_n S_{BCD} - \sigma_x S_{ODC} - \tau_{xy} S_{OBC} - \tau_{zx} S_{OBD} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad Y_n S_{BCD} - \sigma_y S_{OBC} - \tau_{xy} S_{ODC} - \tau_{zy} S_{OBD} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \quad Z_n S_{BCD} - \sigma_z S_{OBD} - \tau_{xz} S_{ODC} - \tau_{yz} S_{OBC} = 0. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи рівняння (9.23), маємо:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n = 0; \\ Y_n &= \sigma_y m + \tau_{xy} l + \tau_{zy} n = 0; \\ Z_n &= \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Оскільки при зменшенні розмірів тетраедра він стягується в точку і в границі усі його грані проходять через цю точку, то рівняння (9.24) визначають зв'язок між складовими напружень у точці O , що діють на довільно орієнтованій площадці, та напруженнями, що діють на площадках, паралельних площинам декартової системи координат $Oxyz$.

Для точок, розташованих на поверхні середовища, рівняння (9.24) визначають умови рівноваги в даній точці поверхні середовища і називаються *граничними умовами*.

9.4. Деформації у точці суцільного середовища. Компоненти деформованого стану в точці. Рівняння нерозривності деформацій. Відносна об'ємна деформація

Під *деформацією суцільного середовища* розуміють переміщення одних точок середовища відносно інших. Якщо суцільне середовище рухається у просторі як абсолютно тверде тіло, то відносне розташування окремих частинок середовища не змінюється і середовище не деформується. Тому для вивчення деформації суцільного середовища припускати, що на середовище накладена достатня кількість в'язей, які перешкоджають руху середовища як абсолютно твердого тіла.

Нехай довільна частка M середовища разом із середовищем перебуває у стані рівноваги відносно декартової системи координат $Oxyz$ (рис. 9.11). Переміщення частки M , що має координати x, y, z , наприклад у положення M_1 за рахунок деформації середовища, може бути здійснено трьома послідовними переміщеннями уздовж осей координат x, y та z . Будемо вважати, що ці переміщення є надто малими і вони неперервно змінюються по об'єму середовища, тобто переміщення U, V, W є неперервними функціями координат точок середовища:

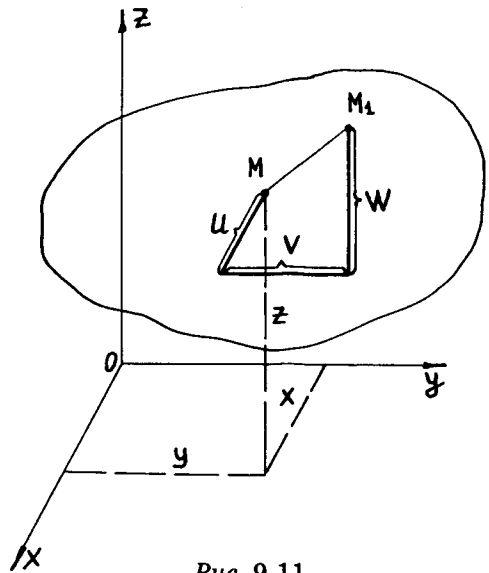


Рис. 9.11

$$U = f(x, y, z); \quad V = f_1(x, y, z); \quad W = f_2(x, y, z). \quad (9.25)$$

Розглянемо деформацію середовища в точці M з координатами x, y, z . Для цього в околі точки M виділимо елементарний об'єм $dx dy dz$ у вигляді паралелепіпеда (див. рис. 9.3) та розглянемо подовження його ребер і спотворення його кутів при деформації.

Зауважимо, що при вивченні деформації паралелепіпеда зручно розглядати деформацію проєкцій його граней на площини координат $Oxyz$ і за цими деформаціями робити висновок про деформацію всього паралелепіпеда. При цьому внаслідок малості деформацій проєкції двох його паралельних граней на будь-яку площину координат зливаються в одну проєкцію (в

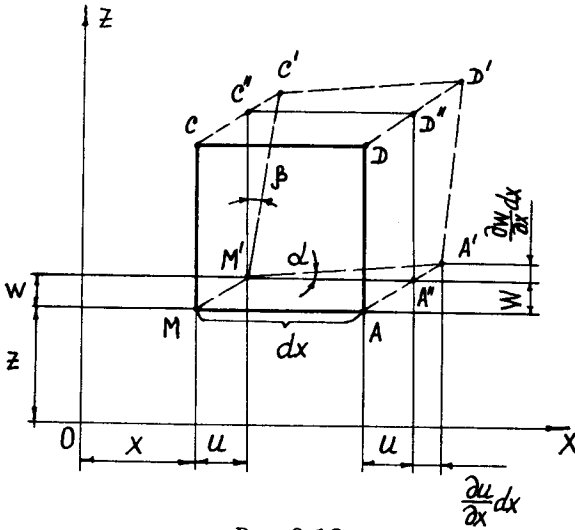


Рис. 9.12

загальному випадку вони відрізняються на малі величини вищих порядків, тому цими відмінностями нехтують).

Розглянемо, наприклад, проекцію грані $MADC$ паралелепіпеда (див. рис. 9.3) на координатну площину xOz (рис. 9.12). До деформації вершина M паралелепіпеда мала координати x, y, z . Припустимо, що за рахунок деформації паралелепіпеда проекції точок грані $MADC$ на площину координат xOz (рис. 9.12) будуть такими: точка M займе положення M' , точка A — A' , точка D — D' , точка C — C' і весь прямокутник $MADC$ займе

положення $M'A'D'C'$. Точка M одержала переміщення U та W , які є функціями координат точки, тобто $U = f(x, y, z)$, $W = f_1(x, y, z)$.

Положення точки A відрізняється від положення точки M тільки координатою x , тому складова переміщення точки A вздовж осі x буде $U_1 = f(x + dx, y, z)$. Застосовуючи до цього виразу формулу Тейлора (див. параграф 9.2) та залишаючи в цій формулі члени не вище першого порядку малості, знайдемо

$$U_1 = U + \frac{\partial U}{\partial x} dx.$$

Абсолютне подовження проекції на вісь x ребра $MA = dx$ буде

$$U_1 - U = \frac{\partial U}{\partial x} dx.$$

Позначимо відносне подовження проекції на вісь x ребра $MA = dx$ через ε_x . Тоді маємо

$$\varepsilon_x = \frac{U_1 - U}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогічно знайдемо відносні подовження ребер паралелепіпеда, що є паралельними осям координат y та z :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Тепер розглянемо кутові деформації, тобто спотворення прямих кутів паралелепіпеда внаслідок зсуву. Розглянемо прямий до деформації кут $\angle AMC$ або $\angle A''M'C''$. Унаслідок деформації ребро $M'A''$ повертається на кут α , ребро $M'C'$ — на кут β (рис. 9.12). Позначимо кутову деформацію у площині xOz (відносний зсув), через γ_{zx} ; воно буде визначатися сумою кутів α та β або сумою їх тангенсів (внаслідок малості деформації):

$$\gamma_{zx} = \alpha + \beta \approx \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta.$$

Подамо вираз кутів α та β через переміщення U, V, W .
Переміщення точки M (рис. 9.12) за напрямом осі z

$$W = f_1(x, y, z).$$

Переміщення точки A за напрямом осі z

$$W_1 = f_1(x + dx, y, z) = W + \frac{\partial W}{\partial x} dx$$

(при переході від точки M до точки A змінюється координата x , тому і приріст переміщення йде за напрямом x).

Визначимо різницю переміщень за напрямом осі z точок A та M :

$$A''A' = W_1 - W = \frac{\partial W}{\partial x} dx.$$

З прямокутного трикутника $\Delta M'A''A'$ знаходимо

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{A''A'}{M'A''} = \frac{\frac{\partial W}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial U}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial W}{\partial x}}{1 + \frac{\partial U}{\partial x}}.$$

Не враховуючи в знаменнику $\frac{\partial U}{\partial x}$ як малу величину порівняно з одиницею, одержуємо

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Аналогічно знаходимо кут β :

$$\beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Остаточо відносний зсув в площині xOz буде

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}.$$

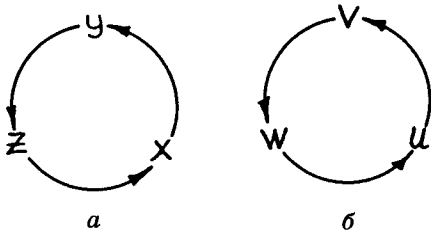


Рис. 9.13

Відносні зсуви у площинах yOz та xOy можна отримати або повторюючи аналогічні міркування, або проводячи перестановку символів за схемою, зображеною на рис. 9.13. Ця схема називається *циклічною перестановкою символів*. Проводячи циклічну перестановку символів, отримуємо:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Об'єднуючи здобуті лінійні та кутові деформації, остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Рівності (9.26) визначають лінійні та кутові деформації у точці суцільного середовища через переміщення U , V та W і називаються *співвідношеннями Коші*¹.

Шість величин ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{xz} та γ_{yz} називаються *компонентами деформованого стану у даній точці суцільного середовища*. Якщо відомі деформації ε_x , ..., γ_{yz} у даній точці, то можна визначити відносне подовження та відносну деформацію зсуву в будь-якому напрямі та в будь-якій площині, що проходять через цю точку.

Розглянемо правило знаків для деформацій в точці. Додатним лінійним деформаціям відповідають подовження ребер елемента середовища dx , dy , dz , що розглядається в околі даної точки M , уздовж осей координат

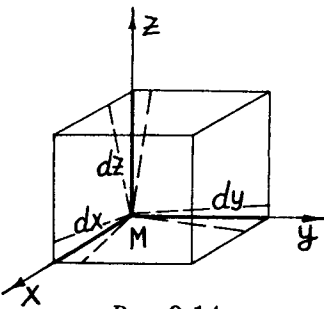


Рис. 9.14

$Mxyz$, від'ємним деформаціям — скорочення цих ребер (рис. 9.14). Додатним кутовим деформаціям у точці M відповідає зменшення прямих кутів між ребрами dx , dy та dz елемента (зменшення кутів між додатними напрямками осей координат, що проходять через точку M), від'ємним кутовим деформаціям — збільшення цих кутів (рис. 9.14).

Вивчаючи деформацію суцільного середовища, ми виділяли в середовищі елементарні паралелепіеди та розглядали їх деформацію. Очевидно, що деформації суміжних елементів суцільного середовища не

¹ Огюстен Луї Коші (1789—1857) — французький математик, член Паризької академії наук.

можуть бути довільними, вони пов'язані між собою. Дійсно, до деформації середовища грані елементарних паралелепіпедів щільно прилягають одна до одної так, що усі паралелепіпеди утворюють суцільне середовище. При деформації середовища кожний елементарний паралелепіпед змінюється — ребра подовжуються, а прями кути спотворюються, проте усі елементарні паралелепіпеди, як і до деформації середовища, мусять щільно прилягати один до одного. Наприклад, у двох суміжних паралелепіпедів 1 та 2 (на рис. 9.15 подано проєкції паралелепіпедів на площину xOy) ребра ab та $a'b'$ подовжуються на одну й ту саму величину, оскільки вони є одним спільним ребром.

Тепер розглянемо чотири вершини паралелепіпедів, які збігаються в одній точці O_1 (рис. 9.15). У перерізі до деформації середовища їхні кути становлять в сумі 360° . При деформації середовища ці кути змінюються, одні з них збільшуються, другі — зменшуються, проте їх сума, як і раніше, дорівнює 360° .

Отже, шість деформацій $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ у точці не можуть бути довільними, між ними існують певні залежності. Щоб визначити ці залежності, необхідно з рівнянь (9.26) вилучити похідні від U, V та W . Для цього розглянемо такі рівності:

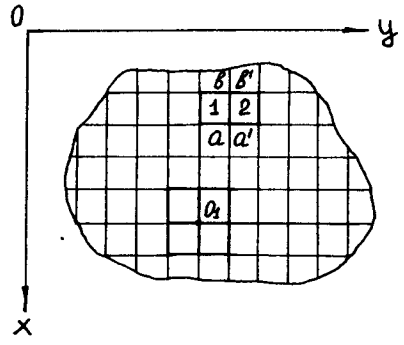


Рис. 9.15

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Диференціюємо першу рівність двічі за y , другу — двічі за x , а третю — один раз за x і другий раз за y :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y}.$$

Звідси

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{9.27}$$

Рівняння (9.27) дає співвідношення між деформаціями в площині xOy . Щоб отримати подібні співвідношення в площинах yOz та xOz , достатньо в рівнянні (9.27) здійснити циклічну перестановку символів (див. рис. 9.13):

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \tag{9.28}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}. \tag{9.29}$$

Знайдемо співвідношення між ε_x та γ_{xy} , γ_{xz} та γ_{yz} . Для цього розглянемо такі рівності:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Диференціюємо першу рівність за y і z , другу — за z , третю — за y та четверту — за x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z}; & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Розглянемо три останніх рівняння системи (9.30). Рівняння

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

записуємо у вигляді

$$-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad (9.31)$$

Складаємо рівняння (9.31) з другим та третім рівняннями системи (9.30):

$$-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.$$

Диференціюємо це рівняння за x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z},$$

остаточно дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \quad (9.32)$$

Два інших співвідношення здобудемо на підставі циклічної перестановки символів:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \quad (9.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}. \quad (9.34)$$

Об'єднуючи рівняння (9.27)—(9.29) та (9.32)—(9.34), остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Рівняння (9.35) отримані Сен-Венаном¹ і називаються *рівняннями нерозривності* або *умовами сумісності деформацій*.

При деформації суцільного середовища змінюється його об'єм. *Відношення зміни об'єму середовища до його початкового об'єму називається відносною об'ємною деформацією*. Для визначення відносної об'ємної деформації у точці середовища розглянемо деформацію елементарного паралелепіеда (див. рис. 9.3). Легко зрозуміти, що якщо у даному елементі відбулися спотворення прямих кутів (відбулася деформація зсуву) без зміни довжини ребер, то відносна об'ємна деформація елемента буде малою величиною вищого порядку порівняно з деформацією зсуву. Отже, з точністю до малих вищого порядку можемо вважати, що зміна об'єму паралелепіеда буде відбуватися тільки за рахунок подовження його ребер.

Позначимо об'єм паралелепіеда до деформації (див. рис. 9.3) через $d\nu = dx dy dz$. Новий об'єм паралелепіеда після деформації буде

$$d\nu_1 = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z).$$

Звідси

$$d\nu_1 = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z).$$

Відкидаючи в цьому виразі величини вищих порядків малості порівняно з ε_i , здобудемо

$$d\nu_1 = d\nu (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

¹ Адемар Жан Клод Сен-Венан (1797—1886) — французький інженер, член Паризької академії наук.

Тоді відносна зміна об'єму паралелепіпеда

$$\frac{dv_1 - dv}{dv} = \frac{dv(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - dv}{dv} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Позначаючи відносну об'ємну деформацію через θ та враховуючи вирази:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

остаточно маємо

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (9.36)$$

Рівняння (9.36) визначає відносну об'ємну деформацію в довільній точці суцільного середовища.

9.5. Залежності між напруженнями та деформаціями в ідеально пружному суцільному середовищі

У попередніх параграфах ми розглянули теорію напружень та теорію деформацій суцільного середовища. Ці теорії самі по собі не можна застосовувати для розв'язання практичних задач статички деформованих тіл доти, доки напруження та деформації не будуть зв'язані яким-небудь фізичним законом. Майже всім матеріальним тілам тією чи іншою мірою властива пружність, тобто здатність відновлювати свої розміри та форму при знятті діючих на тіла зовнішніх сил. На підставі цієї властивості при вивченні рівноваги тіл, що деформуються, вводиться їх модель — **ідеально пружне суцільне середовище**, тобто середовище, що повністю відновлює свої початкові розміри та форму після зняття зовнішнього навантаження.

Щоб визначити залежність між напруженнями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ та деформаціями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ в ідеально пружному середовищі, необхідно визначити фізичні властивості пружних матеріальних тіл.

У 1676 р. англійський вчений Роберт Гук експериментально встановив, що *в межах пружності для переважної більшості матеріальних тіл переміщення пропорційні діючим силам*. У сучасному трактуванні закон Гука можна подати як залежність між напруженням та деформацією. При цьому встановлюється лінійна залежність, яка властива стану матеріалу в точці (рис. 9.16):

$$\sigma_y = E\varepsilon_y. \quad (9.37)$$

Залежність (9.37) називається **законом Гука**. Величина E в рівності (9.37) називається **модулем пружності при розтягуванні**. Модуль пружності E — фізична стала матеріального тіла і визначається дослідним шляхом.

З досліду також випливає, що при подовжньому розтягуванні тіл їх поперечний переріз зменшується. Між подовженням і зменшенням поперечних розмірів тіл при подовжньому розтягуванні існує така залежність:

$$\mu = \frac{\epsilon'}{\epsilon_y}, \tag{9.38}$$

де μ — коефіцієнт, що характеризує пружні властивості матеріальних тіл (коефіцієнт поперечної деформації, або коефіцієнт Пуассона¹); ϵ' — відносна

поперечна деформація ($\epsilon' = \frac{b - (b - \Delta b)}{b} = \frac{\Delta b}{b}$, рис. 9.16, б); ϵ_y — відносна по-

довжня деформація ($\epsilon_y = \frac{a - (a - \Delta a)}{a} = \frac{\Delta a}{a}$, рис. 9.16, а).

Поширимо ці дослідні дані на випадок деформації у точці ідеально пружного суцільного середовища у трьох взаємно перпендикулярних напрямках.

Для цього в ідеально пружному середовищі, що перебуває у стані рівноваги під дією прикладених до нього зовнішніх поверхневих та масових сил, виділимо в околі довільної точки M елементарний паралелепіпед. По гранях цього паралелепіпеда діятимуть нормальні та дотичні напруження. При цьому на протилежних гранях напруження будуть відрізнятися на дуже малий приріст [див. формули (9.11)—(9.19)]. Нехтуючи цим приростом напру-

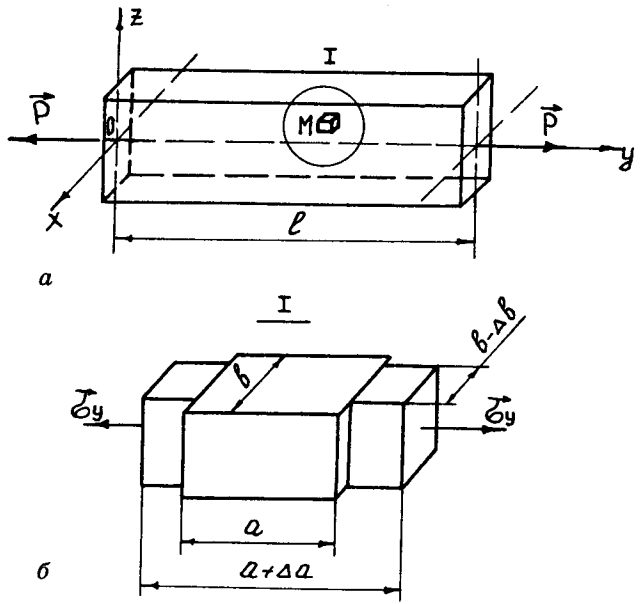


Рис. 9.16

жень як малою величиною вищого порядку, надалі будемо вважати, що по протилежних гранях цього паралелепіпеда діють рівні за модулем напруження. На рис. 9.17 зображено паралелепіпед, в околі точки M по гранях якого діють нормальні напруження. Визначимо залежність між напруженнями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ та відносними лінійними деформаціями $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ паралелепіпеда. Для цього знайдемо відносне подовження паралелепіпеда вздовж осі x . Це відносне подовження складається з трьох доданків:

$$\epsilon_x = \epsilon'_x + \epsilon''_x + \epsilon'''_x.$$

¹ Сімеон Дені Пуассон (1781—1840) — французький механік, фізик та математик.

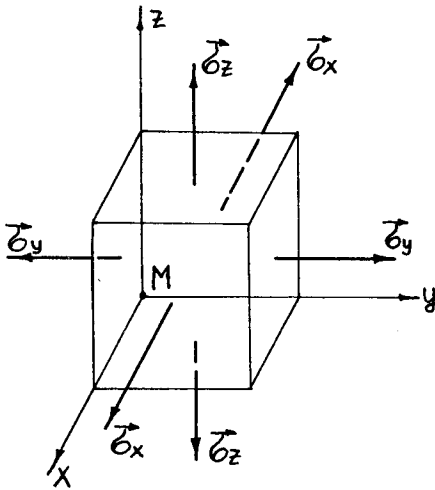


Рис. 9.17

Від дії напруження σ_x виникає подовження вздовж осі x :

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}.$$

Від дії напруження σ_y виникає подовження вздовж осі y :

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E},$$

а внаслідок цього вздовж осі x виникає скорочення паралелепіпеда:

$$\varepsilon_x'' = -\mu \frac{\sigma_y}{E}.$$

Аналогічно від напруження σ_z за напрямом осі x виникає скорочення:

$$\varepsilon_x''' = -\mu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Складаючи всі три деформації, дістанемо

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x''' = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (9.39)$$

Аналогічно знайдемо відносну деформацію паралелепіпеда за напрямом осей y та z :

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad (9.40)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \quad (9.41)$$

Тепер знайдемо рівняння, які виражають залежність між дотичними напруженнями τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} та кутовими деформаціями γ_{xy} , γ_{yz} та γ_{zx} паралелепіпеда.

При дії на грані паралелепіпеда дотичних напружень деформації паралелепіпеда здійснюються тільки в площинах дії цих напружень. Так, напруження $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ спотворюють тільки прями кути паралелепіпеда в площині xMy (рис. 9.18).

Як свідчить дослід, при деформації зсуву має місце також лінійна залежність між дотичними напруженнями в точці тіла та кутовими деформаціями в цій точці (закон Гука при зсуві):

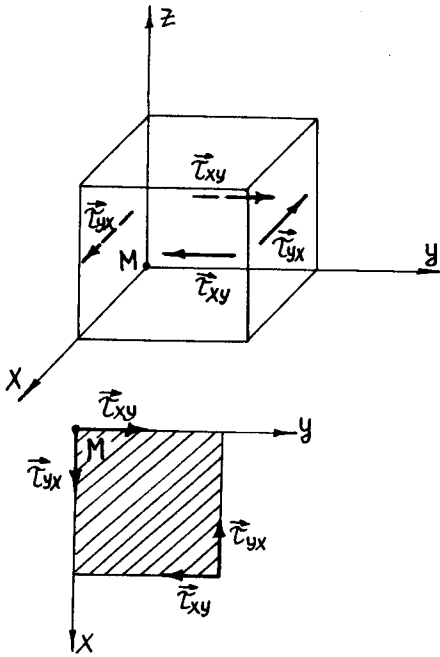


Рис. 9.18

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad (9.42)$$

де G — модуль пружності матеріального тіла при деформації зсуву. Модуль пружності G — фізична стала матеріального тіла, яка визначається дослідним шляхом.

Між модулем пружності E та модулем пружності G існує така залежність¹:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (9.43)$$

З рівностей (9.42) та (9.43) випливають такі рівняння:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \mu)\tau_{xy}}{E}; \quad (9.44)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1 + \mu)\tau_{yz}}{E}; \quad (9.45)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{2(1 + \mu)\tau_{xz}}{E}. \quad (9.46)$$

Отже, ми одержали співвідношення (9.39)—(9.41) та (9.44)—(9.46), які виражають лінійну залежність між напруженнями та деформаціями в довільній точці ідеально пружного середовища (узагальнений закон Гука).

Знайдемо залежність між напруженнями та відносною об'ємною деформацією ідеально пружного середовища. Для цього складемо ліві та праві частини рівнянь (9.39)—(9.41). Маємо

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2\mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)],$$

або

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} \theta^*, \quad (9.47)$$

де $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$; $\theta^* = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Рівність (9.47) виражає зв'язок між напруженням в точці ідеально пружного середовища та відносною об'ємною деформацією в цій точці.

¹ Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. — М.: Наука, 1964. — С. 49.

Рівняння (9.39)—(9.41) та (9.44)—(9.46) розв'язані відносно деформацій. Подамо розв'язання цих рівнянь відносно напружень. Перетворимо рівняння (9.39) так:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x + \mu \sigma_x - \mu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right]. \quad (9.48)$$

Оскільки $\theta^* = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, то рівняння (9.48) набирає вигляду

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1 + \mu) \sigma_x - \mu \theta^* \right]. \quad (9.49)$$

Беручи до уваги рівність (9.47), рівняння (9.49) набирає такого вигляду:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1 + \mu) \sigma_x - \frac{E\mu}{1 - 2\mu} \theta \right]. \quad (9.50)$$

Рівняння (9.50) розв'язуємо відносно σ_x :

$$\sigma_x = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \theta + \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_x. \quad (9.51)$$

Введемо позначення:

$$\begin{cases} \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = \lambda; \\ \frac{E}{1 + \mu} = 2\nu. \end{cases} \quad (9.52)$$

Тоді рівняння (9.51) набирає вигляду

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\nu\varepsilon_x.$$

Аналогічно знайдемо вирази і для інших напружень. Отже, рівняння (9.39)—(9.41) та (9.44)—(9.46) набирають таких форм:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\nu\varepsilon_x; \quad \tau_{xy} = \nu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\nu\varepsilon_y; \quad \tau_{yz} = \nu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\nu\varepsilon_z; \quad \tau_{zx} = \nu\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Коефіцієнти λ та ν у рівняннях (9.53) називаються *пружними сталими Ламе*¹.

¹ Габріель Ламе (1795—1870) — французький інженер, математик, член Паризької академії наук.

9.6. Приклади визначення напруженого та деформованого стану пружного тіла

При визначенні напружень та переміщень в пружних тілах звичайно бувають задані:

- а) форма та геометричні розміри тіла;
- б) фізичні величини, що характеризують пружні властивості тіла;
- в) масові та поверхневі зовнішні сили, що діють на тіло;
- г) умови закріплення тіла.

Для розв'язання задачі маємо такі рівняння:

- а) диференціальні рівняння рівноваги середовища (9.20);
- б) граничні умови (9.24);
- в) співвідношення Коші (9.26);
- г) умови сумісності деформацій, або рівняння нерозривності деформацій (9.35);
- д) узагальнений закон Гука (9.39)—(9.41), (9.44)—(9.46) або (9.53).

Розглянутих рівнянь цілком достатньо для однозначного визначення напруженого та деформованого стану пружного тіла. Так, при визначенні напружень в точках тіла, тобто при визначенні шести функцій:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= f_1(x, y, z); \quad \tau_{xy} = f_4(x, y, z); \\ \sigma_y &= f_2(x, y, z); \quad \tau_{yz} = f_5(x, y, z); \\ \sigma_z &= f_3(x, y, z); \quad \tau_{zx} = f_6(x, y, z),\end{aligned}\tag{9.54}$$

необхідно розв'язати систему рівнянь (9.20) та (9.35). При цьому рівняння (9.35) необхідно заздалегідь перетворити, підставити в них замість деформацій напруження [за рівняннями (9.39)—(9.41), (9.44)—(9.46)].

Дев'ять рівнянь цієї системи містять шість невідомих функцій (9.54). У курсі диференціальних рівнянь доводиться, що така система може бути розв'язана. Оскільки маємо систему рівнянь з частинними похідними, то при інтегруванні цих рівнянь матимемо не просто сталі, а довільні функції координат x, y, z . Ці функції можна визначити з умов на поверхні тіла, використовуючи граничні умови (9.24).

Якщо крім напружень необхідно визначити переміщення точок тіла, то, підставляючи вирази (9.54) в узагальнений закон Гука [(9.39)—(9.41), (9.44)—(9.46)], здобудемо функції:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varphi_1(x, y, z); \quad \gamma_{xy} = \varphi_4(x, y, z); \\ \varepsilon_y &= \varphi_2(x, y, z); \quad \gamma_{yz} = \varphi_5(x, y, z); \\ \varepsilon_z &= \varphi_3(x, y, z); \quad \gamma_{zx} = \varphi_6(x, y, z).\end{aligned}\tag{9.55}$$

Ці функції необхідно підставити в співвідношення Коші (9.26) та проінтегрувати здобуті рівняння. При інтегруванні матимемо довільні функції координат x, y, z , які можна визначити з умов закріплення тіла. Таким чином, визначимо переміщення точок тіла як цілком визначені функції координат:

$$U = \psi_1(x, y, z); \quad V = \psi_2(x, y, z); \quad W = \psi_3(x, y, z). \quad (9.56)$$

З розглянутого випливає, що у загальній постановці задача визначення напруженого та деформованого стану пружного тіла є складною математичною задачею.

Розв'язання таких та подібних до них задач розглядається в теорії пружності — розділі математичної фізики. У цьому параграфі розглянемо тільки найпростіші задачі, до яких належать випадки навантаження пружних тіл, за яких напруження в точках тіла будуть сталими або лінійними функціями координат. При цьому задача визначення напружень значно спрощується. Дійсно, на підставі рівнянь (9.39)—(9.41), (9.44)—(9.46) видно, що другі похідні від деформацій виражаються завжди лінійними функціями других похідних напруження, наприклад:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) \right]; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{G \partial x \partial z}$$

і т. д.

Оскільки напруження є сталими або лінійними функціями координат x, y, z , то всі другі похідні від деформацій обертаються в нуль; отже, всі умови нерозривності (9.35) будуть задоволені. Залишається тільки задовольнити диференціальні рівняння рівноваги (9.20) та граничні умови (9.24). Розглянемо дві такі задачі.

Приклад 9.1¹. Визначити напруження та переміщення в пружному тілі, що має форму циліндра довільного поперечного перерізу. Циліндр підвішений верхнім торцем (рис. 9.19, а) і розтягується власною вагою.

Розв'язання. 1. Визначення напружень. Задачу будемо розв'язувати оберненим методом, тобто візьмемо вирази для напружень у точках тіла і перевіряємо на підставі диференціальних рівнянь рівноваги (9.20) та граничних умов (9.24), чи задовольняє цей напружений стан тіла умови його навантаження.

Нехай напруження в точках циліндра визначаються такими залежностями (на підставі даних опору матеріалів):

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = \rho g z; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad (9.57)$$

де ρ — густина матеріалу циліндра; g — прискорення вільного падіння.

¹ М.М. Филоненко-Бородич. Теория упругости. — М.—Л.: ОГИЗ, 1947. — С. 102—105.

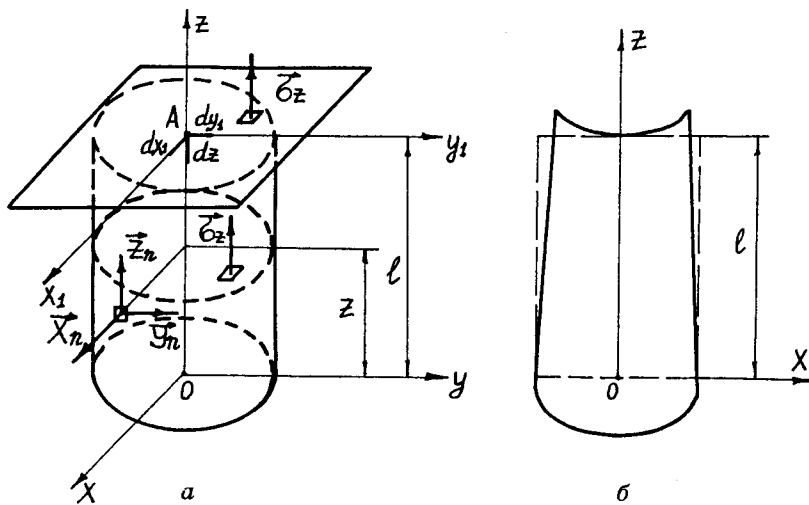


Рис. 9.19

Підставляючи в диференціальні рівняння рівноваги (9.20) значення напружень (9.57), знайдемо:

$$F_x = F_y = 0; F_z = -g. \tag{9.58}$$

Перевіримо, чи задовольняються умови навантажування на поверхні циліндра. З рівнянь (9.24) знаходимо:

$$X_n = Y_n = 0; Z_n = g\rho z \cos(\widehat{\vec{n}, z}), \tag{9.59}$$

тобто на поверхні циліндра мають бути розподілені сили, напрямлені вздовж осі z . Для точок циліндра, які розташовані на бічній поверхні, $\cos(\widehat{\vec{n}, z}) = 0$. Тому і поверхневі сили на цій поверхні відсутні. Для точок, які розміщені в площинах, що збігаються з поперечним перерізом циліндра, $\cos(\widehat{\vec{n}, z}) = 1$. При $z = l$ поверхневі сили рівномірно розподіляються по верхньому торцю циліндра. Інтенсивність цих сил $\sigma_z = \rho gl$. Для точок, які розташовані в площині, що збігається з торцем циліндра ($z = 0$), маємо $\sigma_z = 0$, тобто поверхневі сили на цій поверхні відсутні. Отже, прийнятий напружений стан циліндра відповідає умовам його навантажування (дія власної ваги рис. 9.19, а).

2. Визначення переміщень. На підставі співвідношень Коші (9.26), закону Гука та залежностей (9.57) одержуємо системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\mu \frac{\rho g z}{E}; \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -\mu \frac{\rho g z}{E}; \\ \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\rho g z}{E}; \end{cases} \quad (9.60)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (9.61)$$

Переміщення U , V , W знайдемо інтегруванням системи рівнянь (9.60):

$$\begin{cases} U = -\frac{\mu \rho g}{E} z x + f(y, z); \\ V = -\frac{\mu \rho g}{E} z y + \varphi(x, z); \\ W = \frac{\rho g}{2E} z^2 + \psi(x, y). \end{cases} \quad (9.62)$$

На підставі рівнянь (9.62) та (9.61) маємо рівняння для визначення f , φ та ψ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad (9.63)$$

$$-\frac{\mu \rho g}{E} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad (9.64)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\mu \rho g}{E} x + \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (9.65)$$

З рівнянь (9.63)—(9.65) шляхом диференціювання виключаємо з рівнянь по черзі функції f , φ та ψ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\mu \rho g}{E}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\mu \rho g}{E}; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \end{cases} \quad (9.66)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0. \end{cases} \quad (9.67)$$

Віднімаючи попарно рівняння (9.67), здобудемо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Порівнюючи ці рівняння з рівняннями (9.67), знайдемо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (9.68)$$

Попередні перетворення здійснювались із метою побудови простіших систем рівнянь (9.66) та (9.68) замість (9.63)—(9.65). На підставі рівнянь (9.66) та (9.68) визначаємо вигляд функцій f , φ та ψ :

$$\begin{cases} f = ay + bz + c; \\ \varphi = dx + ez + m; \\ \psi = \frac{\mu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + nx + hy + k. \end{cases} \quad (9.69)$$

Підставляючи рівняння (9.69) в рівняння (9.62), отримуємо вирази переміщень U , V та W . Ці вирази переміщень підставляємо в рівняння (9.60) і отримуємо залежність між довільними сталими рівнянь (9.69):

$$d = -a; \quad h = -e; \quad n = -b. \quad (9.70)$$

З урахуванням рівностей (9.70) рівняння (9.69) набирають вигляду:

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{\mu\rho g}{E}zx + ay + bz + c; \\
 V &= -\frac{\mu\rho g}{E}zy - ax + ez + m; \\
 W &= \frac{\rho g}{2E}\left[z^2 + \mu(x^2 + y^2)\right] - bx - ey + k.
 \end{aligned}
 \tag{9.71}$$

У рівностях (9.71) маємо шість довільних сталих: a , b , c , e , m та k ; їх наявність пояснюється так. У параграфі 9.4 ми зауважили, що деформація суцільного середовища виникає тільки при виключенні його руху як абсолютно твердого тіла; проте в задачі ми ще не здійснили такого закріплення. Умова закріплення тіла типу “закріплений верхній торець циліндра” при розв’язанні цієї задачі недостатня, необхідно задати її точніше. Закріпимо центр верхнього торця циліндра (точка A на рис. 9.19, a), тобто задамо умови, що при $x = 0$, $y = 0$, $z = l$ переміщення точки були такими: $U = 0$; $V = 0$; $W = 0$. Проте цих умов недостатньо, оскільки циліндр може обертатися відносно осей x_1 , y_1 та z . Щоб виключити можливість цих обертань, умовимося ще, щоб два з трьох елементів dx_1 , dy_1 та dz у точці A залишилися нерухомими, тобто

$$\begin{aligned}
 \text{при } x = y = 0 \quad z = l; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (dz \text{ нерухомий}); \\
 \text{при } x = y = 0 \quad z = l; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (dy_1 \text{ нерухомий у площині } x_1Ay_1).
 \end{aligned}$$

З рівнянь (9.71) з урахуванням умов закріплення одержуємо

$$a = b = c = e = m = 0; \quad k = -\frac{\rho g}{2E}l^2.
 \tag{9.72}$$

Остаточно рівняння (9.72) набирають вигляду:

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{\mu\rho g}{E}xz; \\
 V &= -\frac{\mu\rho g}{E}yz; \\
 W &= \frac{\rho g}{2E}\left[z^2 - l^2 + \mu(x^2 + y^2)\right].
 \end{aligned}
 \tag{9.73}$$

З рівнянь (9.73) випливає, що точки циліндра, які розташовані на його осі, мають тільки вертикальні переміщення; всі інші точки циліндра мають як вертикальні, так і горизонтальні переміщення.

На рис. 9.19, б зображено переріз циліндра площиною xOz після деформації циліндра.

Приклад 9.2¹. Визначити напруження та переміщення в пружному тілі, що має форму циліндра довільного поперечного перерізу. Один торець циліндра жорстко закріплений, а другий вільний. До вільного торця циліндра прикладена пара сил з моментом M_z (рис. 9.20). Під дією пари сил з моментом M_z циліндр набуває деформації крутіння.

Розв'язання. 1. Визначення напружень. Як і в першому прикладі, при визначенні напружень застосовуємо обернений метод. Нехай напруження в точках циліндра визначаються такими залежностями (на підставі даних опору матеріалів):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{zx} = -G\theta y; \tau_{zy} = G\theta x, \quad (9.74)$$

де G — модуль пружності при деформації зсуву; θ — кут закручування, віднесений до одиниці довжини циліндра:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p}. \quad (9.75)$$

Підставляючи в диференціальні рівняння рівноваги (9.20) значення напружень (9.74), знайдемо

$$F_x = F_y = F_z = 0.$$

Отже, напруження в точках циліндра (9.74) можливі за умови відсутності масових сил (наприклад, власної ваги циліндра).

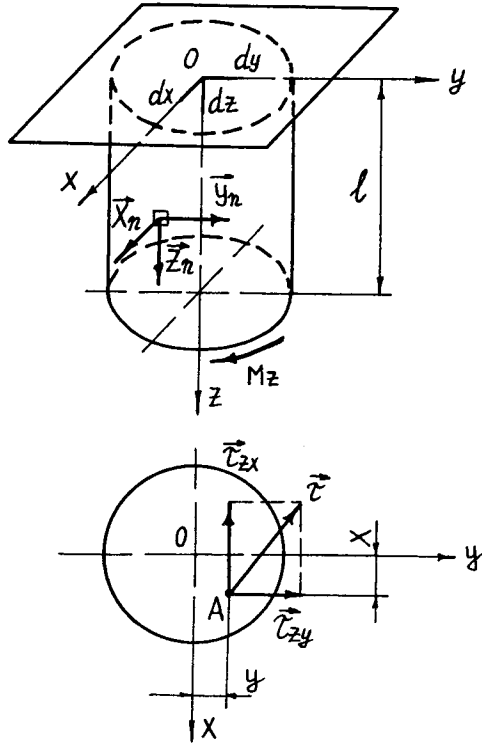


Рис. 9.20

¹ М.М. Филоненко-Бородич. Теория упругости. — М.—Л.: ОГИЗ, 1947. — С. 89—96.

Розглянемо умови на поверхні циліндра. З граничних умов (9.24) знаходимо:

$$\begin{cases} X_n = \tau_{zx} \cos(\widehat{\vec{n}, z}); \\ Y_n = \tau_{zy} \cos(\widehat{\vec{n}, z}); \\ Z_n = \tau_{zx} \cos(\widehat{\vec{n}, x}) + \tau_{zy} \cos(\widehat{\vec{n}, y}). \end{cases} \quad (9.76)$$

Застосуємо ці рівняння до бічної поверхні циліндра. Радіус поперечного перерізу циліндра позначимо r . Візьмемо на бічній поверхні точку $N(x_1, y_1)$. Проведемо в цій точці нормаль до поверхні \vec{n} (рис. 9.21). Нехай вона має кут з віссю y , що дорівнює α . Тоді

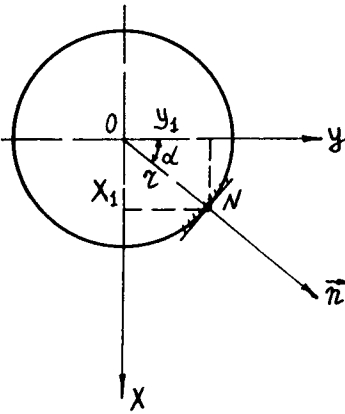


Рис. 9.21

$$\cos(\widehat{\vec{n}, x}) = \sin \alpha = \frac{x_1}{r}; \quad \cos(\widehat{\vec{n}, y}) = \frac{y_1}{r}; \quad \cos(\widehat{\vec{n}, z}) = 0.$$

З рівнянь (9.76) знаходимо:

$$X_n = 0; \quad Y_n = 0;$$

$$Z_n = -G\theta y_1 \frac{x_1}{r} + G\theta x_1 \frac{y_1}{r} = 0.$$

Отже, напруження (9.74) задовольняють умову навантажування, оскільки бічна поверхня циліндра вільна від навантаження.

Тепер застосуємо рівняння (9.76) до верхнього торця циліндра. Для точок, що розташовані в цій площині, маємо:

$$\cos(\widehat{\vec{n}, z}) = 1; \quad \cos(\widehat{\vec{n}, x}) = \cos(\widehat{\vec{n}, y}) = 0.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (9.76), здобудемо:

$$X_n = \tau_{zx} = -G\theta y;$$

$$Y_n = \tau_{zy} = G\theta x; \quad (9.77)$$

$$Z_n = 0.$$

Ті самі значення X_n , Y_n та Z_n будемо мати для будь-яких точок, що розташовані в будь-яких поперечних перерізах циліндра.

Отже, умови на поверхні циліндра задовольняються, якщо на торцях циліндра дотичні напруження розподіляються відповідно до рівнянь (9.77).

Покажемо, що напруження по торцях приводять до скручувального моменту M_z .

Дійсно, проєкції на осі x та y всіх внутрішніх сил, що розподілені по торцях (рис. 9.22), дорівнюють нулю:

$$\int_{(S)} \tau_{zy} dS = \int_{(S)} G\theta x dS = G\theta \int_{(S)} x dS = 0;$$

$$\int_{(S)} \tau_{zx} dS = - \int_{(S)} G\theta y dS = -G\theta \int_{(S)} y dS = 0,$$

оскільки інтеграли $\int_{(S)} x dS$, $\int_{(S)} y dS$ є статичними

моментами площі відносно осей, що проходять через центр ваги перерізу.

Сума моментів усіх внутрішніх сил відносно осі z

$$\int_{(S)} (\tau_{zx} y dS + \tau_{zy} x dS) = G\theta \int_{(S)} (x^2 + y^2) dS = G\theta J_p,$$

що дорівнює скручувальному моменту M_z .

2. Визначення переміщень. Підставляючи значення напружень (9.74) у закон Гука [формули (9.39)—(9.41), (9.44)—(9.46)], одержимо деформації; далі, замінюючи деформації їх виразами через переміщення з рівнянь (9.26), збудемо системи рівнянь:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \tag{9.78}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \tau x; \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = -\tau y. \end{cases} \tag{9.79}$$

Інтегруючи рівняння (9.78), маємо:

$$\begin{cases} U = f(y, z); \\ V = \varphi(x, z); \\ W = \psi(x, y), \end{cases} \tag{9.80}$$

де f , φ , ψ — довільні функції; їх вигляд визначимо з рівнянь (9.79), які на підставі (9.80) набирають вигляду:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \tag{9.81}$$

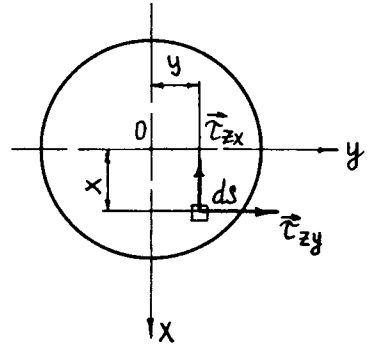


Рис. 9.22

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \tau x; \quad (9.82)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\tau y. \quad (9.83)$$

Виключимо шляхом диференціювання з рівнянь (9.81)—(9.83) по черзі функції f , φ та ψ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (9.84)$$

Диференціюємо рівняння (9.82) та (9.83) так:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \tau; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\tau.$$

Складаючи ці рівняння та беручи до уваги рівняння (9.81), маємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (9.85)$$

Віднімаючи ці самі рівняння, здобудемо

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2\tau, \quad (9.86)$$

і оскільки за формулою (9.81)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

то з рівняння (9.86) маємо:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \tau; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\tau. \quad (9.87)$$

Об'єднуючи рівняння (9.84), (9.85) та (9.87), отримуємо систему других похідних функцій f , φ та ψ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\tau; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \tau; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (9.88)$$

Попередні перетворення здійснювалися з метою здобуття більш простої системи (9.88) замість рівнянь (9.81)—(9.83). На підставі системи (9.88) функції f , φ та ψ набувають вигляду:

$$\begin{cases} f = -\tau yz + ay + bz + c; \\ \varphi = \tau xz + dx + ez + f; \\ \psi = mx + hy + k. \end{cases} \quad (9.89)$$

Функції (9.89) є загальним розв'язком рівнянь (9.88). Рівняння (9.88) є наслідком рівнянь (9.81)—(9.83), які здобуті за допомогою диференціювання. Тому порядок їх вище порядку рівнянь (9.81)—(9.83). Отже, не всякий розв'язок рівнянь (9.88) буде задовольняти рівняння (9.81)—(9.83). Тому необхідно визначити, які з розв'язків (9.89) задовольняють рівняння (9.81)—(9.83).

Підставляючи функції (9.89) у рівняння (9.81)—(9.83), здобудемо співвідношення:

$$\begin{aligned} \tau z + d - \tau z + a &= 0; \\ h + \tau x + e &= \tau x; \\ -\tau y + b + m &= -\tau y, \end{aligned}$$

або $d = -a$; $h = -e$; $m = -b$.

Остаточні функції (9.89) набувають вигляду:

$$\begin{cases} U = f = -\tau yz + ay + bz + c; \\ V = \varphi = \tau xz - ax + ez + f; \\ W = \psi = -bx - ey + k. \end{cases} \quad (9.90)$$

Задамо умови закріплення, тобто закріпимо центр перерізу $z = 0$ (рис. 9.20), а також задамо умови, щоб при $x = y = z = 0$ $U = 0$; $V = 0$; $W = 0$ (9.91), а також

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (9.92)$$

Вимоги (9.92) виключають можливість обертання циліндра відносно початку координат (рис. 9.20).

Умови (9.91) та (9.92) достатні для закріплення циліндра проти жорсткого його переміщення. Застосовуючи ці умови до рівнянь (9.90), знайдемо

$$a = b = c = e = f = k = 0,$$

звідки

$$\begin{cases} U = -\tau yz; \\ V = \tau xz; \\ W = 0. \end{cases} \quad (9.93)$$

З рівняння $W = 0$ випливає, що при деформації крутіння тіл круглого перерізу плоскі поперечні перерізи тіла до деформації залишаються плоскими і після деформації.

Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під поняттям суцільного середовища в механіці?
2. Яку аксіому статички твердого тіла застосовують для опису рівноваги суцільного середовища?
3. Які вимоги висуваються до елементарних об'ємів суцільного середовища?
4. Що таке густина середовища у даній точці?
5. Як визначається елементарна маса суцільного середовища?
6. Як визначається питома вага середовища у даній точці?
7. Як визначається щільність розподілу об'ємних сил у даній точці суцільного середовища?
8. Як визначається щільність розподілу поверхневих сил у даній точці суцільного середовища?
9. Що таке нормальні та дотичні напруження в точці суцільного середовища?
10. За яким методом визначається напруження в точках суцільного середовища?
11. Які є правила знаків для нормальних і дотичних напружень?
12. Запишіть диференціальні рівняння рівноваги суцільного середовища.
13. Як формулюється закон парності дотичних напружень?
14. Що таке компоненти напружень у точці суцільного середовища?
15. Що таке граничні умови?
16. Що розуміють під деформацією суцільного середовища?
17. Як позначають переміщення точок суцільного середовища вздовж осей координат?
18. Що визначають співвідношення Коші?
19. У чому полягає циклічна перестановка символів?
20. Що таке компоненти деформації в точці суцільного середовища?
21. Які є правила знаків для компонент деформації?
22. Запишіть рівняння нерозривності деформацій.
23. Як визначається відносна об'ємна деформація в точці суцільного середовища?
24. Що таке пружність матеріального тіла?
25. Як формулюється закон Гука при розтягуванні (стисканні) пружних тіл?
26. Що таке коефіцієнт Пуассона?
27. Запишіть узагальнений закон Гука.

Глава 10

ТИСК ВАЖКОЇ¹ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ НА ПОВЕРХНІ ТВЕРДИХ ТІЛ

10.1. Ідеальна рідина. Гідростатичний тиск. Незалежність величини гідростатичного тиску від орієнтації площадки, на яку він діє. Загальне рівняння рівноваги ідеальної рідини. Розподіл гідростатичного тиску в шарі ідеальної рідини при дії на рідину сил тяжіння. Поверхні рівня

Як було зазначено в параграфі 9.1, рідкі та газоподібні тіла — один із різновидів суцільного середовища. При вивченні рівноваги або руху рідини та газу модель “ідеальна рідина” відіграє таку саму роль, як і модель “абсолютно тверде тіло” при вивченні рівноваги та руху твердих тіл.

Під *ідеальною рідиною* розуміють абстрактне суцільне середовище, яке має такі властивості: а) воно абсолютно нестисливе; б) абсолютно не чинить опору розриву; в) має абсолютну рухомість, тобто характеризується повною відсутністю в'язкості.

Виділимо у шарі ідеальної рідини, яка перебуває у стані рівноваги, нескінченно малий об'єм у вигляді тетраедра в околі довільної точки O , що має грані dx , dy , dz (рис. 10.1). По гранях тетраедра будуть діяти внутрішні поверхневі сили. Вектор \vec{p} , що характеризує щільність розподілу цих поверхневих сил по гранях тетраедра, називається гідростатичним тиском (див. параграф 9.1). Позначимо векторами \vec{p}_x , \vec{p}_y , \vec{p}_z та \vec{p}_n гідростатичний тиск відповідно на гранях $OСВ$, $OСA$, $OАВ$ та $АВС$. На рис. 10.1 \vec{n} — зовнішня нормаль до грані $АВС$. Добутки векторів \vec{p}_i на відповідні площі граней тетраедра визначають внутрішні поверхневі сили, що діють на його грані.

¹ Важка рідина — рідина, що перебуває під дією сил тяжіння.

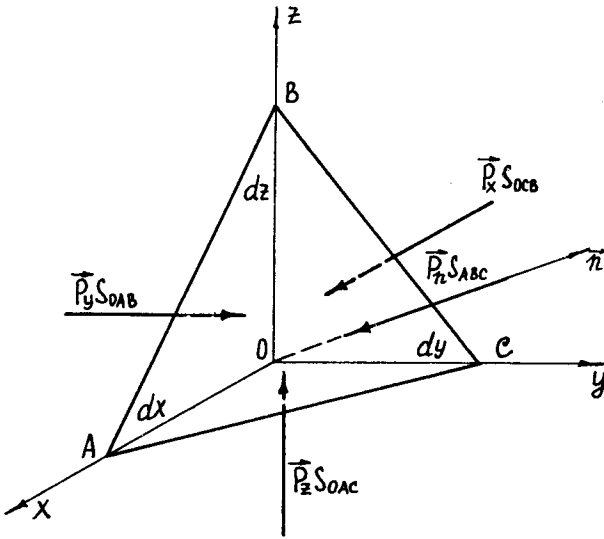


Рис. 10.1

Оскільки розглядається ідеальна рідина, то дотичні напруження по гранях тетраедра не діють (середовище має абсолютну рухомість) і дотичні внутрішні поверхневі сили відсутні.

На тетраедр також діють об'ємні сили. Однак у зв'язку з тим, що ці сили мають вищий порядок малості порівняно з поверхневими силами, ними можна знехтувати. Так, величина поверхневої сили, що діє на грань OAB (рис. 10.1), дорівнює

$\frac{1}{2} p_y dx dz$, а величина об'ємної сили, що діє за напрямом осі y ,

дорівнює $\frac{1}{2} \rho F_y dx dy dz$. Як бачимо, об'ємна сила на порядок менша.

Застосуємо до тетраедра аксіому затвердіння. На тетраедр діє збіжна система сил. Складемо рівняння рівноваги цих сил (рис. 10.1):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad p_x S_{OCB} - p_n S_{ABC} \cos(\widehat{\vec{n}, x}) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad p_y S_{OAB} - p_n S_{ABC} \cos(\widehat{\vec{n}, y}) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \quad p_z S_{OAC} - p_n S_{ABC} \cos(\widehat{\vec{n}, z}) = 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

З рис. 10.1 видно, що при проєкціюванні площі S_{ABC} на площини координат xOy , xOz та yOz здобудемо площі S_{OCB} , S_{OAB} та S_{OAC} , тобто $S_{OCB} = S_{ABC} \cos(\widehat{\vec{n}, x})$, $S_{OAB} = S_{ABC} \cos(\widehat{\vec{n}, y})$, $S_{OAC} = S_{ABC} \cos(\widehat{\vec{n}, z})$. Тоді з рівнянь (10.1) випливає

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

Отже, величина гідростатичного тиску в довільній точці ідеальної рідини не залежить від орієнтації площадки, що проходить через цю точку, тобто гідростатичний тиск у даній точці рідини в усіх напрямках має однакове значення.

Подамо рівняння рівноваги ідеальної рідини. Для цього застосуємо загальні диференціальні рівняння рівноваги суцільного середовища (9.20).

У випадку ідеальної рідини дотичні напруження на гранях елемента рідини відсутні, тобто $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$, а нормальні напруження дорівнюють величині гідростатичного тиску на гранях елемента рідини, тобто $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$.

Підставляючи значення σ_i та τ_{ij} у рівняння (9.20), одержуємо:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \rho &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y \rho &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \rho &= 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Рівняння (10.2) називаються *диференціальними рівняннями рівноваги ідеальної рідини (рівняння Ейлера)*.

Рівняння (10.2) легко інтегруються у випадку об'ємної сили тяжіння.

Помножуючи рівняння (10.2) на dx , dy , dz та почленно їх складаючи, знайдемо

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (10.3)$$

Ліва частина рівняння (10.3) є повним диференціалом гідростатичного тиску. Отже,

$$dp = \rho (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (10.4)$$

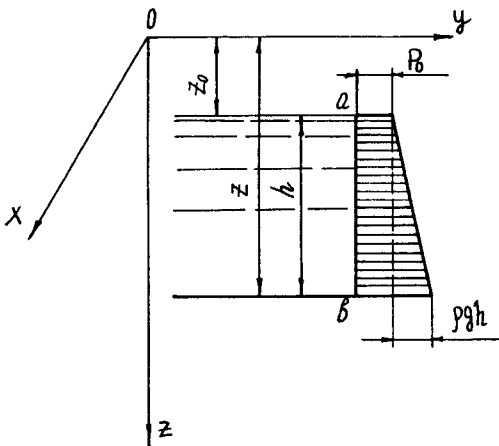


Рис. 10.2

На підставі формули (9.4) маємо

$$\vec{F} = \frac{\rho \vec{g} dV}{\rho dV} = \vec{g}.$$

Тоді проекції вектора \vec{F} на осі декартової системи координат (рис. 10.2)

$$F_x = F_y = 0; \quad F_z = g.$$

Підставляючи значення F_x , F_y , F_z у рівняння (10.4), знайдемо

$$dp = \rho g dz. \quad (10.5)$$

Інтегруючи рівняння (10.5), маємо

$$p = \rho g z + C, \quad (10.6)$$

де C — стала інтегрування.

Позначимо тиск на вільній поверхні рідини p_0 , а ординату цієї поверхні — z_0 (рис. 10.2). Тоді, звільняючись від сталої інтегрування C , матимемо

$$p - p_0 = \rho g (z - z_0). \quad (10.7)$$

Звідси

$$p = p_0 + \gamma h, \quad (10.8)$$

де γ — питома вага рідини; h — глибина занурювання точки в рідині.

З рівняння (10.8) випливає, що гідростатичний тиск у даній точці ідеальної рідини складається із зовнішнього тиску на вільній поверхні рідини та добутку γh , що є функцією глибини занурювання точки в рідині та густини рідини.

Рівняння (10.8) показує, що будь-яка зміна тиску на поверхні рідини p_0 повністю передається на будь-яку точку всередині рідини. Це рівняння є *математичним виразом закону Паскаля*¹.

Графік, що показує зміну гідростатичного тиску з висотою шару рідини, називається *епюрою*. Епюра гідростатичного тиску наочно зображує закон наростання тиску для будь-якої вертикальної лінії ab , проведеної від вільної поверхні шару рідини до його основи (рис. 10.2).

Поверхні в шарі рідини, усі точки яких зазнають однакового гідростатичного тиску, називаються *поверхнями рівня* або *поверхнями рівного тиску*.

Рівняння $dp = 0$ є рівнянням поверхні рівного тиску. У випадку об'ємних сил тяжіння маємо

$$dp = \rho g dz = 0.$$

Звідси $z = \text{const}$, тобто при дії на рідину об'ємних сил тяжіння поверхні рівня, і серед них вільна поверхня, — горизонтальні площини (рис. 10.2).

10.2. Сила тиску важкої рідини на поверхні твердого тіла.

Визначення центра тиску

Розглянемо дві теореми, що мають практичне застосування при визначенні сил тиску рідини на поверхні твердих тіл.

Теорема 1. *Якщо на будь-яку поверхню довільної форми діє рівномірно розподілений тиск, то незалежно від форми поверхні проекція рівнодійної сил тиску на будь-яку вісь дорівнює добутку величини тиску і площі проекції поверхні на площину, перпендикулярну до цієї осі.*

¹ Блез Паскаль (1623—1662) — французький математик, фізик та філософ.

Нехай маємо поверхню S (рис. 10.3). На поверхню діє рівномірно розподілений тиск. Щільність розподілу тиску характеризується вектором \vec{p} . Визначимо проекцію на вісь x рівнодійної сил тиску. Ця проекція

$$p_x = \int_{(S)} p \cos \varphi dS,$$

де φ — кут між нормаллю до поверхні dS та віссю x .

Площа проекції елемента dS на площину x , що є перпендикулярною до осі x ,

$$dS' = dS \cos \varphi.$$

Отже,

$$p_x = p \int_{(S)} dS' = pS'. \quad (10.9)$$

Теорема 2. Якщо на будь-яку поверхню діє тиск рідини (рис. 10.4), то вертикальна складова сил тиску дорівнює вазі рідини в об'ємі, що розташований над поверхнею.

Вертикальна складова сил тиску на поверхню dS згідно з теоремою 1 дорівнюватиме добутку тиску, що діє на цю поверхню, і проекції площі її поверхні на рівень рідини, тобто pdS' . Оскільки $p = \gamma z$, де γ — питома вага рідини, то вертикальна сила, що діє на поверхню dS , буде $dp = \gamma z dS'$.

Проте $z dS'$ — це об'єм елементарної призми, що розташована над поверхнею dS . Сумарна шукана сила

$$p = \int_{(V)} \gamma dV = \gamma v, \quad (10.10)$$

тобто дорівнює вазі рідини в об'ємі v , що розташований над поверхнею S .

З теореми 2 випливає, що сила тиску рідини на горизонтальні дніща резервуарів, що утримують цю рідину, не залежить від форми резервуарів. Так, в усіх трьох випадках, зображених на рис. 10.5, сила тиску, що діє на дніще кожного з резервуарів з боку рідини, дорівнюватиме вазі рідини в об'ємі вище розташованого циліндра $ABCD$.

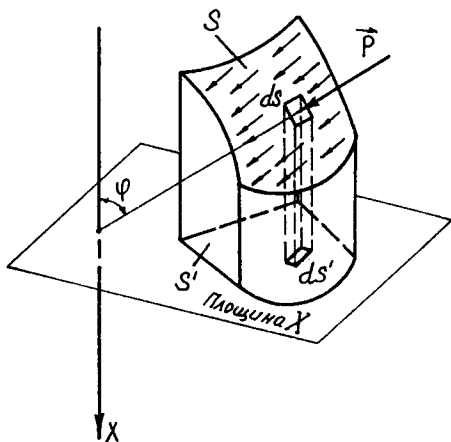


Рис. 10.3

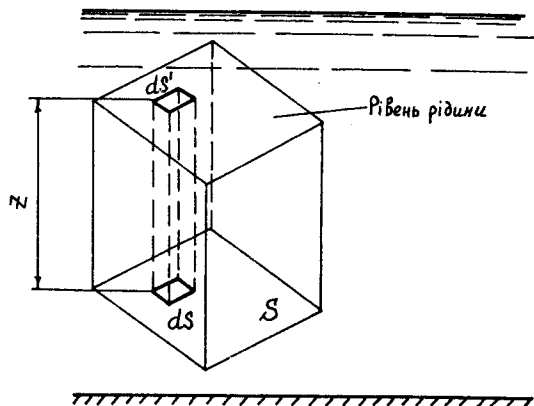


Рис. 10.4

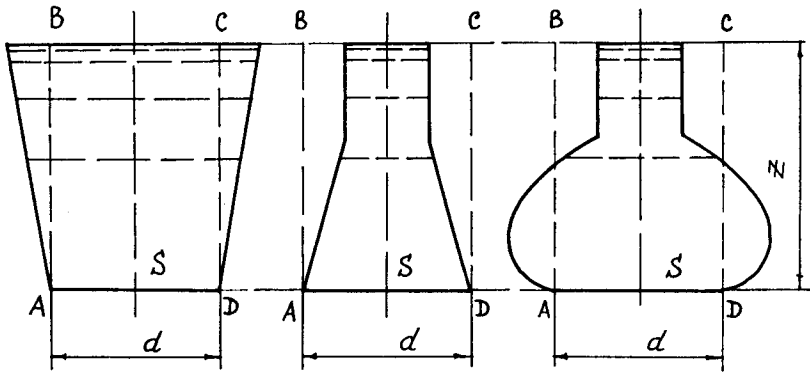


Рис. 10.5

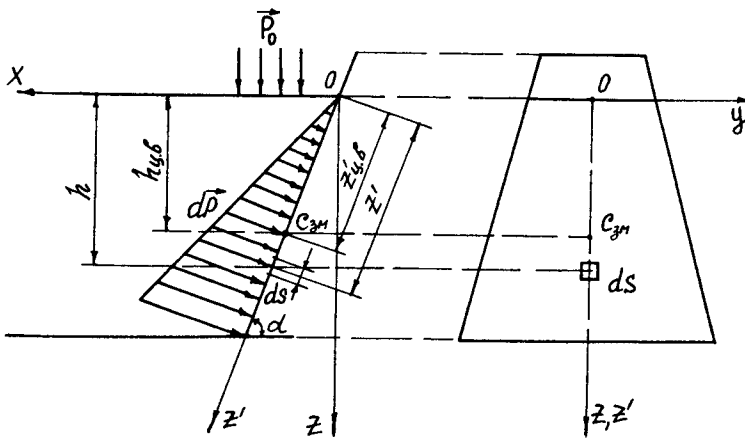


Рис. 10.6

Іншу картину будемо спостерігати при дії рідини на стінки резервуарів, що утримують цю рідину.

Розглянемо плоску симетричну відносно осі z' поверхню, що утворює деякий кут α з горизонтом і утримує рідину, що перебуває у стані спокою (рис. 10.6).

Виділимо на поверхні нескінченно малий елемент, площа якого dS , та позначимо глибину занурювання елемента в рідину h (рис. 10.6).

Сила тиску рідини на елемент ds

$$dp = p dS = (p_0 + \gamma h) dS,$$

де $(p_0 + \gamma h)$ — гідростатичний тиск у центрі ваги елемента поверхні dS [див. формулу (10.8)].

Розглядаючи площу поверхні, що має контакт з рідиною (ця площа називається *змоченою площею* і позначається $S_{зм}$), як неперервне розподілення площі елементів dS , на які діють елементарні сили $d\vec{p}$, що утворюють систему паралельних сил, знайдемо рівнодійну цих сил (див. параграф 1.7), тобто силу тиску рідини на поверхню:

$$p = \int_{(S_{зм})} dp = \int_{(S_{зм})} p_0 dS + \int_{(S_{зм})} \gamma h dS = p_0 S_{зм} + \gamma \int_{(S_{зм})} h dS. \quad (10.11)$$

Розглянемо інтеграл $\gamma \int_{(S_{зм})} h dS$. З рис. 10.6 випливає, що $h = z' \sin \alpha$. Підставляючи це значення h в інтеграл, здобудемо

$$\gamma \sin \alpha \int_{(S_{зм})} z' dS.$$

Інтеграл $\int_{(S_{зм})} z' dS$ (див. параграф 6.5) є статичним моментом змоченої площі поверхні відносно осі y (рис. 10.6). Чисельно він дорівнює добутку $z'_{ц.в} S_{зм}$, де $z'_{ц.в}$ — координата центра ваги змоченої поверхні. Тому

$$\gamma \sin \alpha \int_{(S_{зм})} z' dS = \gamma z'_{ц.в} \sin \alpha \cdot S_{зм}.$$

Оскільки $z'_{ц.в} \sin \alpha = h_{ц.в}$, де $h_{ц.в}$ — глибина занурювання центра ваги змоченої площі поверхні, то остаточно маємо

$$\gamma \int_{(S_{зм})} h dS = \gamma h_{ц.в} S_{зм}.$$

Підставляючи це значення у формулу (10.11), здобудемо вираз для визначення сили тиску рідини на поверхню:

$$p = (p_0 + \gamma h_{ц.в}) S_{зм}. \quad (10.12)$$

Якщо атмосферний тиск p_0 , що діє на вільну поверхню рідини, діє і на зовнішній бік поверхні, то формула (10.12) набирає вигляду

$$p = \gamma h_{ц.в} S_{зм}. \quad (10.13)$$

З формул (10.12) та (10.13) випливає, що сила тиску важкої нестисливої рідини на плоску поверхню дорівнює добутку площі змоченої поверхні на величину гідростатичного тиску у центрі ваги цієї площі.

Визначимо відстань від вільного рівня рідини вздовж похилої поверхні до точки прикладання сили тиску \bar{p} . Ця точка називається *центром тиску рідини на поверхню* і розташована на осі симетрії площі змоченої поверхні, що має напрям у глибину рідини (вісь z' на рис. 10.6).

Нехай пряма AB — слід змоченої площі поверхні в системі координат $Oxuz$ (рис. 10.7). Поверхня сприймає тиск рідини, рівнодійна якого p визначається за формулою (10.13). Лінія дії рівнодійної сили \bar{p} проходить через центр тиску $C_{ц.т}$.

Позначимо:

$z'_{ц.в}$ — відстань від вільного рівня рідини (осі y) до центра ваги змоченої площі поверхні;

λ — відстань від центра ваги змоченої площі поверхні до центра ваги елемента dS ;

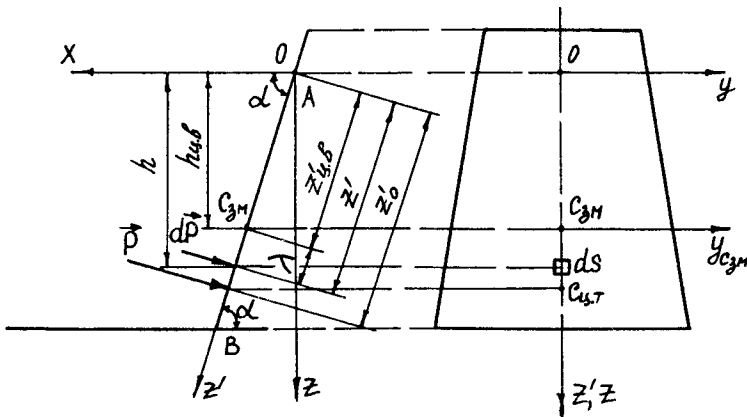


Рис. 10.7

z' — відстань від вільного рівня рідини (осі y) до центра ваги елемента площі поверхні dS ;

z'_0 — відстань від вільного рівня рідини (осі y) до центра тиску;

$h_{ц,в}$, h — відповідно глибина занурювання центра ваги змоченої площі поверхні і центра ваги елемента площі поверхні dS ;

$C_{зм}$ — центр ваги змоченої площі поверхні.

Для визначення z'_0 застосуємо теорему про момент рівнодійної системи сил відносно осі (див. параграф 1.5). Визначаємо відповідні моменти відносно осі y :

$$Pz'_0 = \int_{(S_{зм})} z' dp. \quad (10.14)$$

На підставі формули (10.13) та з урахуванням того, що $dp = \gamma h dS$, рівність (10.14) набирає вигляду

$$\gamma h_{зм} S_{зм} z'_0 = \gamma \int_{(S_{зм})} h z' dS.$$

Оскільки $z' = z'_{ц,в} + \lambda$, то

$$\gamma h_{зм} S_{зм} z'_0 = \gamma \int_{(S_{зм})} h (z'_{ц,в} + \lambda) dS.$$

Враховуючи, що $h = z' \sin \alpha = (z'_{ц,в} + \lambda) \sin \alpha$, а $h_{ц,в} = z'_{ц,в} \sin \alpha$, маємо

$$z'_{ц,в} S_{зм} z'_0 = \int_{(S_{зм})} (z'_{ц,в} + \lambda)^2 dS = (z'_{ц,в})^2 \int_{(S_{зм})} dS + 2z'_{ц,в} \int_{(S_{зм})} \lambda dS + \int_{(S_{зм})} \lambda^2 dS. \quad (10.15)$$

Спростуємо рівняння (10.15). Інтеграл $\int_{(S_{зм})} dS$ дорівнює $S_{зм}$; інтеграл $\int_{(S_{зм})} \lambda dS$

дорівнює 0, оскільки він є статичним моментом змоченої площі поверхні відносно

осі, що проходить через її центр ваги (вісь $y_{C_{зм}}$ на рис. 10.7; див. параграф 6.5).

Інтеграл $\int_{(S_{зм})} \lambda^2 dS$ дорівнює $J_{y_{c_{зм}}}$ і є моментом інерції змоченої площі поверхні

відносно осі $y_{c_{зм}}$, що проходить через центр ваги змоченої поверхні.

Тоді рівняння (10.15) набирає вигляду

$$z'_{ц.в} S_{зм} z'_0 = (z'_{ц.в})^2 S_{зм} + J_{y_{c_{зм}}}.$$

Звідси

$$z'_0 = z'_{ц.в} + \frac{J_{y_{c_{зм}}}}{z'_{ц.в} S_{зм}}. \quad (10.16)$$

З рівняння (10.16) випливає, що точка прикладання рівнодійної сил тиску рідини на поверхню розташована нижче рівня центра ваги змоченої площі поверхні.

Перетворимо вираз (10.16). На підставі формули (6.23) (див. параграф 6.5) маємо

$$J_{y_{c_{зм}}} = J_y - (z'_{ц.в})^2 S_{зм}.$$

Тоді формула (10.16) набирає вигляду

$$z'_0 = \frac{J_y}{z'_{ц.в} S_{зм}}. \quad (10.17)$$

З формули (10.17) випливає, що відстань від вільної поверхні рідини до її центра тиску на плоску похилу до горизонту поверхню, що утримує рідину, відлічується вздовж осі симетрії поверхні, що має напрям у глибину рідини, і дорівнює відношенню моменту інерції змоченої площі поверхні до її статичного моменту, визначених відносно осі, що утворюється від перетину змоченої поверхні з відповідним їй рівнем рідини.

Подамо вирази для визначення координат центра тиску рідини на вертикальні стінки, що широко поширені в інженерній практиці. Для цього розглянемо загальний випадок, тобто дію рідини на трапецеїдальну стінку, що має розміри B , b , L і занурена під рівень рідини на глибину a (рис. 10.8). Стінка утримує рідину, що перебуває у стані спокою.

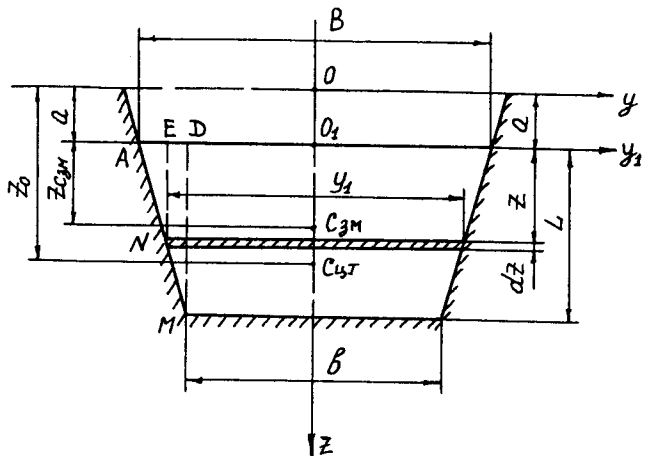


Рис. 10.8

Координата центра тиску рідини z_0 у системі координат Oyz на стінку, що розглядається, визначається за формулою (10.17)

$$z_0 = \frac{J_y}{z_{ц.в} S_{зм}}.$$

Визначаємо момент інерції змоченої площі стінки відносно осі y . Для цього виділимо елемент площі dS , що дорівнює добутку $dz y_1$. На підставі формули (6.18) (див. параграф 6.5) маємо

$$J_y = \int_{(S_{зм})} y_1 dz (a+z)^2. \quad (10.18)$$

Для інтегрування рівняння (10.18) виразимо y_1 функцією z . З рис. 10.8 випливає:

$$AE = \frac{B-y_1}{2}; \quad AD = \frac{B-b}{2}; \quad \frac{AE}{z} = \frac{AD}{L}.$$

Звідси

$$y_1 = B - (B-b) \frac{z}{L}.$$

Підставляємо значення y_1 у формулу (10.18):

$$J_y = \int_{(S_{зм})} \left[B - (B-b) \frac{z}{L} \right] (a+z)^2 dz. \quad (10.19)$$

Інтегруючи вираз (10.19) у межах від 0 до L , здобудемо

$$\begin{aligned} J_y &= \int_0^L \left[B - (B-b) \frac{z}{L} \right] (a+z)^2 dz = \int_0^L B (a+z)^2 dz - \int_0^L \left(\frac{B-b}{L} \right) z (a+z)^2 dz = \\ &= \frac{BL}{3} (3a^2 + 3aL + L^2) - \frac{L(B-b)}{12} (6a^2 + 8aL + 3L^2). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Оскільки момент інерції площі змоченої поверхні визначений відносно осі y , то для обчислення z_0 необхідно координату центра ваги трапеції визначити також відносно осі y :

$$z_{ц.в} = \frac{B+2b}{B+b} \cdot \frac{L}{3} + a, \quad (10.21)$$

$\frac{B+2b}{B+b} \cdot \frac{L}{3}$ — координата $z_{ц.в}$ центра ваги трапеції в системі координат $O_1 y_1 z$.

Площа змоченої поверхні (площа трапеції) визначається за формулою

$$S_{\text{зм}} = \frac{B+b}{2} L. \quad (10.22)$$

Підставляючи вирази (10.20), (10.21) та (10.22) у формулу (10.17), остаточно здобудемо

$$z_0 = \frac{J_y}{z_{\text{ц.в.}} S_{\text{зм}}} = \frac{BL(3a^2 + 3aL + L^2) - \frac{L(B-b)}{12}(6a^2 + 8aL + 3L^2)}{(B+b) \frac{L}{2} \left(\frac{B+2b}{B+b} \cdot \frac{L}{3} + a \right)}. \quad (10.23)$$

На підставі формули (10.23) можна визначити координати центра тиску рідини на стінки, що мають практичне застосування у промисловості.

1. Трапецеїдальна вертикальна стінка, що утримує рідину, рівень якої збігається з висотою стінки (рис. 10.9).

Взявши в рівності (10.23) $a = 0$, дістанемо

$$z_0 = \frac{L}{2} \cdot \frac{B+3b}{B+2b}. \quad (10.24)$$

2. Прямокутна вертикальна стінка, що утримує рідину, рівень якої збігається з висотою стінки (рис. 10.10).

Беручи в рівності (10.23) $B = b$ та $a = 0$, здобудемо

$$z_0 = \frac{2}{3} L. \quad (10.25)$$

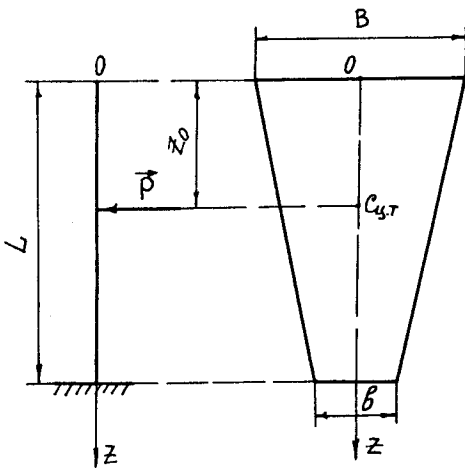


Рис. 10.9

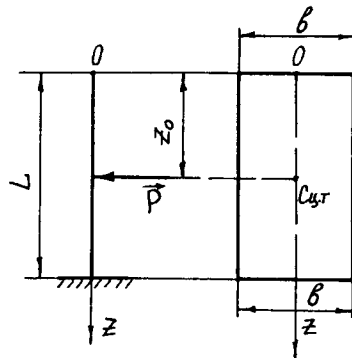


Рис. 10.10

3. Прямокутна стінка, що утримує рідину і яка занурена в рідину на глибину a (рис. 10.11).

Беручи в рівності (10.23) $B = b$, здобудемо

$$z_0 = a + \frac{L}{3} \cdot \frac{3a + 2L}{2a + L}. \quad (10.26)$$

4. Трикутна стінка, що утримує рідину, рівень якої збігається з висотою стінки (рис. 10.12).

Беручи в рівності (10.23) $b = 0$, $a = 0$, дістанемо

$$z_0 = \frac{L}{2}. \quad (10.27)$$

5. Трикутна стінка, що утримує рідину і яка занурена в рідину на глибину a (рис. 10.13).

Беручи в рівності (10.23) $b = 0$, $a = 0$, здобудемо

$$z_0 = a + \frac{L}{2} \cdot \frac{L + 2a}{L + 3a}. \quad (10.28)$$

Крім стінок, що були розглянуті, подамо вирази для визначення координат центра тиску рідини на круглі занурені стінки та напівкруглі стінки у випадку, коли рівень рідини збігається з висотою стінки.

1. Кругла стінка, що утримує рідину і яка занурена в рідину на глибину a (рис. 10.14).

Координату центра тиску визначаємо за формулою (10.16):

$$z_0 = z_{ц.в} + \frac{J_{y_{ц.в}}}{z_{ц.в} S_{зм}},$$

де $z_{ц.в} = (a + r)$; $S_{зм} = \pi r^2$; $J_{y_{ц.в}}$ — момент інерції круга відносно центральної осі $y_{ц.в}$ (рис. 10.14).

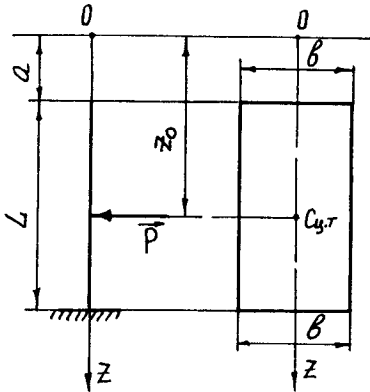


Рис. 10.11

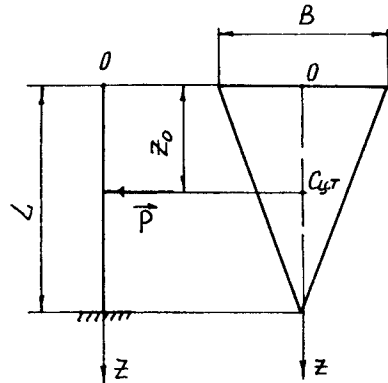


Рис. 10.12

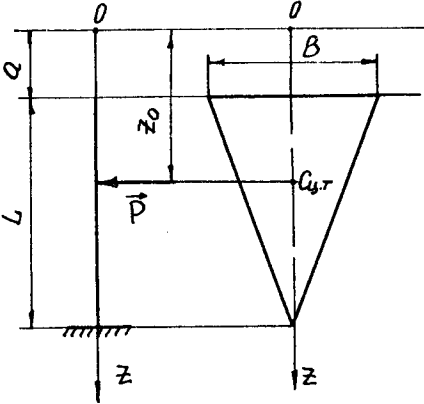


Рис. 10.13

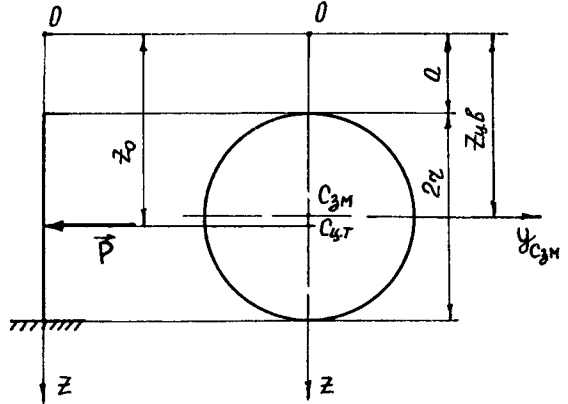


Рис. 10.14

Визначимо $J_{y_{ц.г.т}}$ за співвідношенням (6.20):

$$J_{y_{ц.г.т}} = \frac{J_p}{2}, \quad (10.29)$$

де J_p — полярний момент інерції площі круга.

Полярний момент інерції площі круга

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}, \quad (10.30)$$

тоді

$$J_{y_{ц.г.т}} = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4}. \quad (10.31)$$

Підставляючи формулу (10.31) та значення $z_{ц.в.}$, $S_{з.г.т}$ у вираз (10.16), остаточно знайдемо

$$z_0 = z_{ц.в.} + \frac{J_{y_{ц.г.т}}}{z_{ц.в.} S_{з.г.т}} = (a + r) + \frac{\pi r^4}{4\pi r^2 (a + r)} = (a + r) + \frac{r^2}{4(a + r)}. \quad (10.32)$$

2. Напівкругла стінка, що утримує рідину, рівень якої збігається з висотою стінки (рис. 10.15).

Координату центра тиску визначаємо за формулою (10.17):

$$z_0 = \frac{J_y}{z_{ц.в.} S_{з.г.т}},$$

де $z_{ц.в.} = \frac{4r}{3\pi}$ — координата центра ваги півкруга у системі координат Oyz ;

$S_{з.г.т} = \frac{\pi r^2}{2}$ — площа півкруга.

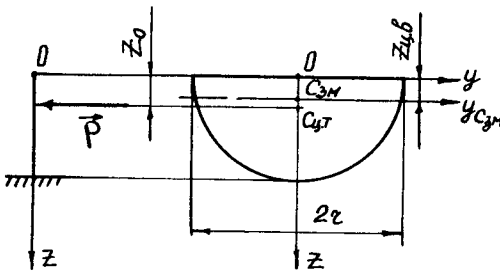


Рис. 10.15

Момент інерції площі півкруга відносно осі y

$$J_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r^4}{2} \right). \quad (10.33)$$

Підставляючи значення J_y , $z_{ц.в}$ та $S_{зм}$ у формулу (10.17), здобудемо

$$z_0 = \frac{J_y}{z_{ц.в} S_{зм}} = \frac{\pi r^4 \cdot 2 \cdot 3\pi}{8\pi r^2 \cdot 4r} = \frac{3}{16} \pi r. \quad (10.34)$$

10.3. Приклади розв'язання задач статки з урахуванням сил тиску важкої нестисливої рідини на тверді тіла

Приклад 10.1. Тиск у паровому просторі вакуум-апарата цукрового заво-

ду $p_1 = 9,123 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$. Питома вага цукрового розчину в апараті $\gamma = 13 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$.

Висота шару розчину в апараті $H = 3,2$ м. Діаметр зливного отвору апарата $d = 1$ м (рис. 10.16). Визначити силу тиску P на кришку зливного отвору апарата.

Розв'язання. Гідростатичний тиск на кришку зливного отвору з внутрішньої сторони

$$p_o = p_1 + \gamma H = 9,123 + 13 \cdot 3,2 = 50,72 \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \right).$$

Гідростатичний тиск на кришку зливного отвору із зовнішньої сторони дорівнює атмосферному тиску:

$$p_s = p_a = 98,1 \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \right).$$

Тиск, що діє на кришку, дорівнює різниці тиску зовнішньої та внутрішньої сторони кришки:

$$P_k = p_s - p_o = 98,1 - 50,72 = 47,38 \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \right).$$

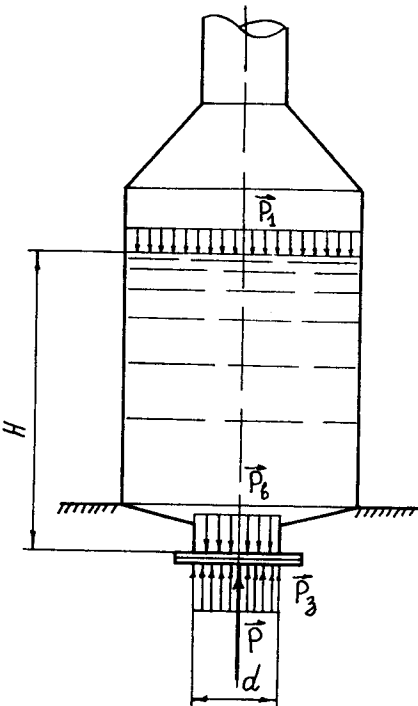


Рис. 10.16

Сила тиску на кришку зливного отвору

$$P = p_k S = p_k \frac{\pi d^2}{4} = \frac{47,38 \cdot 3,14 \cdot 1}{4} = 37,2 \text{ (кН)},$$

де S — площа зливного отвору.

Приклад 10.2. Побудувати епюри тиску на бічні стінки та днище дифузійного апарата. Питома вага дифузійного соку зі стружкою $\gamma = 11 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$. Висота шару дифузійного соку зі стружкою $H = 10$ м.

Розв'язання. Тиск на бічній стінці визначається за формулою

$$p = p_0 + \gamma z.$$

Атмосферний тиск p_0 усередині апарата зрівноважується таким самим тиском зовні апарата. Отже, гідростатичний тиск усередині апарата змінюється за лінійним законом, тобто $p = \gamma z$. При $z = 0$ $p = 0$; при $z = H$

$p = \gamma H = 11 \cdot 10 = 110 \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \right)$. Епюри тиску зображено на рис. 10.17.

Приклад 10.3. Нижня частина вимірника цукрового сиропу є зрізаною пірамідою, що має бічні грані у вигляді трапеції. Розмір граней: $B = 1,83$ м; $b = 0,45$ м; $H = 1,2$ м (рис. 10.18). Бічні грані нахилені до горизонту на кут $\alpha = 60^\circ$. Питома

вага сиропу $\gamma = 11 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$. Визначити силу тиску цукрового сиропу на бічні грані вимірника, якщо шар сиропу над зрізаною частиною вимірника $h = 3$ м.

Розв'язання. Силу тиску сиропу на бічні грані вимірника визначаємо за формулою (10.12)

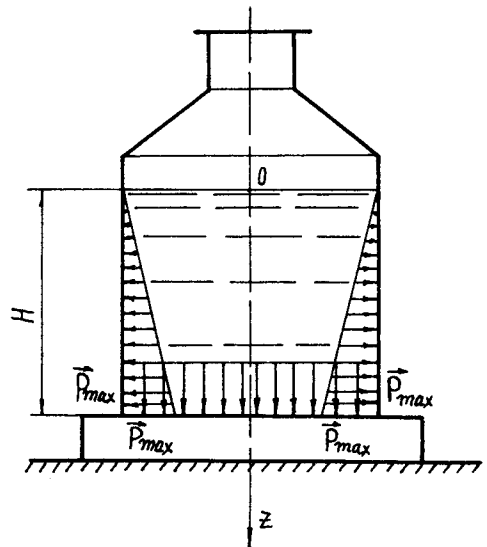


Рис. 10.17

$$p = (p_0 + \gamma h_{ц.в}) S_{зм} = (\gamma h + \gamma h_{ц.в}) S_{зм}.$$

Глибина занурювання центра ваги змоченої площі

$$h_{ц.в} = z_{ц.в} \sin \alpha = 0,478 \cdot 0,866 = 0,413 \text{ (м)},$$

де $z_{ц.в}$ — координата центра ваги трапеції:

$$z_{ц.в} = \frac{B + 2b}{B + b} \cdot \frac{H}{3} = \frac{(1,83 + 2 \cdot 0,45) \cdot 0,4}{(1,83 + 0,45)} = 0,478 \text{ (м)}.$$

Площа змоченої поверхні

$$S_{зм} = \frac{B+b}{2} H = \frac{(1,83 + 0,45)}{2} 1,2 = 1,368 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Шукана сила тиску

$$P = (\gamma h + \gamma h_{ц.в}) S_{зм} = (11 \cdot 3 + 11 \cdot 0,413) 1,368 = 51,36 \text{ (кН)}.$$

Приклад 10.4. Визначити величину та точку прикладання сили тиску цукрового сиропу на вертикальну бічну стінку резервуара, що має форму рівнобедреного трикутника (рис. 10.19), якщо $B = 2,5$ м, $H = 2,0$ м. Рівень сиропу в резервуарі $h = 1,8$ м, питома вага сиропу $\gamma = 11 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$.

в резервуарі $h = 1,8$ м, питома вага сиропу $\gamma = 11 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$.

Розв'язання. Сила тиску сиропу на стінку резервуара визначається за формулою (10.13)

$$P = \gamma h_{ц.в} S_{зм} = \gamma z_{ц.в} S_{зм} = 11 \cdot 0,6 \cdot 2,025 = 13,36 \text{ (кН)},$$

де $h_{ц.в} = z_{ц.в} = \frac{h}{3} = \frac{1,8}{3} = 0,6$ (м); $S_{зм} = \frac{1}{2} bh = \frac{Bh^2}{2H} = \frac{2,5 \cdot 1,8^2}{4} = 2,025$ (м²), ос-

скільки $b = \frac{Bh}{H}$.

Глибина занурювання точки прикладання сили тиску визначається за формулою (10.16)

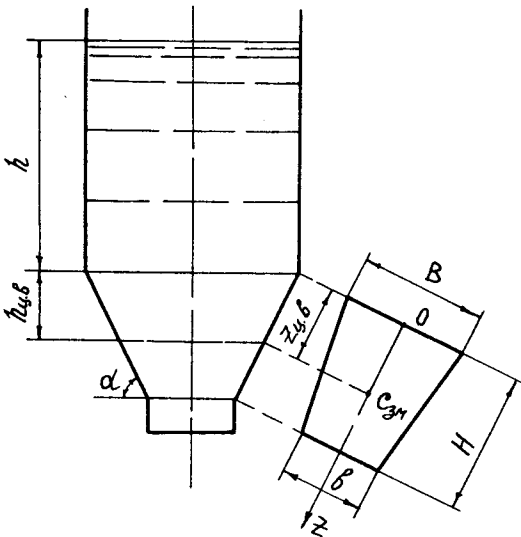


Рис. 10.18

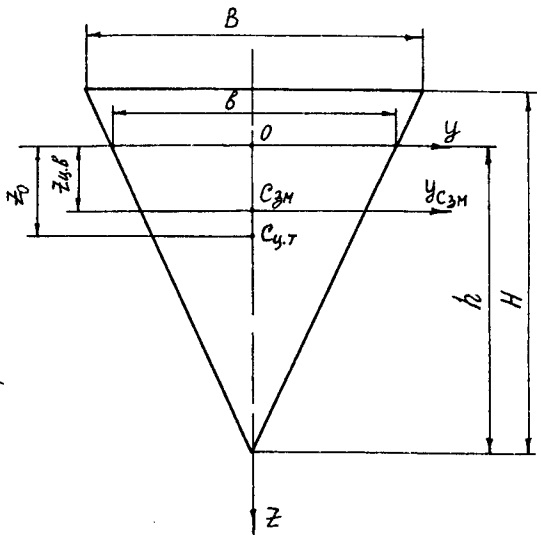


Рис. 10.19

$$z_0 = z_{ц.в} + \frac{J_{у_{зм}}}{z_{ц.в} S_{зм}} = 0,6 + \frac{0,364}{0,6 \cdot 2,025} = 0,9 \text{ (м)},$$

$$\text{де } J_{у_{зм}} = \frac{bh^3}{36} = \frac{Bh^4}{36H} = \frac{2,5 \cdot 1,8^4}{36 \cdot 2} = 0,364 \text{ (м}^4\text{)}.$$

Приклад 10.5. Визначити величину та точку прикладання сили тиску цукрового сиропу на круглу засувку трубопроводу подачі сиропу у випарник (рис. 10.20). Діаметр трубопроводу $d = 0,3$ м. Центр ваги засувки розташований на глибині $H = 3,5$ м. Питома вага сиропу

$$\gamma = 11 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}.$$

Розв'язання. Сила тиску сиропу на засувку трубопроводу визначається за формулою (10.13)

$$P = \gamma h_{ц.в} S_{зм} = 11 \cdot 3,5 \cdot 0,0706 = 2,72 \text{ (кН)},$$

$$\text{де } h_{ц.в} = H = 3,5 \text{ (м)}; S_{зм} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,3^2}{4} = 0,0706 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відстань від вільного рівня сиропу до центра тиску вздовж осі z визначається за формулою (10.16)

$$z_0 = z_{ц.в} + \frac{J_{у_{зм}}}{z_{ц.в} S_{зм}} = 4,04 + \frac{3,97 \cdot 10^{-4}}{4,04 \cdot 0,0706} = 4,0413 \text{ (м)},$$

де

$$z_{ц.в} = \frac{H}{\cos 30^\circ} = \frac{3,5}{0,866} = 4,04 \text{ (м)}; J_{у_{зм}} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 0,3^4}{64} = 3,97 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^4\text{)}.$$

Приклад 10.6. Прямокутний поворотний затвор, що має висоту $l = 1,5$ м, перекидає вихід води з резервуара (рис. 10.21). Визначити, на якій відстані z_1 від дна резервуара слід розмістити вісь затвора, щоб при відкриванні затвора треба було подолати тільки моменти сил тertia в підшипниках осі затвора. Рівень води в резервуарі $h = 4,5$ м.

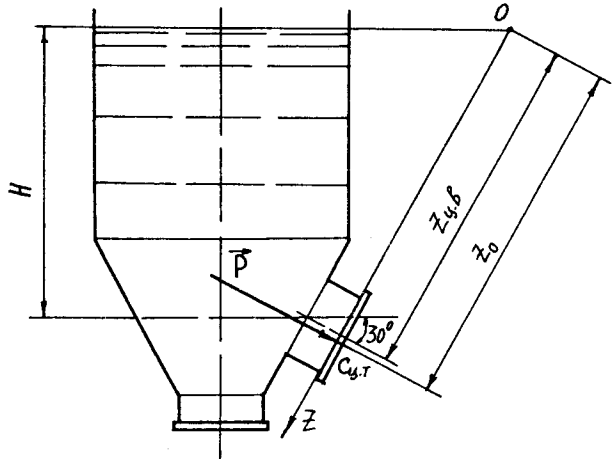


Рис. 10.20

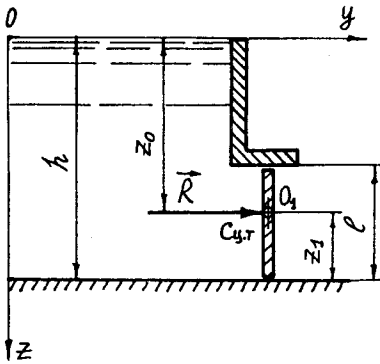


Рис. 10.21

$$z_1 = h - z_0 = h - \left[(h - l) + \frac{l}{3} \cdot \frac{3(h - l) + 2l}{2(h - l) + l} \right] = \frac{l}{3} \left(3 - \frac{3h - l}{2h - l} \right) = \frac{l(3h - 2l)}{3(2h - l)} = \frac{1,5(3 \cdot 4,5 - 2 \cdot 1,5)}{3(2 \cdot 4,5 - 1,5)} = 0,7 \text{ (м)}.$$

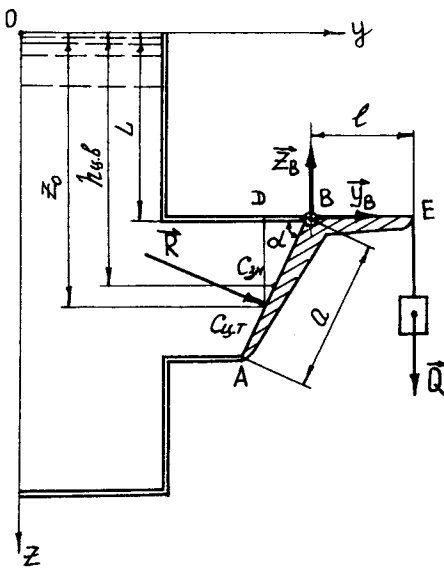


Рис. 10.22

Розв'язання. Визначимо центр тиску води на затвор. Маємо випадок прямокутної стінки, яка занурена на глибину $a = h - l$. Для цього випадку координата z_0 центра тиску води на стінку визначається за формулою (10.26)

$$z_0 = a + \frac{l}{3} \cdot \frac{3a + 2l}{2a + l} = (h - l) + \frac{l}{3} \cdot \frac{3(h - l) + 2l}{2(h - l) + l}.$$

Якщо рівнодійна сил тиску буде прикладена до осі затвора, як це зображено на рис. 10.21, то при його відкриванні треба буде подолати тільки моменти сил тертя в підшипниках осі. Тому

Приклад 10.7. Плоский прямокутний кут AB , який затуляє отвір відкритого резервуара з водою, може обертатися навколо осі B (рис. 10.22). До щита прикріпленій важіль BE з вантажем Q , який утримує щит у закритому положенні. Нехтуючи вагою щита і тертям, визначити величину вантажу Q , за якої щит буде в закритому положенні, якщо $AB = a$, $BE = l$ і ширина щита дорівнює b .

Розв'язання. Визначимо рівнодійну сил тиску води на щит AB . На підставі формули (10.13) маємо

$$R = \gamma h_{\text{ц.в.}} S_{\text{зм}} = \frac{\gamma(2L + a \sin \alpha)}{2} ab,$$

$$\text{де } h_{\text{ц.в.}} = L + \frac{a}{2} \sin \alpha; S_{\text{зм}} = ab.$$

Визначимо координату z_0 центра тиску води на щит. На підставі формули (10.26) маємо

$$z_0 = L + \frac{a \sin \alpha}{3} \cdot \frac{3L + 2a \sin \alpha}{2L + a \sin \alpha}.$$

Визначимо відстань DC :

$$DC = z_0 - L = \frac{a \sin \alpha}{3} \cdot \frac{3L + 2a \sin \alpha}{2L + a \sin \alpha}.$$

Розглянемо рівновагу важеля ABE . На важіль діють сили \vec{R} (рівнодійна сил тиску на щит), \vec{Z}_B , \vec{Y}_B (реакції опори B важеля) та сила \vec{Q} (невідомою силою). Сили \vec{R} , \vec{Z}_B , \vec{Y}_B та \vec{Q} утворюють довільну плоску систему сил. Складемо рівняння рівноваги сил, що діють на важіль:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad Y_B + R \sin \alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \quad Z_B - Q - R \cos \alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) &= 0; \quad R \cdot BC - Q \cdot BE = 0. \end{aligned}$$

З останнього рівняння знайдемо величину Q :

$$Q = \frac{R \cdot BC}{BE} = R \frac{DC}{l \sin \alpha} = \frac{\gamma a^2 b}{6l} (3L + 2a \sin \alpha).$$

Приклад 10.8. Клапанний затвор AB , що має прямокутну плоску поверхню $l \times b = 2,5 \times 6$ м, створює напір води $h = 2$ м (рис. 10.23). Нехтуючи вагою затвора і тертям у підшипнику A , визначити реакції підшипника A та реакцію троса, який утримує затвор у положенні, зображеному на рис. 10.23.

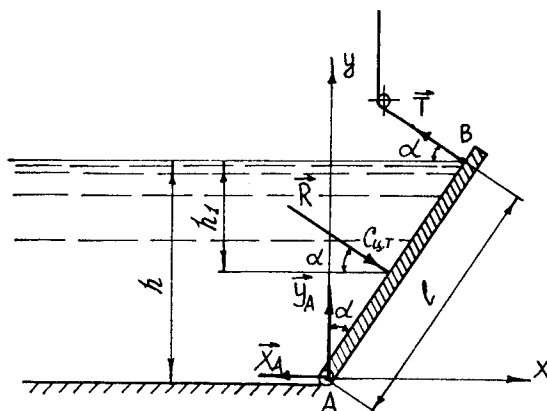


Рис. 10.23

Розв'язання. Розглянемо рівновагу затвора. Звільняємо затвор від в'язей. На затвор діють сили \vec{R} (рівнодійна сил тиску води на затвор), \vec{X}_A , \vec{Y}_A (реакції підшипника A) та \vec{T} (реакція троса). Сили \vec{R} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A та \vec{T} утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо декартову систему координат з початком у точці A та складемо рівняння рівноваги сил, що діють на затвор:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -X_A + R \cos \alpha - T \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - R \sin \alpha + T \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; T \cdot AB - R \cdot AC = 0. \quad (3)$$

Визначаємо силу тиску води на затвор. На підставі формули (10.13) маємо

$$R = \gamma h_{\text{ц.в.}} S_{\text{зм}} = 10 \cdot 1 \cdot 15 = 150 \text{ (кН)},$$

де $\gamma = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$; $h_{\text{ц.в.}} = \frac{h}{2} = 1 \text{ (м)}$; $S_{\text{зм}} = 2,5 \cdot 6 = 15 \text{ (м}^2\text{)}$.

Визначаємо відстань від вільної поверхні води до центра тиску. На підставі формули (10.24) маємо

$$z_0 = h_1 = \frac{2}{3} h = \frac{2 \cdot 2}{3} = 1,33 \text{ (м)}.$$

З рівняння (3) визначаємо T :

$$T = \frac{R \cdot AC}{AB} = \frac{150 \cdot 0,837}{2,5} = 50,25 \text{ (кН)},$$

де $AB = l = 2,5 \text{ (м)}$; $AC = \frac{h - h_1}{\cos \alpha} = \frac{2 - 1,33}{0,8} = 0,837 \text{ (м)}$; $\cos \alpha = \frac{h}{l} = \frac{2}{2,5} = 0,8$.

З рівняння (2) визначаємо Y_A :

$$Y_A = R \sin \alpha - T \sin \alpha = 150 \cdot 0,6 - 50,25 \cdot 0,6 = 90 - 30,15 = 59,85 \text{ (кН)},$$

де $\sin \alpha = 0,6$.

З рівняння (1) визначаємо X_A :

$$X_A = R \cos \alpha - T \cos \alpha = 150 \cdot 0,8 - 50,25 \cdot 0,8 = 120 - 40,2 = 79,8 \text{ (кН)}.$$

Реакції \vec{X}_A , \vec{Y}_A та \vec{T} напрямлені так, як це зображено на рис. 10.23.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке ідеальна рідина?
2. Чи залежить гідростатичний тиск в ідеальній рідині від орієнтації поверхні, на яку він діє?
3. Який вигляд мають диференціальні рівняння рівноваги ідеальної рідини?
4. Як визначається гідростатичний тиск у певній точці ідеальної рідини?
5. Що таке поверхні рівня?

6. Як формулюється теорема про проекцію рівнодійної сил тиску на довільну вісь?

7. Як формулюється теорема про вертикальну складову сил тиску рідини?

8. Що таке центр тиску рідини на поверхню?

9. Як визначається відстань від вільної поверхні до її центра тиску на вертикальні стінки:

- трапецеїдальну; рівень рідини збігається з висотою стінки;
- прямокутну; рівень рідини збігається з висотою стінки;
- прямокутну, занурену в рідину на глибину a ;
- трикутну; рівень рідини збігається з висотою стінки;
- трикутну, занурену в рідину на глибину a ;
- круглу, занурену в рідину на глибину a ;
- напівкруглу; рівень рідини збігається з висотою стінки.

Розділ II. КІНЕМАТИКА

Глава 11

КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

11.1. Предмет кінематики. Основне завдання кінематики

Кінематика — це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об'єктів безвідносно до причин, які його викликають.

З визначення кінематики випливає, що на відміну від статички в кінематиці залишається осторонь силова взаємодія між матеріальними тілами і рух цих тіл розглядається з відривом від того, які сили створюють та підтримують цей рух. У кінематиці повністю відсутні такі фізичні поняття, як сила та маса, а вивчаються лише загальні геометричні характеристики руху, наприклад траєкторія, швидкість та прискорення, які однаковою мірою належать до руху будь-яких об'єктів — молекули або небесного тіла, зображення на екрані монітора та ін.

Механічний рух матеріальних об'єктів відбувається у просторі і в часі. В теоретичній механіці простір розглядається як абсолютний, евклідовий, тривимірний, однорідний та ізотропний, а час — як абсолютний арифметизований¹. На підставі таких уявлень про простір і час впроваджується поняття *системи відліку*, тобто сукупності, що складається з тіл відліку (тіл, відносно яких вивчається рух інших тіл) і пов'язаних з цими тілами системи координатних осей та годинника, що призначений для вимірювання часу. Оскільки час розглядається як абсолютний, то, визначаючи систему відліку, можна обмежитися визначенням тільки тіл відліку, або системи координатних осей, пов'язаних з цими тілами.

¹ Докладні відомості про простір і час у теоретичній механіці викладено в розділах “Статика” та “Динаміка”.

Системи відліку можуть бути або нерухомими відносно деякої однієї системи, яка приймається за абсолютну (така система відліку називається інерціальною¹), або рухатися довільно відносно неї.

Отже, при розв'язанні задач кінематики рух об'єктів дослідження визначається відносно тієї чи іншої системи відліку. При цьому всі лінійні величини, наприклад координати об'єкта, довжина пройденого ним шляху та інші, виражаються в метрах (м), як це прийнято в системі СІ. Час як скалярна неперервна змінна величина розглядається як незалежна змінна (аргумент). Усі інші змінні величини (координати, швидкості, прискорення тощо) розглядаються як функції часу. Відлік часу починається від деякого початкового моменту ($t = 0$), вибір якого довільний. За одиницю часу беруть секунду (с), як це прийнято в системі СІ.

Кінематично визначити (задати) рух даного об'єкта означає встановити (задати) його положення відносно системи відліку в будь-який момент часу. Тому одним із завдань кінематики є встановлення математичних способів задання руху об'єктів.

Основне завдання кінематики полягає в тому, щоб на підставі математичних способів задання руху об'єктів відносно даної системи відліку визначити всі кінематичні величини, що характеризують їх рух у цілому, а також рух кожної з точок окремо (траєкторію, швидкість, прискорення та ін).

Предметом дослідження в кінематиці є ті самі моделі матеріальних тіл, що були розглянуті в статичці, — матеріальна точка і система матеріальних точок, суцільне середовище і його окремих випадок — абсолютно тверде тіло.

Відповідно до моделей матеріальних тіл та завдань кінематики кінематика поділяється на три частини: *кінематика точки, кінематика твердого тіла та кінематика суцільного середовища.*

11.2. Векторний та координатний (декартові координати) способи задання руху точки. Кінематика точки в декартовій системі координат

Розглянемо рух точки² M відносно нерухомої системи відліку, що визначається прямокутною декартовою системою координат $Oxyz$ (рис. 11.1). Точка M здійснює рух у просторі, що визначає система координат $Oxyz$, послідовно у певні моменти часу t, t_1, \dots, t_n проходить через деякі точки цього простору M, M_1, \dots, M_n , положення яких визначається координатами x, y, z або радіусом-вектором³ \vec{r} . При цьому кожному моменту часу t_i відповідають певні значення координат x_i, y_i, z_i або радіуса-вектора \vec{r}_i . Отже, x, y, z та \vec{r} — це функції часу.

¹ Докладно про інерціальну систему відліку викладено в розділі “Динаміка”.

² Оскільки кінематичні характеристики руху однакові для матеріальних і геометричних точок, то термін *точка* вживається без пояснення, матеріальна вона або геометрична.

³ Вектор, побудований з деякого нерухомого центра.

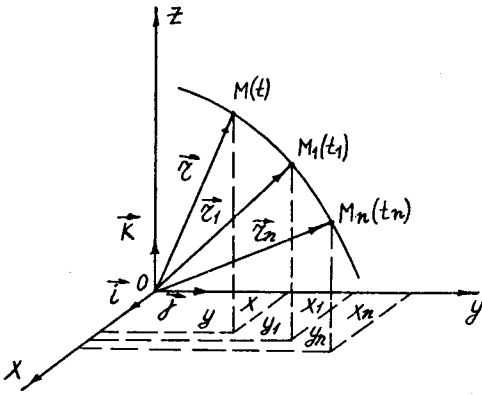


Рис. 11.1

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \end{aligned} \quad (11.1)$$

$$z = f_3(t).$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (11.2)$$

Функції (11.1)—(11.2) визначають математичні способи задання руху точки відносно системи відліку. Функції (11.1) визначають координатний (декартові координати) спосіб задання руху точки, а функція (11.2) — векторний спосіб задання руху точки. Рівняння (11.1) називаються *кінематичними рівняннями*

руху точки в декартових координатах, а рівняння (11.2) — *кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі*.

З математичного погляду функції (11.1)—(11.2) розглядаються як неперервні, однозначні, які можуть бути продиференційовані.

Співвідношення між координатним (декартові координати) і векторним способом задання руху точки має такий вигляд:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (11.3)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — одиничні вектори (орти) декартової системи координат; x , y та z — декартові координати точки, які визначаються функціями (11.1).

Неперервна послідовність точок простору, через які проходить точка M при її русі, називається **траєкторією руху цієї точки**.

Рівняння (11.1) є також рівняннями траєкторії руху точки в параметричній формі (параметром є час t). Щоб визначити рівняння траєкторії точки в координатній формі (декартові координати), необхідно з рівнянь (11.1) виключити час і здобути залежності, що мають вигляд

$$y = F_1(x); \quad z = F_2(x). \quad (11.4)$$

Рівняння (11.4) визначають траєкторію точки як лінію перетину двох циліндричних поверхонь. Траєкторія точки може бути визначена і як лінія перетину двох поверхонь більш загального вигляду [через неможливість одержання рівнянь (11.4)]:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0; \quad \Phi_2(x, y, z) = 0. \quad (11.5)$$

Упровадимо поняття годографа векторної функції скалярного аргументу. *Годографом векторної функції скалярного аргументу називається крива, яку креслить кінець радіуса-вектора, що набирає значення векторної функції при неперервній зміні скалярного аргументу.*

Беручи до уваги поняття годографа векторної функції скалярного аргументу, неважко встановити, що годограф радіуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точки M є траєкторією руху цієї точки (рис. 11.1).

Розглядаючи радіус-вектор точки M як векторну функцію скалярного аргументу, впровадимо поняття *миттєвої швидкості* та *миттєвого прискорення* точки.

Нехай точки M та M_1 — це положення точки, що рухається у просторі, в момент часу t і $t + \Delta t$, де Δt — скінченний приріст часу при переміщенні точки з положення M у положення M_1 (рис. 11.2). У момент часу t положення точки M визначається радіусом-вектором \vec{r} , а в момент часу $t + \Delta t$ — радіусом-вектором $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. Очевидно, що $\Delta\vec{r} = \vec{M}\vec{M}_1$. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{M}\vec{M}_1$ називається *вектором переміщення точки за проміжок часу Δt* .

Відношення вектора $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt називається *вектором середньої швидкості точки за проміжок часу Δt* :

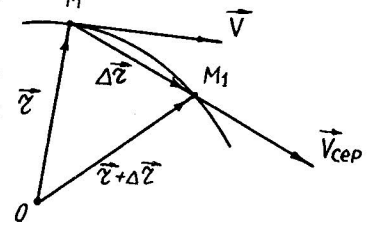


Рис. 11.2

$$\vec{V}_{\text{сep}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (11.6)$$

Напрямок вектора $\vec{V}_{\text{сep}}$ збігається з напрямком вектора переміщення $\Delta\vec{r}$, тобто вектор $\vec{V}_{\text{сep}}$ напрямлений уздовж хорди MM_1 .

Вектором швидкості в даний момент часу, або вектором миттєвої швидкості точки, називається границя відношення вектора переміщення точки $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу, за який відбувається переміщення, коли проміжок часу прямує до нуля:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (11.7)$$

Вектор \vec{V} прикладений до точки, що рухається, і напрямлений уздовж дотичної до траєкторії в бік руху точки (оскільки границею хорди MM_1 є дотична).

Отже, з рівняння (11.7) випливає, що вектор миттєвої швидкості точки (надалі просто вектор швидкості точки) дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора точки. Вектор швидкості точки напрямлений уздовж дотичної до траєкторії точки у бік руху точки.

Вектор швидкості точки характеризує швидкість зміни просторового положення точки з часом.

Рівняння (11.7) визначає вектор швидкості точки при векторному способі задання її руху.

З рівнянь (11.3) та (11.7) маємо:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}^1, \quad (11.8)$$

де

$$\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = V_y = \frac{dy}{dt}; \quad \dot{z} = V_z = \frac{dz}{dt} \quad (11.9)$$

— проекції вектора швидкості точки на осі декартової системи координат. З рівностей (11.9) випливає, що проекції вектора швидкості точки на осі декартової системи координат дорівнюють першим похідним від відповідних координат точки, що визначаються функціями (11.1) за часом.

Числове значення (модуль) вектора швидкості точки визначається за формулою

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (11.10)$$

Напрямок вектора швидкості точки відносно декартової системи координат визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{V}, x}) &= \frac{V_x}{V} = \frac{\dot{x}}{V}; \\ \cos(\widehat{\vec{V}, y}) &= \frac{V_y}{V} = \frac{\dot{y}}{V}; \\ \cos(\widehat{\vec{V}, z}) &= \frac{V_z}{V} = \frac{\dot{z}}{V}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Зауважимо, що рівності (11.9)—(11.11) визначають величину та напрям вектора швидкості точки при координатному (декартові координати) способі задання руху точки.

Зазначимо кілька послідовних положень точки, що рухається у просторі (рис. 11.3). Нехай $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ — вектори швидкості точки в цих положеннях. Взявши початок координат декартової системи $Oxyz$ за точку відліку, побудуємо годограф швидкості. Розглянемо довільну точку N на годографі швидкості точки. Позначимо координати точки N через x_1, y_1, z_1 . Оскільки радіус-вектор точки N $\vec{ON} = \vec{V}$, то координати точки N такі:

$$\begin{aligned} x_1 &= V_x = \dot{x}; \\ y_1 &= V_y = \dot{y}; \\ z_1 &= V_z = \dot{z}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

¹ У механіці похідні за часом позначаються точками над функцією.

Рівняння (11.12) є рівняннями руху точки N по годографу швидкості.

Вилучаючи з цих рівнянь параметр t , здобудемо рівняння годографа швидкості в декартовій системі координат.

Зазначимо деякі окремі випадки годографа швидкості точки: при рівномірному русі точки по просторовій криволінійній траєкторії годографом швидкості є крива, яка розташовується на сфері, що має радіус, який дорівнює вектору швидкості точки; при прямолінійному рівномірному русі точки годографом швидкості є точка; при прямолінійному змінному русі точки годографом швидкості є скінченний або нескінченний відрізок прямої, паралельний траєкторії точки.

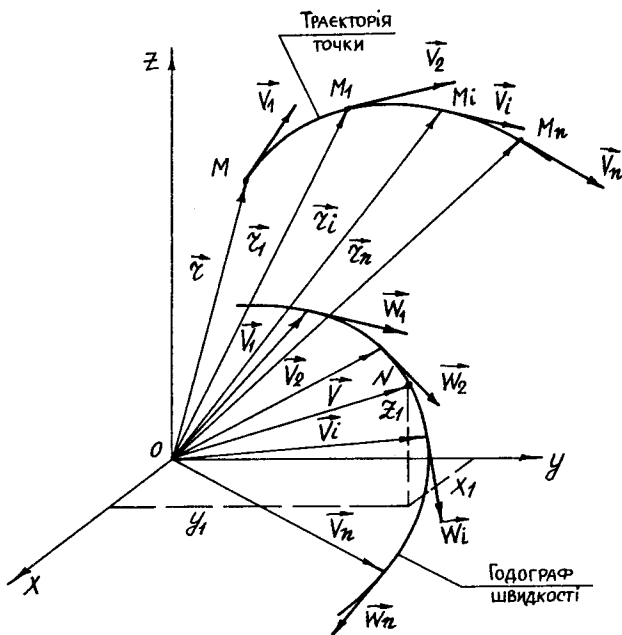


Рис. 11.3

Нехай точки M та M_1 — це положення точки, що рухається у просторі, в момент часу t і $t + \Delta t$, а вектори \vec{V} та \vec{V}_1 — вектори швидкості точки в цих положеннях (рис. 11.4). Переносячи вектор \vec{V}_1 в точку M , знайдемо вектор приросту швидкості точки $\Delta\vec{V}$ за проміжок часу Δt .

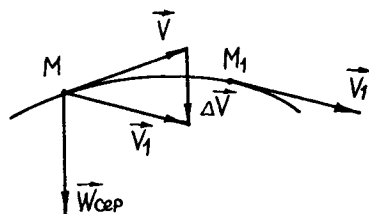


Рис. 11.4

Відношення вектора приросту швидкості точки $\Delta\vec{V}$ до проміжку часу Δt , за який відбувається цей приріст, називається **середнім прискоренням точки за проміжок часу Δt** :

$$\vec{W}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \tag{11.13}$$

Напрямок вектора $\vec{W}_{\text{сеп}}$ збігається з напрямком вектора приросту швидкості $\Delta\vec{V}$, тобто вектор $\vec{W}_{\text{сеп}}$ напрямлений завжди в бік угнутості траєкторії.

Вектором прискорення в даний момент часу, або вектором миттєвого прискорення точки, називається границя відношення вектора приросту швидкості точки $\Delta\vec{V}$ до проміжку часу, за який відбувається цей приріст, коли проміжок часу прямує до нуля:

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{11.14}$$

Вектор \vec{W} прикладений до точки, що рухається. Лінія дії вектора \vec{W} напрямлена вздовж дотичної до годографа вектора швидкості (рис.11.3).

З рівняння (11.14) випливає, що вектор миттєвого прискорення точки (надалі просто вектор прискорення точки) дорівнює першій похідній за часом від вектора швидкості точки \vec{V} або другій похідній за часом від радіуса-вектора точки \vec{r} .

Вектор прискорення точки характеризує швидкість зміни вектора швидкості точки з часом.

Рівняння (11.14) визначає вектор прискорення точки при векторному способі задання її руху.

На підставі рівнянь (11.3) та (11.14) маємо:

$$\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \quad (11.15)$$

де

$$\ddot{x} = W_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \ddot{y} = W_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \ddot{z} = W_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (11.16)$$

— проекції вектора прискорення точки на осі декартової системи координат. З рівностей (11.15) випливає, що проекції вектора прискорення точки на осі декартової системи координат дорівнюють другим похідним від відповідних координат точки, що визначається функціями (11.1) за часом.

Числове значення (модуль) вектора прискорення точки визначається за формулою

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (11.17)$$

Напрямок вектора прискорення точки відносно декартової системи координат визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{W}, x}) &= \frac{W_x}{W} = \frac{\ddot{x}}{W}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}, y}) &= \frac{W_y}{W} = \frac{\ddot{y}}{W}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}, z}) &= \frac{W_z}{W} = \frac{\ddot{z}}{W}. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Зауважимо, що рівності (11.16)—(11.18) визначають величину та напрям вектора прискорення точки при координатному (декартові координати) способі задання руху точки.

За одиницю швидкості та прискорення точки беруть відповідно $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$ та $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right]$, як це прийнято в системі СІ.

11.3. Деякі властивості диференціювання векторів за скалярним аргументом

11.3.1. Диференціювання вектора сталого модуля

Розглянемо вектор $\vec{b} = \vec{b}(u)$, де u — скалярна змінна величина. Вектор \vec{b} має сталий модуль $|\vec{b}| = b = \text{const}$, тобто вектор \vec{b} змінює тільки свій напрям у просторі при зміні u .

З визначення похідної вектора по скалярному аргументу маємо

$$\frac{d\vec{b}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{b}(u + \Delta u) - \vec{b}(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{b}}{\Delta u}.$$

Визначимо модуль вектора $\frac{d\vec{b}}{du}$:

$$\left| \frac{d\vec{b}}{du} \right| = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{b}}{\Delta u} \right|. \quad (11.19)$$

Значення $|\Delta \vec{b}|$ у формулі (11.19) знайдемо за допомогою рис. 11.5. З рис. 11.5 випливає, що оскільки вектори $\vec{b}(u)$ та $\vec{b}(u + \Delta u)$ рівні за модулем, то трикутник ΔOAB є рівнобедреним. З трикутника ΔOAB маємо

$$|\Delta \vec{b}| = 2b \sin \frac{\Delta \varphi}{2}.$$

Підставляючи це значення $|\Delta \vec{b}|$ в рівняння (11.19), одержуємо

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{b}}{du} \right| &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{b}}{\Delta u} \right| = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{2b \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta u} \right| = b \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta u} \right| = \\ &= b \left\{ \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right| \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta u} \right| \right\} = b \left| \frac{d\varphi}{du} \right|, \end{aligned} \quad (11.20)$$

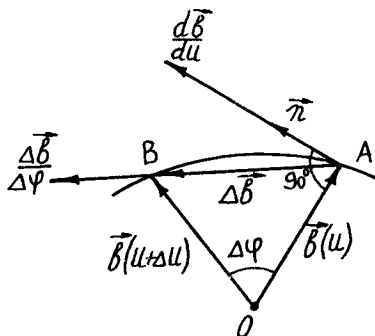


Рис. 11.5

оскільки

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right| = 1.$$

В рівності (11.20) кут φ — це кут повороту сталого за модулем вектора \vec{b} навколо точки O .

Визначимо напрям вектора $\frac{d\vec{b}}{du}$. Оскільки годограф вектора \vec{b} є кривою, що розташована на сфері, радіус якої дорівнює самому вектору \vec{b} , а вектор $\frac{d\vec{b}}{du}$ має лінію дії, яка збігається з дотичною до годографа вектора \vec{b} , то вектор $\frac{d\vec{b}}{du}$ є перпендикулярним до вектора \vec{b} .

Введемо одиничний вектор \vec{n} , що є колінеарним до вектора $\frac{d\vec{b}}{du}$ і має напрям у бік збільшення кута повороту вектора \vec{b} . Тоді на підставі розглянутого похідну від вектора \vec{b} можна подати у вигляді

$$\frac{d\vec{b}}{du} = b \frac{d\varphi}{du} \vec{n}. \quad (11.21)$$

Отже, похідна від вектора $\vec{b} = \vec{b}(u)$, що має сталий модуль за скалярним аргументом $\frac{d\vec{b}}{du}$, дорівнює добутку модуля вектора b похідній від кута повороту вектора за тим самим скалярним аргументом $\frac{d\varphi}{du}$ та одиничного вектора \vec{n} , що має напрям у бік збільшення кута повороту φ вектора \vec{b} і є перпендикулярним до вектора \vec{b} .

Якщо скалярним аргументом є час t , то рівняння (11.21) набирає вигляду

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = b \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}. \quad (11.22)$$

Введемо вектор миттєвої кутової швидкості обертання вектора $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, що має сталий модуль. *Вектором миттєвої кутової швидкості* (надалі просто вектор кутової швидкості) обертання $\vec{\omega}$ вектора \vec{b} називається вектор, який дорівнює за модулем першій похідній від кута повороту вектора \vec{b} за

часом $\frac{d\varphi}{dt}$, перпендикулярний до площини, де розміщені вектори \vec{b} та $\frac{d\vec{b}}{dt}$, і напрямлений в ту частину простору, звідки обертання вектора \vec{b} видно проти ходу стрілки годинника. Враховуючи вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ обертання вектора \vec{b} , формулу (11.22) можна подати у вигляді векторного добутку:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{b}. \quad (11.23)$$

Якщо на кінці вектора \vec{b} розташувати точку M , то похідна $\frac{d\vec{b}}{dt}$ буде визначати вектор швидкості цієї точки при обертанні вектора \vec{b} відносно точки O , точніше осі, що проходить через точку O , перпендикулярної до площини обертання вектора \vec{b} . Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$, який характеризує обертання вектора \vec{b} відносно тієї самої точки O , має також лінію дії, яка є перпендикулярною до площини обертання вектора \vec{b} . Отже, лінія дії вектора кутової швидкості збігається з віссю обертання. Таким чином, маємо

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{b}. \quad (11.24)$$

Рівняння (11.24) — відомий вираз, одержаний Ейлером¹ для визначення вектора лінійної швидкості точок твердого тіла або вільних точок при обертальному русі відносно осі або центра (див. також параграф 12.5).

Якщо вектор $\vec{b} = \vec{b}(t)$, що має сталий модуль, послідовно прирівнювати до одиничних векторів \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} декартової системи координат, яка обертається навколо осі, що проходить через її початок, то на підставі рівності (11.23) можна одержати

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}, \quad (11.25)$$

де $\vec{\omega}$ — вектор кутової швидкості обертання декартової системи координат відносно осі, яка проходить через її початок.

Вирази (11.25) називаються *формулами Пуассона*².

¹ Леонард Ейлер (1707—1783) — швейцарський математик, механік, фізик та астроном, член Петербурзької академії наук.

² Сімеон Дені Пуассон (1781—1840) — французький механік, фізик та математик.

11.3.2. Диференціювання вектора, який визначений у рухомій системі відліку

Подамо правило визначення похідної в нерухомій системі відліку (абсолютної похідної) від вектора, який визначений у рухомій системі відліку.

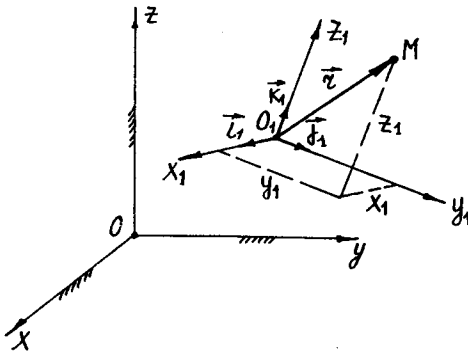


Рис. 11.6

Розглянемо дві системи відліку (рис. 11.6). Перша система відліку визначається декартовою системою координат $Oxyz$. Друга — $O_1x_1y_1z_1$ — здійснює довільний рух відносно нерухомої системи $Oxyz$ ¹.

Нехай вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ визначений в рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$, тобто проекції цього вектора r_{x_1} , r_{y_1} , r_{z_1} — відомі функції часу. Введемо одиничні вектори \vec{i}_1 , \vec{j}_1 , \vec{k}_1 системи $O_1x_1y_1z_1$ і на підставі формули (11.3) вектор \vec{r} подамо у вигляді

$$\vec{r} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1. \quad (11.26)$$

Диференціюємо вираз (11.26) за часом, беручи до уваги, що одиничні вектори \vec{i}_1 , \vec{j}_1 , \vec{k}_1 унаслідок руху системи координат $O_1x_1y_1z_1$ є функціями часу:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}. \quad (11.27)$$

Перетворимо вираз (11.27) на підставі рівнянь (11.25) та (11.26):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + \vec{\omega} \times (x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) = \\ &= \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Перші три доданки у виразі (11.28) є похідною від вектора \vec{r} у рухомій системі відліку $O_1x_1y_1z_1$ за припущенням, що система є нерухомою. Дійсно, якщо б ми поставили собі за мету визначити тільки зміну вектора \vec{r} відносно

¹ Під довільним рухом даної системи відліку відносно нерухомої системи відліку розуміємо довільний рух твердого тіла, з яким незмінно зв'язана декартова система координат, що визначає дану рухому систему відносно тіл, які прийняті за нерухомі, або, що є те саме, відносно декартової системи координат, незмінно зв'язаної з цими нерухомими тілами. Докладні відомості про довільний рух твердого тіла відносно нерухомої системи відліку див. у параграфах 12.1 і 12.14.

рухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$, то ми б урахувували при цьому тільки зміну з часом проєкцій вектора \vec{r} на осі цієї системи. Рух же самої системи $O_1x_1y_1z_1$ нас би не цікавив. Отже, три перших доданки виразу (11.28) називаються *відносною* або *локальною похідною вектора* \vec{r} і позначаються через $\frac{d\vec{r}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \vec{k}_1, \quad (11.29)$$

де x_1, y_1, z_1 — функції часу; $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ — const.

Вираз $\vec{\omega} \times \vec{r}$ у рівності (11.28) називається *конвективною похідною вектора* \vec{r} .

Ураховуючи формулу (11.29), вираз (11.28) остаточно подаємо у вигляді

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (11.30)$$

Отже, абсолютна похідна від вектора, який визначений у рухомій системі відліку, дорівнює сумі відносної похідної цього вектора та векторного добутку вектора кутової швидкості рухомої системи відліку при її обертанні навколо осі, що проходить через її початок, та вектора, який розглядається.

Зауважимо, що формула (11.30) називається *формулою Бура*¹.

11.4. Натуральний спосіб задання руху точки. Натуральна система координат. Кінематика точки в натуральних координатах

Рух точки буде задано натуральним способом, якщо відомо:

1) траєкторія руху точки; 2) напрям додатного та від'ємного відліку руху точки по траєкторії; 3) кінематичне рівняння руху точки по траєкторії, тобто

$$S = S(t), \quad (11.31)$$

де S — дугова координата точки (рис. 11.7).

Зазначимо, що часто помилково змішують поняття шляху, пройденого точкою, з її дуговою координатою S . Розглянемо рух точки M (рис. 11.7), беручи за початок відліку дугових координат точку O_1 . Позначимо знаком "+" напрям додатного відліку координат, а знаком "-" — напрям від'ємного відліку. Дуги S_i визначають координати точок M_i для даного моменту часу. Шлях дорівнює сумі абсолютних значень дугових координат. Якщо, наприклад, точка M починає рухатися від точки O_1 праворуч до точок M_1 та M_2 , потім ліворуч до точки M_3 і знову повертається в точку O_1 , то її дугова координата дорівнює нулю, а шлях дорівнює подвоєним довжинам дуг S_3 та S_2 .

¹ Жак Едмонд Еміль Бур (1832—1866) — французький математик та механік, професор Політехнічної школи в Парижі.

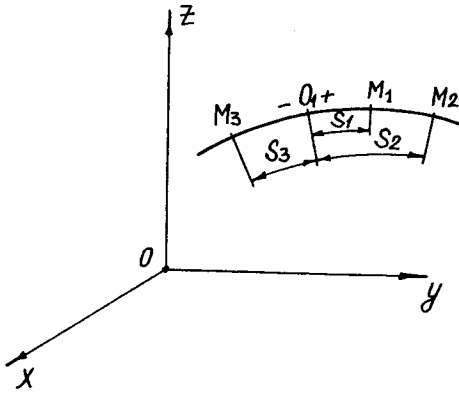


Рис. 11.7

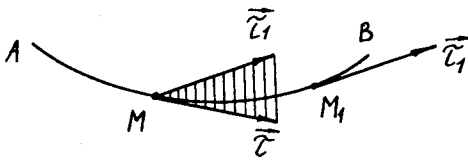


Рис. 11.8

Розглянемо деякі положення диференціальної геометрії. Нехай лінія AB — це просторова крива (рис. 11.8). Позначимо через \bar{t} одиничний вектор дотичної, яка проведена в довільній точці M кривої AB і має напрям у бік додатного відліку дуги (від точки A до точки B). Візьмемо на кривій в околі точки M точку M_1 і позначимо вектор дотичної в цій точці, що має також напрям у бік додатного відліку дуги, через \bar{t}_1 .

Переносимо паралельно самому собі вектор \bar{t}_1 у точку M і проведемо через вектори \bar{t} та \bar{t}_1 площину.

Якщо точка M_1 прямує до точки M як до своєї границі, то означена площина в точці M займе певне положення. Одержану у такий спосіб площину називають *стичною площиною в точці M* . Зауважимо, що якщо крива буде плоскою, то вона цілком буде розташована в стичній площині.

Площину, проведену через точку M перпендикулярно до дотичної у точці M , називають *нормальною площиною*. Лінія перетину стичної та нормальної площин визначає головну нормаль до кривої у точці M . Площину, проведену через точку M перпендикулярно до головної нормалі, називають *спрямною площиною*. Лінія перетину спрямної та нормальної площин визначає бінормаль до кривої. На рис. 11.9 зображено стичну (позначено літерою a), нормальну (позначено літерою d) та спрямну (позначено літерою c) площини, проведені через довільну точку M кривої AB . Тригранник, складений зі стичної, нормальної та спрямної площин, називається *натуральним тригранником* або *тригранником Френе*¹.

Таким чином, у кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями: напрям дотичної, головної нормалі та бінормалі. Ці три взаємно перпендикулярні напрями утворюють натуральну систему координат з початком у точці M : дотичну вісь τ з одиничним вектором \bar{t} , що має напрям у бік додатного відліку дуги, вісь головної нормалі n з одиничним вектором \bar{n} , що має напрям у бік угнутості кривої, та бінормальну вісь b з одиничним вектором \bar{b} , що має напрям вектора векторного добутку $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$ (рис. 11.9). Оскільки вектори \bar{t} , \bar{n} та \bar{b} утворюють праву трійку ортогональних векторів, то осі τ , n та b утворюють праву систему натуральних координат $M\tau nb$.

¹ Жан Фредерік Френе (1816—1900) — французький математик, професор Ліонського університету.

Розглянемо визначення вектора швидкості точки при натуральному способі задання її руху.

Нехай точка рухається по траєкторії, яку зображено на рис. 11.10. У момент часу t точка займає положення, що визначається радіусом-вектором $\vec{r}(t)$ відносно декартової системи координат $Oxyz$ та дуговою координатою S відносно початку відліку на траєкторії O_1 (рис.11.10).

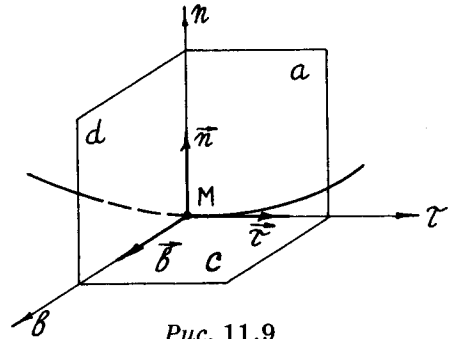


Рис. 11.9

У момент часу $t + \Delta t$ точка займає положення M_1 , що визначається радіусом-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$ та дуговою координатою $S + \Delta S$.

Вектор швидкості точки згідно з формулою (11.7) визначається як перша похідна від радіуса-вектора точки за часом. При цьому оскільки радіус-вектор точки при її русі по траєкторії є складною функцією часу $[\vec{r} = \vec{r}(S), S = S(t)]$, то

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \frac{dS}{dt} \tag{11.31a}$$

Розглянемо вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$. Модуль цього вектора дорівнює одиниці, оскільки границя відношення довжини хорди до довжини дуги, якщо довжина дуги прямує до нуля, дорівнює одиниці:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta S|} = 1. \tag{11.32}$$

Оскільки граничне положення січної MM_1 , уздовж якої напрямлений вектор $\Delta \vec{r}$, — це дотична, то вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$ має напрям по дотичній у бік додатного відліку дугової координати S , тобто напрям

вектора $\frac{d\vec{r}}{dS}$ не залежить від напрямку руху точки, а зумовлений тільки вибором додатного відліку дугової координати S .

Отже, вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$ — це одиничний вектор дотичної осі τ натуральної системи координат:

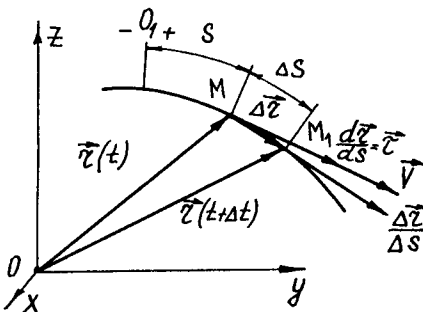


Рис. 11.10

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau}. \quad (11.33)$$

На підставі розглянутого формула (11.31a) набирає вигляду

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt} \vec{\tau}. \quad (11.34)$$

Помножимо обидві частини формули (11.34) скалярно на одиничний вектор $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{V} = \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Звідси

$$\frac{dS}{dt} = \pm V, \quad (11.35)$$

тобто величина $\frac{dS}{dt}$ є проекцією вектора швидкості точки \vec{V} на дотичну вісь натуральної системи координат.

Отже, вектор швидкості точки при натуральному способі задання її руху дорівнює добутку проекцій вектора швидкості $\frac{dS}{dt}$ на дотичну вісь τ натуральної системи координат та одиничного вектора $\vec{\tau}$ цієї осі.

Якщо точка рухається по траєкторії у бік додатного відліку дугової координати S , то вектор швидкості \vec{V} має напрям, що збігається з напрямом дотичної осі τ натуральної системи координат (рис. 11.11). Якщо точка рухається у бік від'ємного відліку дугової координати S , то вектор \vec{V} має протилежний до осі τ напрям (рис. 11.12).

Модуль вектора швидкості точки при натуральному способі задання її руху визначається за формулою

$$V = \left| \frac{dS}{dt} \right|. \quad (11.36)$$

Тепер розглянемо визначення вектора прискорення точки. На підставі формул (11.14), (11.34) та (11.35) маємо

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{\tau})}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + V \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (11.36a)$$

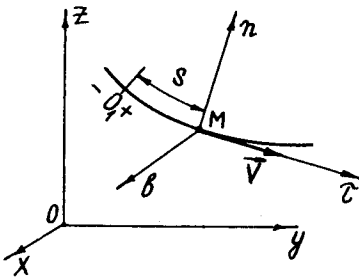


Рис. 11.11

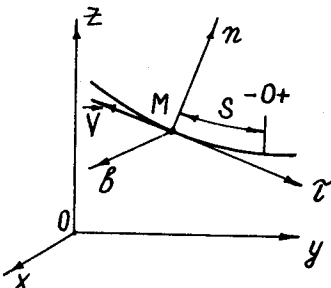


Рис. 11.12

Розглянемо похідну $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$. Оскільки одиничний вектор $\bar{\tau}$ дотичної осі натуральної системи координат при русі точки по траєкторії є складною функцією часу [$\bar{\tau} = \bar{\tau}(S)$, $S = S(t)$], то похідна $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$ така:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{dS} \frac{dS}{dt}. \quad (11.37)$$

Розглянемо похідну $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$. Оскільки похідна $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$ — це похідна від вектора, що має сталий модуль за скалярним аргументом, то на підставі формули (11.21) знайдемо

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \tau \frac{d\varphi}{dS} \bar{n}, \quad (11.38)$$

де $\tau = 1$; \bar{n} — одиничний вектор головної нормалі натуральної системи координат.

Розглянемо похідну $\frac{d\varphi}{dS}$. Ця похідна

$$\frac{d\varphi}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta S|} = k, \quad (11.39)$$

оскільки границя відношення кута суміжності дуги до її довжини, якщо довжина дуги прямує до нуля, дорівнює кривині кривої k у даній точці.

Кривина кривої у даній точці $k = \frac{1}{\rho}$, тобто

кривина — це величина, обернена до радіуса кривини ρ кривої у даній точці.

Враховуючи формули (11.34), (11.39), (11.38) та (11.37), виразу (11.36а) можна надати вигляд

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{dV_{\tau}}{dt} \bar{\tau} + V \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{dV_{\tau}}{dt} \bar{\tau} + V \frac{d\bar{\tau}}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dV_{\tau}}{dt} \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \bar{n} = \\ &= \frac{d^2 S}{dt^2} \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \bar{n} = \bar{W}_{\tau} + \bar{W}_n. \end{aligned} \quad (11.40)$$

З виразу (11.40) випливає, що вектор прискорення точки при натуральному способі задання її руху визначається як геометрична сума двох векторів: вектора дотичного (тангенціального) прискорення \bar{W}_{τ} та вектора нормального прискорення \bar{W}_n (рис. 11.14).

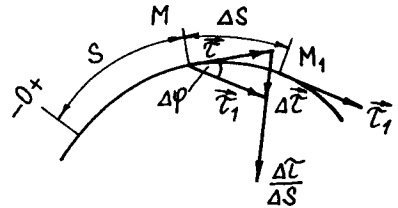


Рис. 11.13

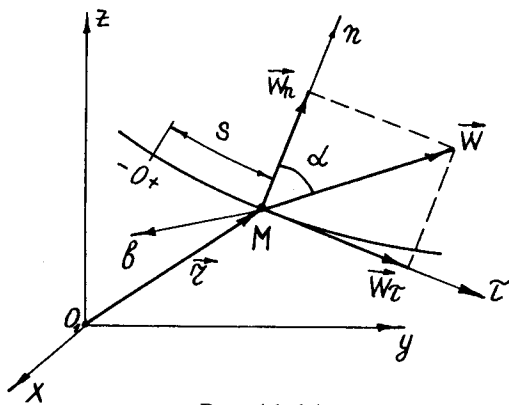


Рис. 11.14

Вектори \vec{W}_τ , \vec{W}_n та \vec{W} розташовані у стичній площині.

Вектор дотичного (тангенціального) прискорення $\vec{W}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} \vec{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2} \vec{\tau} = \ddot{S} \vec{\tau}$ характеризує зміну вектора швидкості точки при її русі по траєкторії за величиною. Похідна $\frac{dV_\tau}{dt}$ визначає проєкцію дотичного прискорення точки на дотичну вісь τ :

$$\frac{dV_\tau}{dt} = \pm W_\tau. \quad (11.41)$$

Модуль вектора дотичного прискорення визначається за формулою

$$W_\tau = \left| \frac{dV_\tau}{dt} \right|. \quad (11.42)$$

Якщо величина вектора швидкості та величина вектора дотичного прискорення точки мають один і той самий знак, то модуль вектора швидкості точки зростає і рух точки буде прискореним. Якщо ж величина вектора швидкості та величина вектора дотичного прискорення точки мають різні знаки, то модуль вектора швидкості точки зменшується і рух точки буде сповільненим. При $W_\tau = 0$ модуль вектора швидкості точки буде сталим, а рух точки — рівномірним.

Для визначення величини вектора дотичного прискорення точки можна скористатися такою рівністю:

$$W_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{W} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{W}}{\pm V} = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}}{\pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \quad (11.43)$$

Вектор нормального прискорення $W_n = \frac{V^2}{\rho} \vec{n}$ характеризує зміну вектора швидкості точки при її русі по траєкторії за напрямом. Модуль вектора нормального прискорення визначається за формулою

$$W_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (11.44)$$

де ρ — радіус кривини траєкторії у даній точці.

Модуль вектора прискорення точки при натуральному способі задання її руху визначається так:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}. \quad (11.45)$$

Напрямок вектора \vec{W} відносно осей τ та n (рис.11.14) визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{W}, \tau}) &= \frac{W_\tau}{W} = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dV_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}, n}) &= \frac{W_n}{W} = \frac{V^2}{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dV_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (11.46)$$

Напрямок вектора \vec{W} можна також визначити і за допомогою кута α за формулою

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|W_\tau|}{W_n}. \quad (11.46a)$$

11.5. Зв'язок між кінематикою точки в декартовій та натуральній системах координат

При розв'язанні практичних задач механіки матеріальної точки, як правило, траєкторія руху точки заздалегідь невідома. Тому невідомим є також закон руху точки по траєкторії.

Рух матеріальної вільної точки можна задати координатним способом (декартові координати) за допомогою кінематичних рівнянь руху точки (11.1):

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned}$$

Розглянемо перехід від координатного (декартові координати) способу задання руху точки до натурального.

Нехай рух точки задано рівняннями (11.1). Як було вже зазначено в параграфі 11.2, кінематичні рівняння руху точки (11.1) одночасно є рівняннями траєкторії точки в параметричній формі (параметром є час t). Вилучаючи з рівнянь (11.1) параметр t , можна здобути рівняння траєкторії руху точки як лінію перетину двох поверхонь загального вигляду:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0; \quad \Phi_2(x, y, z) = 0.$$

Для визначення кінематичного рівняння руху точки по траєкторії (11.31) необхідно зв'язати дугову і декартові координати. Для цього скористуємося відомим виразом, що зв'язує диференціал довжини дуги кривої та диференціали координат точки цієї кривої:

$$dS = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (11.47)$$

Диференціали координат точки

$$\begin{aligned} dx &= \dot{x} dt; \\ dy &= \dot{y} dt; \\ dz &= \dot{z} dt. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Підставляючи рівності (11.48) у вираз (11.47), здобудемо

$$dS = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Інтегруючи цей вираз у проміжку від $t = 0$ (початок руху) до довільного моменту часу t , дістанемо закон руху точки по траєкторії:

$$S = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (11.49)$$

де $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ — перші похідні від відповідних координат точок, що визначаються функціями (11.1) за часом.

Знак “+” або “-” у формулі (11.49) ставлять залежно від вибору напрямку додатного відліку дугової координати S : якщо рух точки починається у бік додатного відліку координати S , то необхідно ставити знак “+”, у протилежному разі — знак “-”.

11.6. Рівномірний і рівнозмінний рух точки

*Якщо величина швидкості точки при її русі залишається сталою ($V = \text{const}$), то рух точки називається **рівномірним**.*

Визначимо кінематичний закон рівномірного руху точки. На підставі формули (11.35) маємо $dS = \pm V_\tau dt$. Інтегруючи цей вираз:

$$\int dS = \pm \int V_\tau dt,$$

здобудемо

$$S = \pm V_\tau t + c_1,$$

де c_1 — стала інтегрування.

Визначаємо c_1 з початкових умов руху. Нехай при $t = 0$ $S(0) = S_0$. Тоді з останнього рівняння випливає, що $c_1 = S_0$, і остаточно матимемо

$$S = S_0 \pm V_{\tau} t. \quad (11.49a)$$

Знак “+” або “-” у формулі (11.49a) ставлять залежно від напрямку руху точки. Якщо точка рухається у бік додатного напрямку руху, то необхідно ставити знак “+”, у протилежному разі — знак “-”.

Рівність (11.49a) — це *кінематичний закон рівномірного руху точки*.

Якщо величина дотичного прискорення при русі точки залишається сталою, тобто $W_{\tau} = \text{const}$, то рух точки називається *рівнозмінним*.

Визначимо закон рівнозмінного руху точки. На підставі формули (11.41) маємо

$$dV_{\tau} = \pm W_{\tau} dt.$$

Інтегруючи це рівняння:

$$\int dV_{\tau} = \int \pm W_{\tau} dt,$$

здобудемо

$$V_{\tau} = \pm W_{\tau} t + c_2,$$

де c_2 — стала інтегрування.

Визначаємо c_2 з початкових умов руху точки. Нехай при $t = 0$ $V_{\tau}(0) = V_{\tau 0}$. Тоді з останнього рівняння випливає, що $c_2 = V_{\tau 0}$ і остаточно матимемо

$$V_{\tau} = V_{\tau 0} \pm W_{\tau} t. \quad (11.496)$$

Рівність (11.496) — це *кінематичний закон зміни швидкості точки при рівнозмінному русі*.

Підставляючи у формулу (11.496) замість V_{τ} її значення за формулою (11.35), матимемо

$$\frac{dS}{dt} = V_{\tau 0} \pm W_{\tau} t,$$

або

$$dS = (V_{\tau 0} \pm W_{\tau} t) dt.$$

Інтегруючи це рівняння, здобудемо

$$S = V_{\tau 0} t \pm \frac{W_{\tau} t^2}{2} + c_3,$$

де c_3 — стала інтегрування.

Визначаємо c_3 з початкових умов руху. Нехай при $t = 0$ $S(0) = S_0$. Тоді з останнього рівняння випливає, що $c_3 = S_0$, і остаточно матимемо

$$S = S_0 + V_{\tau 0} t \pm \frac{W_{\tau} t^2}{2}. \quad (11.49b)$$

Рівність (11.49в) — це *кінематичний закон рівнозмінного руху точки*.

Знак “+” або “-” у формулах (11.49б) і (11.49в) ставлять залежно від знаків швидкості і дотичного прискорення точки. Якщо знаки V_{τ} і W_{τ} збігаються, то рух точки буде рівноприскореним, у протилежному разі — рівносповільненим.

11.7. Криволінійні координати. Кінематика точки в криволінійних координатах

У тривимірному просторі положення довільної точки можна однозначно визначити за допомогою трьох величин. У декартовій системі координат такими величинами є координати точки x , y та z . Декартова система координат не є єдиною, і можна ввести інші системи координат, в яких положення точки буде однозначно визначатися трьома величинами з іншим, порівняно з декартовою системою, правилом їх відліку. В цьому параграфі розглянемо так звані криволінійні координати точки і визначення швидкості та прискорення в цих координатах.

Криволінійними координатами точки називаються три незалежні величини, що однозначно визначають положення точки у тривимірному просторі.

Криволінійні координати позначають через q_1 , q_2 і q_3 .

Нехай радіус-вектор \vec{r} , проведений з довільного нерухомого центра O , визначає положення точки M , заданої координатами q_1 , q_2 , q_3 у тривимірному просторі (рис. 11.15). Очевидно, що радіус-вектор \vec{r} буде функцією цих координат:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (11.50)$$

Проекції радіуса-вектора \vec{r} на осі декартової системи координат також будуть функціями криволінійних координат:

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3); \\ y &= y(q_1, q_2, q_3); \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \quad (11.51)$$

Упровадимо поняття координатної лінії, координатних осей, координатних поверхонь та координатних площин криволінійних координат.

Координатною лінією називається лінія, яку описує кінець радіуса-вектора \vec{r} при зміні однієї з координат, наприклад q_1 , і фіксованому значенні двох інших координат, наприклад q_{20} , q_{30} . Рівняння координатної лінії у випадку, що розглядається, має вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_{20}, q_{30}). \quad (11.52)$$

Аналогічно можуть бути отримані дві інші координатні лінії та їх рівняння:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{r}(q_{10}, q_2, q_{30}); \\ \bar{r} &= \bar{r}(q_{10}, q_{20}, q_3).\end{aligned}\quad (11.53)$$

Через кожен точку простору можна провести три координатні лінії. На рис. 11.15 координатні лінії позначено відповідно (q_1) , (q_2) , (q_3) .

Дотичні, проведені у даній точці до кожної із трьох координатних ліній, називаються **координатними осями** і позначаються $[q_1]$, $[q_2]$, $[q_3]$. Додатний напрям кожної осі вибирається у бік зростання відповідної криволінійної координати. Орти координатних осей відповідно позначають \bar{e}_1 , \bar{e}_2 та \bar{e}_3 .

Координатними поверхнями називаються поверхні, що проходять через дану точку простору і визначаються рівняннями

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{r}(q_1, q_2, q_{30}), \text{ поверхня } (q_1, q_2); \\ \bar{r} &= \bar{r}(q_{10}, q_2, q_3), \text{ поверхня } (q_2, q_3); \\ \bar{r} &= \bar{r}(q_1, q_{20}, q_3), \text{ поверхня } (q_3, q_1).\end{aligned}\quad (11.54)$$

Дотичні площини, проведені через дану точку до координатних поверхонь, називаються **координатними площинами**.

Визначимо одиничні вектори \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 координатних осей криволінійних координат. Розглянемо рух точки по координатній лінії, яка відповідає зміні координати q_1 . Нехай у момент часу t точка перебуває у положенні M (рис.

11.16). Вектор $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$ має напрям уздовж дотичної до координатної лінії (q_1) , тобто вздовж координатної осі $[q_1]$ у бік зростання координати q_1 (рис. 11.16).

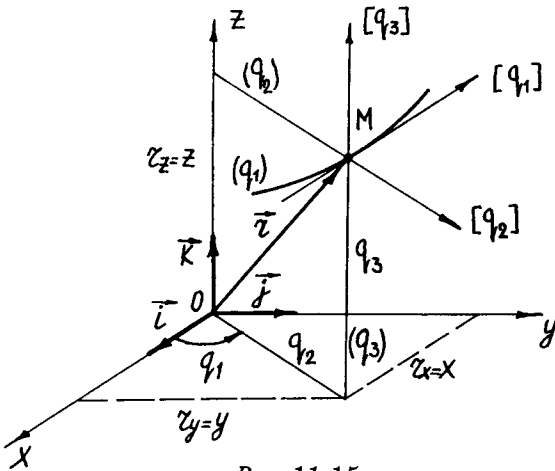


Рис. 11.15

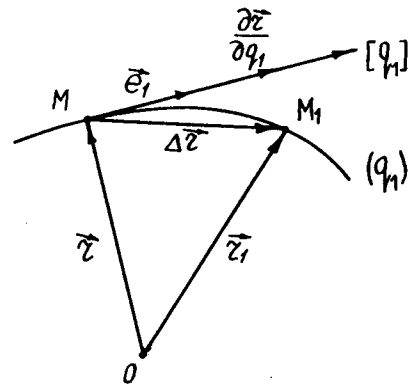


Рис. 11.16

Оскільки $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (рис.11.15), то

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \vec{k}. \quad (11.55)$$

Модуль вектора $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2} = H_1. \quad (11.56)$$

Отже, одиничний вектор

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}. \quad (11.57)$$

Аналогічно збудемо

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}; \quad (11.58)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}. \quad (11.59)$$

де

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2}. \quad (11.60)$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2}. \quad (11.61)$$

Коефіцієнти H_1 , H_2 та H_3 називаються *коефіцієнтами Ламе*¹.

Далі будемо розглядати тільки ортогональні криволінійні координати, тобто такі, в яких координатні осі взаємно перпендикулярні.

Умовою ортогональності є

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j), \quad (11.62)$$

або

¹ Габріель Ламе (1795—1870) — французький інженер, математик, член Паризької академії наук.

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0; \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} = 0; \\ \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_3} = 0. \end{cases} \quad (11.63)$$

Розглянемо визначення вектора швидкості та вектора прискорення точки в криволінійних координатах.

Вектор швидкості точки знайдемо шляхом диференціювання співвідношення (11.50):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3. \quad (11.64)$$

Враховуючи рівності (11.57)—(11.59), виразу (11.64) можна надати вигляду

$$\vec{V} = \dot{q}_1 H_1 \vec{e}_1 + \dot{q}_2 H_2 \vec{e}_2 + \dot{q}_3 H_3 \vec{e}_3, \quad (11.65)$$

де

$$\dot{q}_1 H_1 = V_{q_1}; \quad \dot{q}_2 H_2 = V_{q_2}; \quad \dot{q}_3 H_3 = V_{q_3} \quad (11.66)$$

— проєкції вектора швидкості точки на осі криволінійної системи координат. Модуль вектора швидкості точки визначається за формулою

$$V = \sqrt{(\dot{q}_1 H_1)^2 + (\dot{q}_2 H_2)^2 + (\dot{q}_3 H_3)^2}. \quad (11.67)$$

Як бачимо, вектор швидкості точки в криволінійних координатах визначається через свої проєкції на відповідні координатні осі. Аналогічно визначається і вектор прискорення точки. Так, проєкція вектора прискорення точки на координатну вісь $[q_1]$

$$W_{q_1} = \vec{W} \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{H_1} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right).$$

Звідси

$$H_1 W_{q_1} = \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right) - \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right). \quad (11.68)$$

Перетворимо вираз (11.68). Диференціюємо вираз (11.64) за \dot{q}_1 :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}. \quad (11.69)$$

Диференціюємо за часом вираз $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$, розглядаючи його як складну функцію криволінійних координат q_1, q_2, q_3 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_2 \partial q_1} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_3 \partial q_1} \dot{q}_3. \quad (11.70)$$

Диференціюємо вираз (11.64) за q_1 :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_3} \dot{q}_3. \quad (11.71)$$

Порівнюючи вирази (11.70) та (11.71), знайдемо

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \right). \quad (11.72)$$

Підставляючи рівності (11.69) та (11.72) у формулу (11.68), маємо

$$H_1 W_{q_1} = \frac{d}{dt} \left(\bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial q_1}.$$

Оскільки $\bar{V}^2 = V^2$, то

$$\bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{V^2}{2} \right).$$

Аналогічно

$$\bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{V^2}{2} \right).$$

Тоді остаточно вираз (11.68) набуває вигляду

$$W_{q_1} = \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}. \quad (11.73)$$

Аналогічно визначаємо дві інші проекції:

$$W_{q_2} = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}. \quad (11.74)$$

$$W_{q_3} = \frac{1}{H_3} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}. \quad (11.75)$$

11.8. Визначення вектора швидкості та вектора прискорення точки в полярній, циліндричній та сферичній системах координат

Розглянемо три окремих випадки криволінійних координат:

I. Полярні координати. При дослідженні руху точки на площині застосовується полярна система координат. Полярними координатами точки є (рис. 11.17):

$$q_1 = r(t), \quad q_2 = \varphi(t).$$

Координатна лінія (r) та вісь $[r]$ збігаються, це — пряма, що проходить через початок координат O і точку M . Координатна лінія (φ) — коло радіуса r , вісь $[\varphi]$ — дотична до кола, яка проведена у точці M у бік зростання кута φ . Координатна вісь $[r]$ називається *радіальною віссю*, а координатна вісь $[\varphi]$ — *трансверсальною*.

Зв'язок між декартовими та полярними координатами має вигляд:

$$\begin{aligned} r &= \cos \varphi; \\ y &= \sin \varphi. \end{aligned} \quad (11.76)$$

На підставі рівнянь (11.76) та (11.63) проводимо перевірку полярної системи координат на ортогональність:

$$\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \cos \varphi \sin \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Таким чином, полярна система координат ортогональна.

Визначимо вектор швидкості точки. За формулами (11.56) та (11.60) визначаємо коефіцієнти Ламе:

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial r}(r \cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r}(r \sin \varphi)\right)^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1; \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \varphi)\right)^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r. \end{aligned}$$

За формулою (11.66) визначаємо проєкції вектора швидкості точки на радіальну та трансверсальну осі:

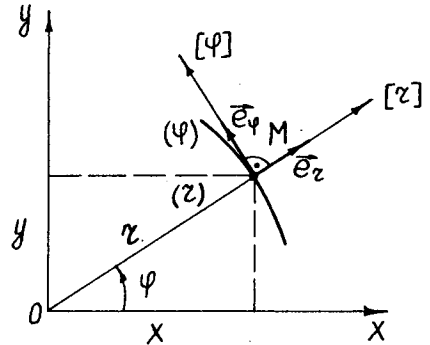


Рис. 11.17

$$V_r = \dot{q}_1 H_1 = \dot{r}; \tag{11.77}$$

$$V_\varphi = \dot{q}_2 H_2 = \dot{\varphi} r. \tag{11.78}$$

Вектор швидкості точки визначається як геометрична сума двох векторів (рис. 11.18):

$$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\varphi \vec{e}_\varphi = \dot{r} \vec{e}_r + \dot{\varphi} r \vec{e}_\varphi = \vec{V}_r + \vec{V}_\varphi. \tag{11.78a}$$

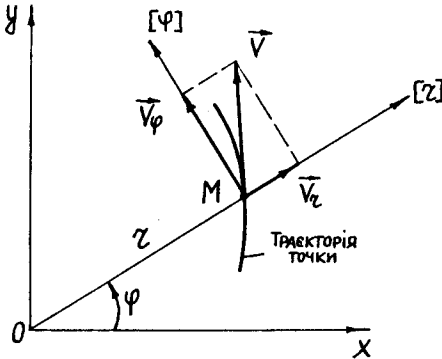


Рис. 11.18

Напрямок вектора швидкості точки в системі координатних осей $[r]$ та $[\varphi]$ визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{V}, [r]}) &= \frac{V_r}{V}, \\ \cos(\widehat{\vec{V}, [\varphi]}) &= \frac{V_\varphi}{V}, \end{aligned} \tag{11.79}$$

де V — модуль вектора швидкості точки, який визначається за формулою

$$V = \sqrt{(V_r)^2 + (V_\varphi)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (\dot{\varphi} r)^2}. \tag{11.80}$$

Визначаємо прискорення точки. На підставі формул (11.73) та (11.74) маємо:

$$\begin{aligned} W_r &= \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}; \\ W_\varphi &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{11.81}$$

Визначаємо похідні:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\varphi} r)^2}{2} \right) = \dot{r}; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\varphi} r)^2}{2} \right) = \dot{\varphi}^2 r;$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\varphi} r)^2}{2} \right) = \dot{\varphi} r^2; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\varphi} r)^2}{2} \right) = 0;$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}) = \ddot{r}; \quad \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} r^2) = \ddot{\varphi} r^2 + 2\dot{\varphi} r \dot{r}.$$

Підставляємо значення похідних у рівності (11.81):

$$W_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r; \tag{11.82}$$

$$W_\varphi = \ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi}\dot{r}. \tag{11.83}$$

Вектор прискорення точки визначається як геометрична сума двох векторів (рис. 11.19):

$$\vec{W} = W_r \vec{e}_r + W_\varphi \vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r) \vec{e}_r + (\ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi}\dot{r}) \vec{e}_\varphi = \vec{W}_r + \vec{W}_\varphi. \tag{11.84}$$

Напрямок вектора прискорення точки в системі координатних осей $[r]$, $[\varphi]$ здобудемо за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos(\vec{W}, [r]) = \frac{W_r}{W}; \tag{11.85}$$

$$\cos(\vec{W}, [\varphi]) = \frac{W_\varphi}{W},$$

де W — модуль вектора прискорення точки, який визначається за формулою

$$W = \sqrt{(W_r)^2 + (W_\varphi)^2} = \sqrt{(\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)^2 + (\ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi}\dot{r})^2}. \tag{11.86}$$

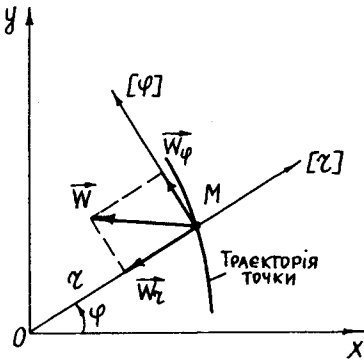


Рис. 11.19

II. Циліндричні координати. Циліндричними координатами точки є (рис. 11.20):

$$q_1 = \rho(t); q_2 = \varphi(t); q_3 = z(t).$$

Координатна лінія (ρ) — це пряма DM , яка проходить через точку M , уздовж якої $\varphi = \text{const}$ і $z = \text{const}$, вісь $[\rho]$ збігається з координатною лінією (ρ) . Координатна лінія (φ) — це дуга кола BMC , уздовж якої $\varphi = \text{const}$ і $z = \text{const}$, вісь $[\varphi]$ дотична до цього кола і проведена у точці M у бік зростання кута φ . Координатна лінія (z) та вісь $[z]$ збігаються — це пряма, що проходить через точку M' та M (рис. 11.20).

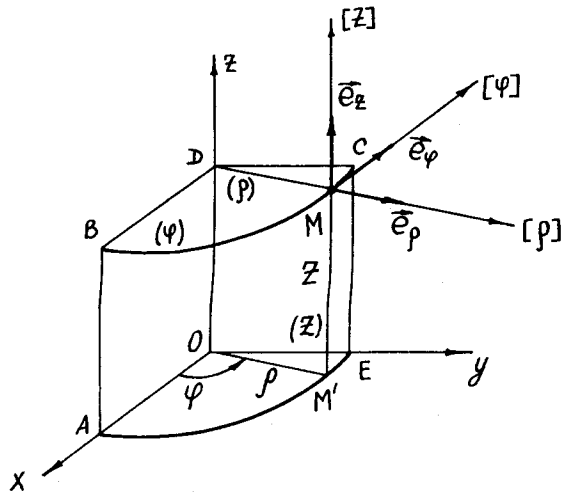


Рис. 11.20

Зв'язок між декартовими та циліндричними координатами має вигляд:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi; \\y &= \rho \sin \varphi; \\z &= z.\end{aligned}\tag{11.87}$$

На підставі рівнянь (11.87) та (11.63) перевіряємо циліндричну систему координат на ортогональність:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho \sin \varphi \cos \varphi = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial z} = -\rho \sin \varphi \cdot 0 + \rho \cos \varphi \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial z} = \cos \varphi \cdot 0 + \sin \varphi \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Отже, циліндрична система координат ортогональна.

Визначимо вектор швидкості точки. За формулами (11.56) та (11.60—11.61) обчислюємо коефіцієнти Ламе:

$$\begin{aligned}H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \rho}(z)\right)^2} = \\&= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \sin \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(z)\right)^2} = \\&= \sqrt{(-\rho \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi)^2} = \rho;\end{aligned}$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho \cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho \sin \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}(z)\right)^2} = 1.$$

За формулами (11.66) визначаємо проєкції вектора швидкості точки на осі координат $[\rho]$, $[\varphi]$ та $[z]$:

$$V_\rho = \dot{q}_1 H_1 = \dot{\rho};\tag{11.88}$$

$$V_\varphi = \dot{q}_2 H_2 = \dot{\varphi} \rho;\tag{11.89}$$

$$V_z = \dot{q}_3 H_3 = \dot{z}.\tag{11.90}$$

Вектор швидкості точки визначається як геометрична сума трьох векторів (рис. 11.21):

$$\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_z \vec{e}_z = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\varphi} \rho \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z = \vec{V}_\rho + \vec{V}_\varphi + \vec{V}_z.\tag{11.91}$$

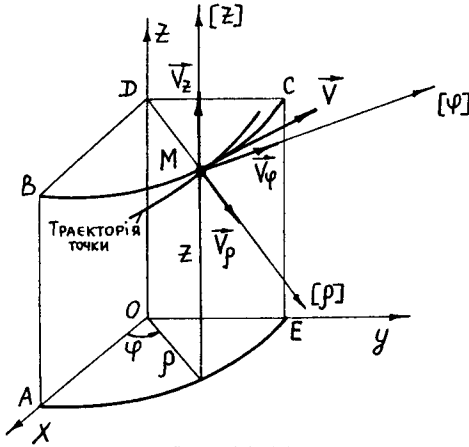


Рис. 11.21

Напрямок вектора швидкості точки в системі координатних осей $[\rho]$, $[\varphi]$ та $[z]$ здобудемо за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned}\cos(\vec{V}, [\rho]) &= \frac{V_\rho}{V}; \\ \cos(\vec{V}, [\varphi]) &= \frac{V_\varphi}{V}; \\ \cos(\vec{V}, [z]) &= \frac{V_z}{V},\end{aligned}\quad (11.92)$$

де V — модуль вектора швидкості точки, який визначається за формулою

$$V = \sqrt{(V_\rho)^2 + (V_\varphi)^2 + (V_z)^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\dot{\varphi}\rho)^2 + \dot{z}^2}. \quad (11.93)$$

Визначаємо прискорення точки. На підставі формул (11.73)—(11.75) маємо:

$$\begin{aligned}W_\rho &= \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}; \\ W_\varphi &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}; \\ W_z &= \frac{1}{H_3} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (11.93a)$$

Визначаємо похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = \dot{\rho}; & \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = \rho^2 \dot{\varphi}; \\ \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = \dot{z}; & \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = \rho \dot{\varphi}^2; \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = 0; & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = 0; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] &= \ddot{\rho}; & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] &= \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}; & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] &= \ddot{z}.\end{aligned}$$

Підставляємо значення похідних у рівності (11.93а):

$$W_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2; \quad (11.94)$$

$$W_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}; \quad (11.95)$$

$$W_z = \ddot{z}. \quad (11.96)$$

Вектор прискорення точки визначається як геометрична сума трьох векторів (рис. 11.22):

$$\begin{aligned} \vec{W} &= W_\rho \vec{e}_\rho + W_\varphi \vec{e}_\varphi + W_z \vec{e}_z = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z = \\ &= \vec{W}_\rho + \vec{W}_\varphi + \vec{W}_z. \end{aligned} \quad (11.97)$$

Напрямок вектора прискорення точки в системі координатних осей $[\rho]$, $[\varphi]$ та $[z]$ здобудемо за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{W}, [\rho]}) &= \frac{W_\rho}{W}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}, [\varphi]}) &= \frac{W_\varphi}{W}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}, [z]}) &= \frac{W_z}{W}, \end{aligned} \quad (11.98)$$

де W — модуль вектора прискорення точки, який визначається за формулою

$$W = \sqrt{(W_\rho)^2 + (W_\varphi)^2 + (W_z)^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)^2 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}. \quad (11.99)$$

III. Сферичні координати. Сферичними координатами точки є (рис. 11.23):

$$q_1 = r(t); \quad q_2 = \theta(t); \quad q_3 = \varphi(t).$$

Координатна лінія (r) та вісь $[r]$ збігаються, це — пряма, що проходить через початок координат та точку M . Координатна лінія (θ) — коло, що має радіус OM , вісь $[\theta]$ — дотична до цього кола, проведена у точці M у бік зростання кута θ . Координатна лінія (φ) — коло, що має радіус $r \sin \theta$, вісь $[\varphi]$ — дотична до цього кола, проведена у точці M у бік зростання кута φ (рис. 11.23).

Зв'язок між декартовими та сферичними координатами має вигляд:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi; \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi; \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.100)$$

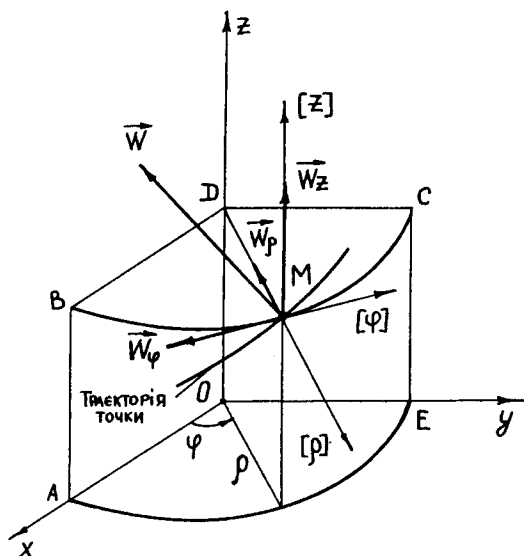


Рис. 11.22

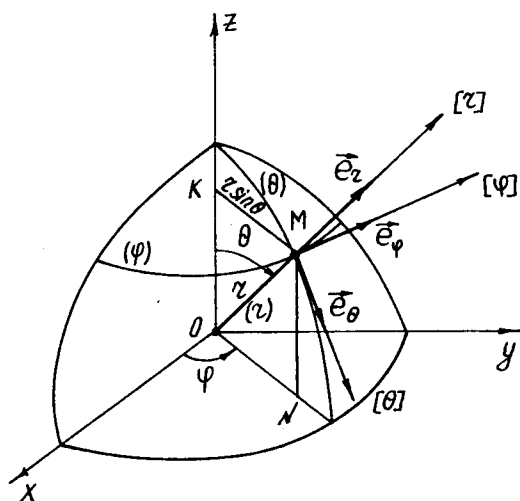


Рис. 11.23

На підставі рівнянь (11.100) та (11.63) перевіряємо сферичну систему координат на ортогональність:

$$\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} = r \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - r \sin \theta \cos \theta = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r^2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + r^2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi - r \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Отже, сферична система координат ортогональна.

Визначимо вектор швидкості точки. За формулами (11.56), (11.60) та (11.61) обчислюємо коефіцієнти Ламе:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial r}(r \sin \theta \cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r}(r \sin \theta \sin \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r}(r \cos \theta)\right)^2} = 1;$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta \cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta \sin \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta)\right)^2} = r;$$

$$\begin{aligned}
 H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \theta \cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \theta \sin \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \theta)\right)^2} = r \sin \theta.
 \end{aligned}$$

За формулами (11.66) визначаємо проєкції вектора швидкості точки на осі координат $[r]$, $[\theta]$ та $[\varphi]$:

$$V_r = \dot{q}_1 H_1 = \dot{r}; \quad (11.101)$$

$$V_\theta = \dot{q}_2 H_2 = \dot{\theta} r; \quad (11.102)$$

$$V_\varphi = \dot{q}_3 H_3 = \dot{\varphi} r \sin \theta. \quad (11.103)$$

Вектор швидкості точки визначається як геометрична сума трьох векторів (рис. 11.24):

$$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\varphi \vec{e}_\varphi = \dot{r} \vec{e}_r + \dot{\theta} r \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} r \sin \theta \vec{e}_\varphi = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta + \vec{V}_\varphi. \quad (11.104)$$

Напрямок вектора швидкості точки в системі координатних осей $[r]$, $[\theta]$ та $[\varphi]$ здобудемо за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{\vec{V}, [r]}) &= \frac{V_r}{V}; \\
 \cos(\widehat{\vec{V}, [\theta]}) &= \frac{V_\theta}{V}; \\
 \cos(\widehat{\vec{V}, [\varphi]}) &= \frac{V_\varphi}{V},
 \end{aligned} \quad (11.105)$$

де V — модуль вектора швидкості точки, який визначається за формулою

$$V = \sqrt{(V_r)^2 + (V_\theta)^2 + (V_\varphi)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (\dot{\theta} r)^2 + (\dot{\varphi} r \sin \theta)^2}. \quad (11.106)$$

Визначаємо прискорення точки. На підставі формул (11.73)—(11.75) маємо:

$$\begin{aligned}
 W_r &= \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}; \quad W_\theta = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}; \\
 W_\varphi &= \frac{1}{H_3} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}.
 \end{aligned} \quad (11.106a)$$

Визначаємо похідні:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\theta}r)^2 + (\dot{\varphi}r \sin \theta)^2}{2} \right] = \dot{r};$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\theta}r)^2 + (\dot{\varphi}r \sin \theta)^2}{2} \right] = r\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\theta}r)^2 + (\dot{\varphi}r \sin \theta)^2}{2} \right] = r^2 \dot{\theta};$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\theta}r)^2 + (\dot{\varphi}r \sin \theta)^2}{2} \right] = r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left[\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\theta}r)^2 + (\dot{\varphi}r \sin \theta)^2}{2} \right] = r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\dot{r}^2 + (\dot{\theta}r)^2 + (\dot{\varphi}r \sin \theta)^2}{2} \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] &= \ddot{r}; & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] &= 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}; & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] &= \\ &= r^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\varphi} + 2r\dot{r} \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Підставляємо значення похідних у рівності (11.106а):

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2; \quad (11.107)$$

$$W_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2; \quad (11.108)$$

$$W_\varphi = r \sin \theta \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r \cos \theta \cdot \dot{\theta}\dot{\varphi}. \quad (11.109)$$

Вектор прискорення точки визначається як геометрична сума трьох векторів (рис. 11.25):

$$\begin{aligned} \vec{W} &= W_r \vec{e}_r + W_\theta \vec{e}_\theta + W_\varphi \vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\theta + (r \sin \theta \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r \cos \theta \cdot \dot{\theta}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi = \\ &= \vec{W}_r + \vec{W}_\theta + \vec{W}_\varphi. \end{aligned} \quad (11.110)$$

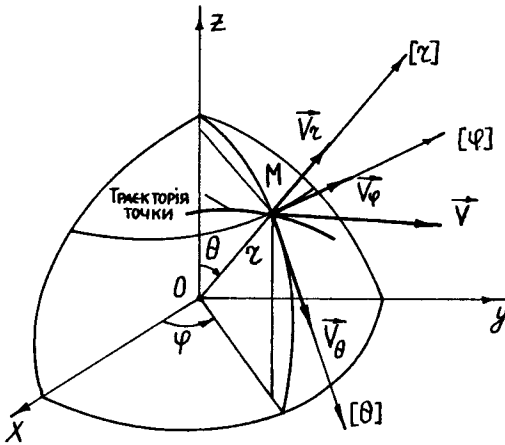


Рис. 11.24

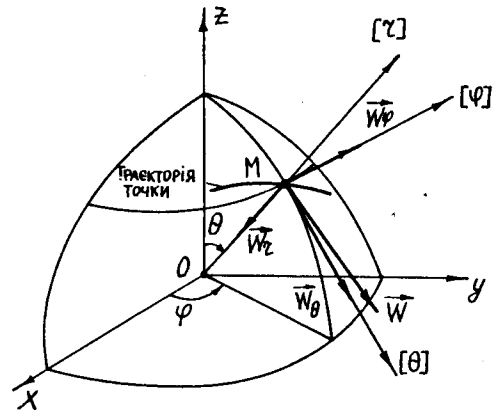


Рис. 11.25

Напрямок вектора прискорення точки в системі координатних осей $[r]$, $[\theta]$ та $[\varphi]$ здобудемо за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\bar{W}, [r]}) &= \frac{W_r}{W}; \\ \cos(\widehat{\bar{W}, [\theta]}) &= \frac{W_\theta}{W}; \\ \cos(\widehat{\bar{W}, [\varphi]}) &= \frac{W_\varphi}{W},\end{aligned}\quad (11.111)$$

де W — модуль вектора прискорення точки, який визначається за формулою

$$W = \sqrt{(W_r)^2 + (W_\theta)^2 + (W_\varphi)^2}. \quad (11.112)$$

11.9. Методика та приклади розв'язання задач кінематики точки

При розв'язанні задач кінематики точки слід дотримуватися такого порядку:

1) вибрати нерухому систему координат — декартову, полярну, циліндричну або будь-яку іншу (виходячи з умов задачі так, щоб подальший розв'язок був найпростішим);

2) за умовами задачі в обраній системі координат складають рівняння руху точки, тобто визначають залежність координат точки від часу;

3) маючи рівняння руху точки, можна визначити положення точки у будь-який момент часу, встановити напрям її руху, знайти траєкторію і відповіді на різні інші запитання стосовно її руху;

4) маючи рівняння руху точки, можна визначити проекції вектора швидкості точки на осі координат і за цими проекціями визначити модуль вектора швидкості точки та його напрям;

5) маючи рівняння руху точки, можна визначити проекції вектора прискорення точки на осі координат і за цими проекціями визначити модуль вектора прискорення точки та його напрям;

6) якщо траєкторія точки відома за умовою задачі, то доцільно розглянути рух точки в натуральній системі координат і визначити вектори швидкості і прискорення точки через їх проекції на осі натурального тригранника (натуральні осі).

Приклад 11.1. Завантаження залізничних вагонів контейнерами з готовою продукцією на кондитерській фабриці здійснюється за допомогою кабельного крана, схему якого подано на рис. 11.26.

Несівний канат AB рухається зі сталою швидкістю V . Відстань між блоками A і B $AB = 2a$. В початковий момент часу контейнер розміщений посередині AB у точці C (рис. 11.26). У цьому положенні контейнера стріла прогину несівного каната AB дорівнює h , а довжина його гілок $AC = BC = b$.

Визначити траєкторію руху точки C , до якої підвішений контейнер D , а також її швидкість при роботі крана.

Розв'язання. Вибираємо декартову систему координат з початком у точці O посередині AB і осями, що мають напрям, зображений на рис. 11.27.

Розглядаємо довільне положення точки C . У цьому положенні точки C довжина гілки каната AC дорівнює $b + Vt$, а довжина гілки каната BC дорівнює $b - Vt$.

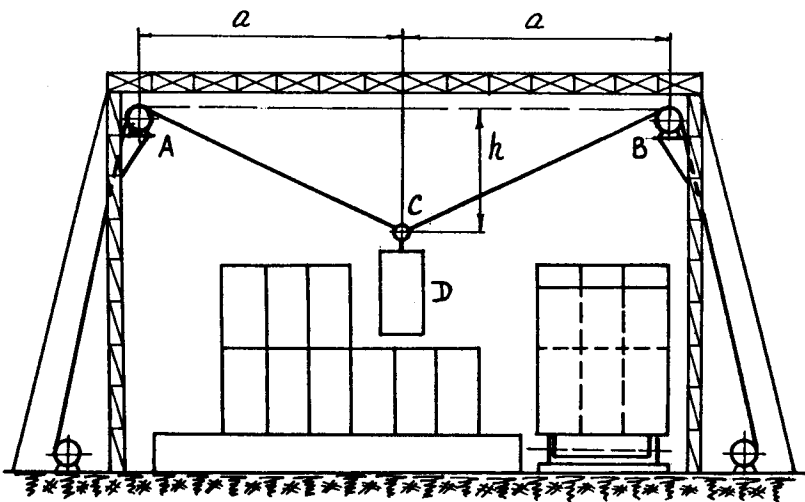


Рис. 11.26

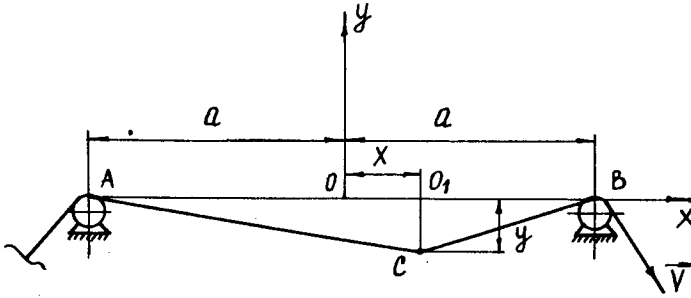


Рис. 11.27

Позначимо координати точки C через x і y і визначимо їх залежність від часу. З рис. 11.27 випливає, що:

$$\begin{aligned} AC^2 &= (a + x)^2 + y^2; \\ BC^2 &= (a - x)^2 + y^2. \end{aligned} \quad (1)$$

З іншого боку, $AC = b + Vt$, $BC = b - Vt$. Підставляючи ці значення у формули (1), дістанемо рівняння:

$$\begin{aligned} (a + x)^2 + y^2 &= (b + Vt)^2; \\ (a - x)^2 + y^2 &= (b - Vt)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

З рівнянь (2) знаходимо рівняння руху точки C :

$$x = \frac{b}{a} Vt; \quad (3)$$

$$y = -\sqrt{b^2 - a^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) V^2 t^2}. \quad (4)$$

Щоб знайти траєкторію руху точки C , треба з рівнянь (3) і (4) виключити час. Для цього знайдемо значення t з першого рівняння і підставимо в друге. Після нескладних перетворень матимемо

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1. \quad (5)$$

З рівняння (5) випливає, що точка рухається по дузі еліпса.

Знайдемо проєкції вектора швидкості точки C на осі координат:

$$\begin{aligned} V_{cx} &= \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{a} Vt \right) = \frac{b}{a} V; \\ V_{cy} &= \dot{y} = \frac{d}{dt} \left(-\sqrt{b^2 - a^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) V^2 t^2} \right) = \frac{\sqrt{b^2 - a^2} V^2 t}{a\sqrt{a^2 - V^2 t^2}}. \end{aligned}$$

Вектор швидкості точки C

$$\vec{V}_c = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} = \frac{b}{a} V \vec{i} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2} V^2 t}{a\sqrt{a^2 - V^2 t^2}} \vec{j}.$$

Величину вектора швидкості точки C дістанемо з формули

$$V_c = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{x^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}V\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2} V^2 t}{a\sqrt{a^2 - V^2 t^2}}\right)^2}.$$

Приклад 11.2. При електричному очищенні від пилу газових потоків в електрофільтрах створюється електрополе між коронувальним і осадовими електродами, внаслідок чого частинки пилу, що містяться в потоці газу, електризуються і рухаються вздовж силових ліній до осадових електродів. Геометричною конфігурацією багатьох силових ліній є параболічні криві (рис. 11.28).

Визначити в момент часу $t = 2$ с швидкість і прискорення частинки пилу M , що рухається по силовій лінії відповідно до рівнянь: $x = 0,72t^2$; $y = 0,6t$, де t вимірюється в секундах, x та y — в метрах. Визначити також радіус кривини траєкторії частинки M у момент часу $t = 2$ с.

Розв'язання. Визначаємо траєкторію руху частинки пилу M . Для цього знайдемо значення t з другого рівняння і підставимо в перше. Матимемо:

$$t = \frac{y}{0,6}; \quad x = 0,72t^2 = 0,72 \left(\frac{y}{0,6}\right)^2 = 2y^2.$$

Графік траєкторії є параболою (рис. 11.29).

Визначаємо положення точки M на траєкторії в момент часу $t = 2$ с. З рівнянь руху дістанемо:

$$x = 0,72t^2 = 0,72 \cdot 2^2 = 2,88 \text{ (м)};$$

$$y = 0,6t = 0,6 \cdot 2 = 1,2 \text{ (м)}.$$

Положення точки M у момент часу $t = 2$ с зображено на рис. 11.29.

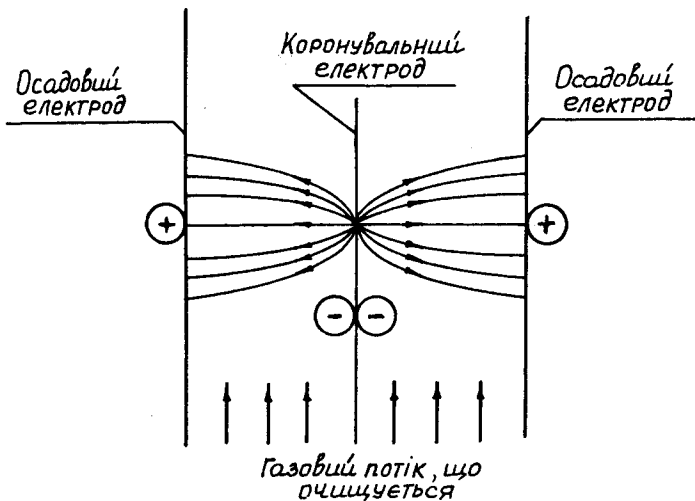


Рис. 11.28

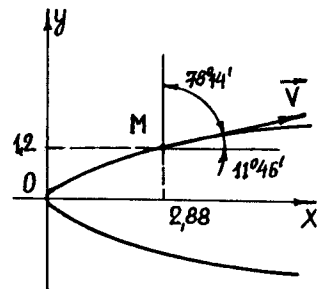


Рис. 11.29

Визначаємо проекції вектора швидкості точки M на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(0,72t^2) = 1,44t;$$

$$V_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(0,6t) = 0,6.$$

У момент часу $t = 2$ с матимемо:

$$V_x = \dot{x} = 1,44t = 1,44 \cdot 2 = 2,88 \text{ (м/с)};$$

$$V_y = \dot{y} = 0,6 \text{ (м/с)}.$$

Величину вектора швидкості точки M дістанемо з формули

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

У момент часу $t = 2$ с матимемо

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2,88^2 + 0,6^2} = 2,942 \text{ (м/с)}.$$

Визначаємо напрямні косинуси вектора швидкості точки M у момент часу $t = 2$ с:

$$\cos(\widehat{x, \vec{V}}) = \frac{\dot{x}}{V} = \frac{2,888}{2,942} = 0,979; \quad (\widehat{x, \vec{V}}) = 11^\circ 46';$$

$$\cos(\widehat{y, \vec{V}}) = \frac{\dot{y}}{V} = \frac{0,6}{2,942} = 0,204; \quad (\widehat{y, \vec{V}}) = 78^\circ 14'.$$

Вектор швидкості точки M зображено на рис. 11.29.

Визначаємо проекції вектора прискорення точки M на осі координат:

$$W_x = \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(0,72t^2) = 1,44 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_y = \ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}(0,6t) = 0.$$

Проекції вектора прискорення точки M на осі координат не залежать від часу t .

Величину вектора прискорення точки M дістанемо з формули

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{1,44^2} = 1,44 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Визначаємо напрямні косинуси вектора прискорення точки M :

$$\cos(\widehat{x, \vec{W}}) = \frac{\ddot{x}}{W} = \frac{1,44}{1,44} = 1; \quad (\widehat{x, \vec{W}}) = 0^\circ;$$

$$\cos(\widehat{y, \vec{W}}) = \frac{\ddot{y}}{W} = 0; \quad (\widehat{y, \vec{W}}) = 90^\circ.$$

Вектор прискорення \vec{W} точки M у момент часу $t = 2$ с зображено на рис. 11.30.

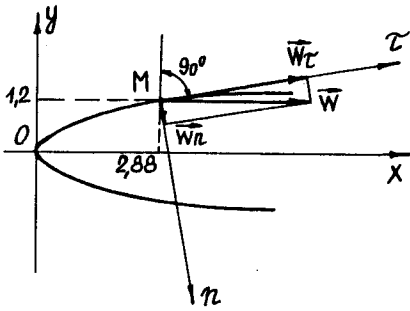


Рис. 11.30

Радіус кривини траєкторії в точці M визначаємо за формулою

$$\rho = \frac{V^2}{W_n}. \quad (1)$$

Величину нормального прискорення точки M знайдемо за формулою

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}. \quad (2)$$

Величину дотичного прискорення точки M у момент часу $t = 2$ с дістанемо з формули

$$W_\tau = \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{V} = \frac{1,44t \cdot 1,44 + 0,6 \cdot 0}{2,942} = \frac{1,44^2 \cdot 2}{2,942} = 1,41 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тоді з рівняння (2) маємо

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{1,44^2 - 1,41^2} = 0,29 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Отже, радіус кривини траєкторії точки M у момент часу $t = 2$ с

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{2,942^2}{0,29} = 10,1 \text{ (м)}.$$

Натуральні осі координат, а також вектори дотичного і нормального прискорення точки M зображено на рис. 11.30.

Приклад 11.3. Для переміщення штучних вантажів у цеху готової продукції кондитерської фабрики встановлений безпривідний роликівий конвеєр, по якому в жорсткій тарі переміщується готова продукція під власною вагою.

Прямолинійна ділянка конвеєра AB нахилена до горизонту під кутом $\alpha_1 = 4^\circ$, а криволінійна — під кутом $\alpha_2 = 6^\circ$.

Довжина прямолинійної ділянки конвеєра $L_{AB} = 20$ м, кут повороту криволінійної ділянки конвеєра $\beta = 90^\circ$, а її радіус кривини $\rho = 15$ м (рис. 11.31).

Визначити швидкість і прискорення вантажу в кінці прямолинійної і криволінійної ділянок конвеєра, а також час руху вантажу по цих ділянках, якщо в початковий момент руху вантажу його швидкість дорівнювала нулю.

Розв'язання. Розглядаємо рух вантажу по прямолинійній ділянці конвеєра AB у декартовій системі координат Axy (рис. 11.32).

Вантаж на ділянці AB рухається зі змінною швидкістю \vec{V} і сталим прискоренням \vec{W} , величина якого визначається за формулою

$$W = g_x = g \sin \alpha_1,$$

де g — прискорення вільного падіння.

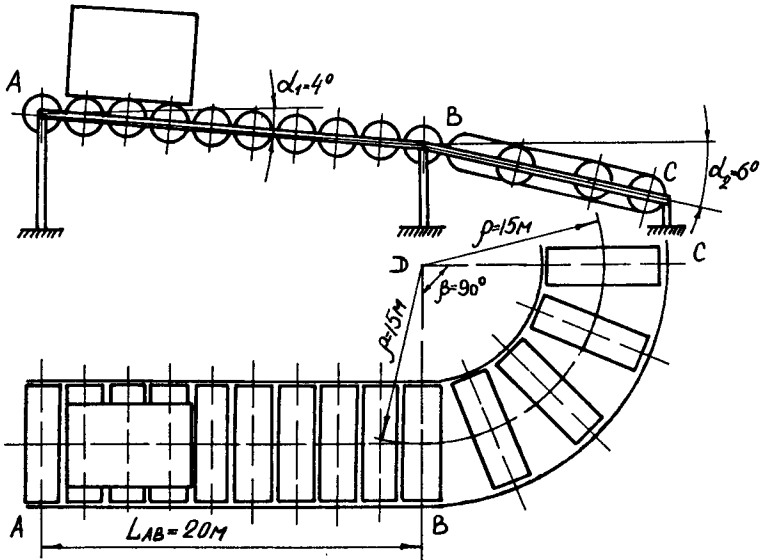


Рис. 11.31

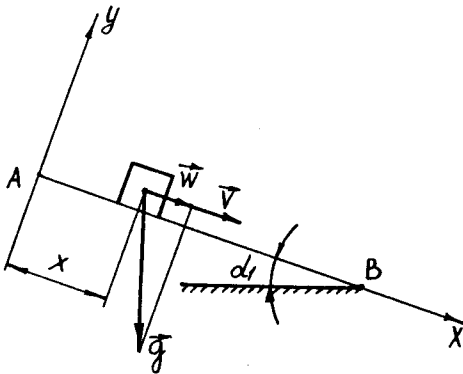


Рис. 11.32

На підставі співвідношення $\frac{dV_x}{dt} = W_x$,

де V_x і W_x — відповідно проекції векторів швидкості і прискорення вантажу на вісь x , і оскільки вантаж рухається по прямій і вісь x збігається з цією прямою, то $V = V_x$, $W = W_x$ і розглянуте співвідношення набирає вигляду

$$\frac{dV}{dt} = W,$$

звідки $dV = Wdt$. Інтегруючи це рівняння в межах від V_0 (швидкість вантажу в початковий момент руху, тобто в точці A) до V (швидкість вантажу в довільний момент руху) і від t_0 (початковий момент часу, що відповідає початковому моменту руху вантажу) до t (довільний момент часу, що відповідає довільному моменту руху вантажу), тобто

$$\int_{V_0}^V dV = \int_{t_0}^t Wdt,$$

дістанемо

$$V = Wt = gt \sin \alpha_1, \quad (1)$$

оскільки в початковий момент руху вантажу, тобто в момент $t_0 = 0$, $V_0 = 0$.

На підставі співвідношення $V_x = \frac{dx}{dt}$, або, що те саме, $V = \frac{dx}{dt}$, маємо

$$dx = V dt.$$

З урахуванням виразу (1) це рівняння набирає вигляду

$$dx = gt \sin \alpha_1 dt.$$

Інтегруючи це рівняння в межах від x_0 (координата вантажу в початковий момент руху) до x (координата вантажу в довільний момент руху) і від t_0 (початковий момент часу, що відповідає початковому моменту руху) до t (довільний момент часу, що відповідає довільному моменту руху), тобто

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t gt \sin \alpha_1 dt,$$

дістанемо

$$x = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha_1, \quad (2)$$

оскільки в початковий момент руху вантажу, тобто в момент $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ (вантаж розміщений в точці A , рис. 11.32).

Рівняння (1) — це закон зміни швидкості вантажу на ділянці AB , а рівняння (2) — це закон руху вантажу на ділянці AB .

З рівняння (2) визначаємо час руху вантажу від точки A до точки B :

$$T = \sqrt{\frac{2x}{g \sin \alpha_1}} = \sqrt{\frac{2L_{AB}}{g \sin \alpha_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9,81 \sin 4^\circ}} = 7,63 \text{ (с)}.$$

З рівняння (1) визначаємо швидкість вантажу в кінці прямолінійної ділянки конвеєра (в точці B):

$$V_B = gt \sin \alpha_1 = gT \sin \alpha_1 = 9,81 \cdot 7,63 \cdot 0,07 = 5,24 \text{ (м/с)}.$$

Прискорення вантажу під час руху по прямолінійній ділянці AB знайдемо за формулою

$$W = g \sin \alpha_1 = 9,81 \sin 4^\circ = 9,71 \cdot 0,07 = 0,69 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Розглядаємо рух вантажу по криволінійній ділянці конвеєра BC у натуральній системі координат (рис. 11.33).

Вантаж на ділянці BC рухається зі змінною швидкістю \vec{V}_1 і сталим дотичним прискоренням \vec{W}_r , величина

$$W_r = g \sin \alpha_2 = 9,81 \sin 6^\circ = 1,02 \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad (3)$$

де g — прискорення вільного падіння.

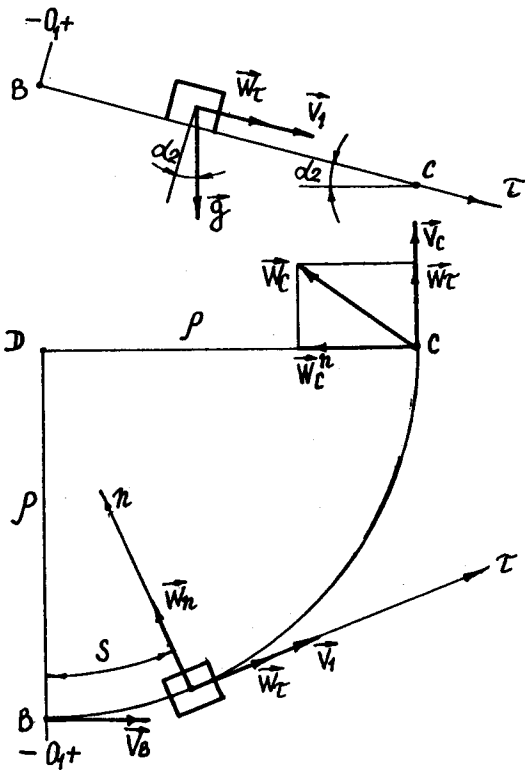


Рис. 11.33

На підставі співвідношення

$$\frac{dV_\tau}{dt} = W_\tau \text{ маємо}$$

$$dV_\tau = W_\tau dt.$$

Інтегруючи це рівняння в межах від V_B (швидкість вантажу в положенні B) до V (швидкість вантажу в довільний момент руху) і від t_0 (початковий момент часу $t_0 = 0$) до t (довільний момент часу):

$$\int_{V_B}^V dV_\tau = \int_{t_0}^t W_\tau dt,$$

дістанемо

$$V_\tau = V_B + W_\tau t = V_B + gt \sin \alpha_2, \quad (4)$$

оскільки $W_\tau = \text{const}$.

На підставі співвідношення

$$V_\tau = \frac{dS}{dt} \text{ маємо}$$

$$dS = V_\tau dt.$$

З урахуванням виразу (4) це рівняння набирає вигляду

$$dS = V_B + gt \sin \alpha_2.$$

Інтегруючи це рівняння в межах від S_0 (координата вантажу в положенні B) до S (координата вантажу в довільний моменту руху) і t_0 (початковий момент часу $t_0 = 0$) до t (довільний момент часу):

$$\int_{S_0}^S dS = \int_{t_0}^t (V_B + gt \sin \alpha_2) dt,$$

дістанемо

$$S = V_B t + \frac{gt^2}{2} \sin \alpha_2, \quad (5)$$

оскільки $S_0 = 0$ (координата вантажу в положенні B).

Рівняння (4) — це закон зміни швидкості вантажу на ділянці BC, а рівняння (5) — це закон руху вантажу на ділянці BC.

З рівняння (5) визначаємо час руху вантажу від точки B до точки C.

З рис. 11.33 випливає, що координата S у кінцевому положенні вантажу (точка C)

$$S = 0,5\pi\rho.$$

Тоді рівняння (5) набирає вигляду

$$0,5\pi\rho = V_B t + \frac{gt^2}{2} \sin \alpha_2,$$

або

$$\frac{gt^2}{2} \sin \alpha_2 + V_B t - 0,5\pi\rho = 0.$$

Підставляючи в це рівняння числові значення, дістанемо

$$t^2 + 10,27t - 46,2 = 0,$$

звідки знайдемо час руху вантажу на ділянці BC :

$$T_1 = -\frac{10,27}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10,27}{2}\right)^2 + 46,2} = -5,13 \pm 8,52.$$

Остаточно

$$T_1 = -5,13 + 8,52 = 3,39 \text{ (с)},$$

оскільки час не може бути від'ємним.

Швидкість вантажу в точці C визначаємо за формулою (4)

$$V_C = V_B + gT_1 \sin \alpha_2 = 5,24 + 9,81 \cdot 3,39 \sin 6^\circ = 8,72 \text{ (м/с)}.$$

Вектор прискорення вантажу в кінці криволінійної ділянки конвеєра дорівнює геометричній сумі векторів дотичного прискорення \vec{W}_τ і нормального прискорення вантажу в точці \vec{W}_C^n :

$$\vec{W}_C = \vec{W}_\tau + \vec{W}_C^n.$$

Величина вектора прискорення вантажу \vec{W}_C

$$W_C = \sqrt{(W_\tau)^2 + (W_C^n)^2}. \quad (6)$$

Визначаємо проекцію вектора прискорення \vec{W}_C на нормаль у точці C :

$$W_C^n = \frac{V_C^2}{\rho} = \frac{8,72^2}{15} = 5,1 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

З формули (6) визначаємо величину прискорення вантажу в точці C :

$$W_C = \sqrt{(W_\tau)^2 + (W_C^n)^2} = \sqrt{1,02^2 + 5,1^2} = 5,2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Приклад 11.4. Розвантажування зерна на пивоварних заводах здійснюється за допомогою автомобільного розвантажувача, схему якого подано на рис. 11.34, де 1 — рухома платформа; 2 — підйомник; 3 — приймальний бункер. Кут піднімання рухомої платформи розвантажувача дорівнює α .

Визначити, на якій відстані L від точки A автомобіля, що розвантажувється, необхідно розмістити приймальний бункер, щоб зерно попадало в його середину (точка B), якщо відстань від краю бункера до точки A дорівнює h і початкова швидкість зерна дорівнює V_0 .

Розв'язання. Розглянемо рух частинки M разом із зерном у декартовій системі координат Oxy (рис. 11.34 і рис. 11.35). Координати точки A в цій системі такі: $x_A = 0$, $y_A = h$, а координати точки B — $x_B = 0$, $y_B = L$.

У довільний момент часу проекції вектора прискорення частинки M на координатній осі

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = 0; \quad W_y = \frac{dV_y}{dt} = -g,$$

де g — прискорення вільного падіння.

З цих виразів отримуємо два диференціальних рівняння:

$$dV_x = 0; \quad dV_y = -gdt.$$

Інтегруючи ці рівняння:

$$\int dV_x = 0, \quad \int dV_y = -\int gdt,$$

здобудемо:

$$V_x = c_1; \tag{1}$$

$$V_y = -gt + c_2, \tag{2}$$

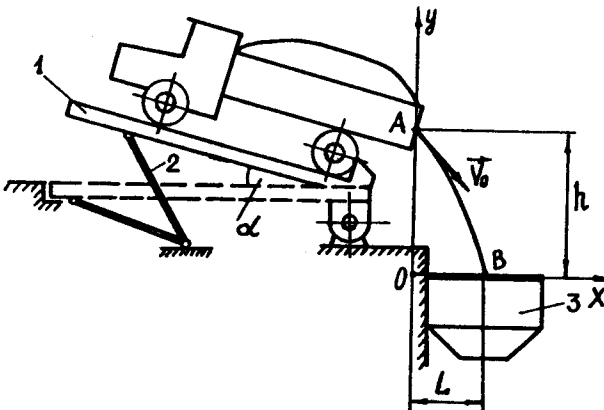


Рис. 11.34

де c_1 і c_2 — сталі інтегрування. Сталі c_1 і c_2 визначаємо з початкових умов руху частинки M , тобто в момент $t = 0$: $V_x = V_0 \cos \alpha$; $V_y = V_0 \sin \alpha$ (рис. 11.35). Підставляючи ці умови руху частинки M у рівняння (1) і (2), дістанемо:

$$c_1 = V_0 \cos \alpha; \quad c_2 = V_0 \sin \alpha.$$

Тоді рівняння (1) і (2) набувають вигляду:

$$V_x = V_0 \cos \alpha;$$

$$V_y = -gt + V_0 \sin \alpha.$$

Враховуючи, що $V_x = \frac{dx}{dt}$, а $V_y = \frac{dy}{dt}$, останні рівняння запишемо так:

$$dx = V_0 \cos \alpha dt;$$

$$dy = -gdt + V_0 \sin \alpha dt.$$

Інтегруючи ці рівняння:

$$\int dx = \int V_0 \cos \alpha dt;$$

$$\int dy = -\int gdt + \int V_0 \sin \alpha dt,$$

здобудемо:

$$x = V_0 t \cos \alpha + c_3; \quad (3)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin \alpha + c_4, \quad (4)$$

де c_3 і c_4 — сталі інтегрування. Сталі c_3 і c_4 визначаємо з початкових умов руху частинки M , тобто в момент $t = 0$: $x_0 = 0$; $y_0 = h$ (рис. 11.35). Тоді з рівнянь (3) і (4) маємо:

$$c_3 = 0; \quad c_4 = h.$$

Сталі c_3 і c_4 підставляємо в рівняння (3) і (4); матимемо рівняння руху частинки M :

$$x = V_0 t \cos \alpha;$$

$$y = h - \left(V_0 t \sin \alpha + \frac{gt^2}{2} \right).$$

Визначимо траєкторію руху частинки M . Для цього з рівнянь руху треба виключити час t . Знайдемо значення t з першого рівняння і підставимо в друге. Матимемо:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}; \quad y = h - \left(\frac{V_0 \sin \alpha \cdot x}{V_0 \cos \alpha} + \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = h - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} - \frac{x \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Отже, траєкторія руху частинки M є параболою.

Щоб визначити відстань L , підставляємо в рівняння траєкторії частинки $x = L$, $y = 0$. Матимемо

$$h - \frac{gL^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} - L \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0,$$

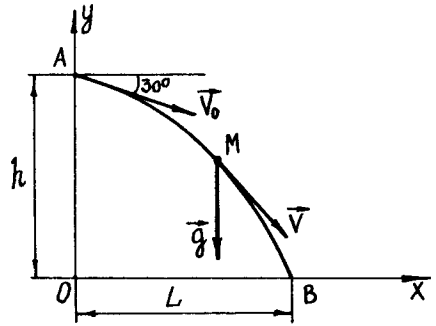


Рис. 11.35

або

$$L^2 + L \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{2hV_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, здобудемо

$$L = V_0 \cos \alpha \left(\sqrt{\frac{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2hg}{g^2}} - \frac{V_0 \sin \alpha}{g} \right).$$

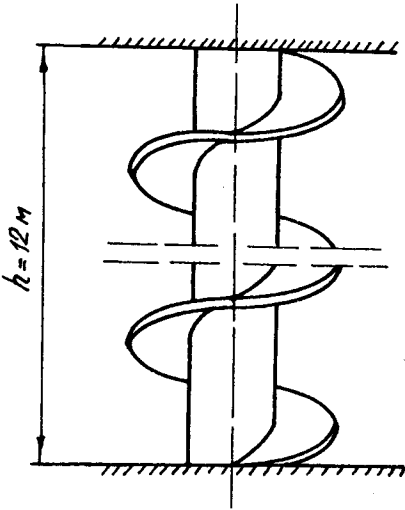


Рис. 11.36

Приклад 11.5. Для переміщення мішків з цукром з верхнього поверху на нижній в складі готової продукції цукрового заводу застосовується гвинтовий спуск, схему якого подано на рис. 11.36.

Розглядаючи мішок з цукром як матеріальну точку, визначити, скільки витків подолає мішок з цукром, спускаючись по гвинтовій лінії з висоти $h = 12 \text{ м}$, якщо рівняння його руху в циліндричній системі координат мають вигляд:

$$\rho = R = 1,5 \text{ м}; \quad \varphi = -2t \text{ рад}; \quad z = h - 0,76t \text{ м}.$$

Визначити також закон руху мішка по гвинтовій лінії і його швидкість та прискорення в момент часу $t = 5 \text{ с}$.

Розв'язання. Зв'язок між декартовими та циліндричними координатами точки має вигляд:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z.$$

У нашому випадку ці рівняння набирають вигляду:

$$x = 1,5 \cos 2t; \quad y = -1,5 \sin 2t; \quad z = 12 - 0,76t.$$

З перших двох рівнянь випливає, що проекція точки M на площину xOy (рис. 11.37) описує коло за час, що дорівнює $t = \pi$, оскільки координати x і y точки M повторюються через 2π . За цей час проекція точки M на вісь z переміщується на величину

$$h_1 = 12 - (12 - 0,76t) = 0,76\pi.$$

Величина h_1 називається кроком гвинтової лінії. Гвинтова лінія навівається на поверхню циліндра, що має радіус R .

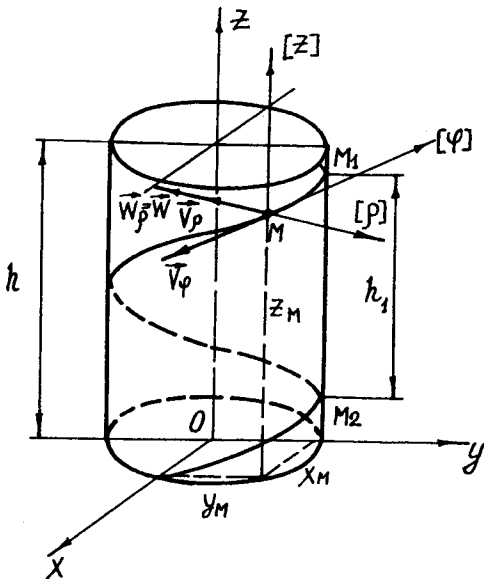


Рис. 11.37

Кількість витків, яке подолає мішок з цукром, спускаючись по гвинтовій лінії з висоти h , знайдемо за формулою

$$n = \frac{h}{h_1} = \frac{12}{0,76\pi} = \frac{12}{0,76 \cdot 3,14} = 5.$$

Закон руху мішка з цукром дістанемо з формули

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1)$$

Визначимо проєкції вектора швидкості мішка з цукром на осі координат:

$$\dot{x} = -3 \sin 2t; \quad \dot{y} = -3 \cos 2t; \quad \dot{z} = 0,76.$$

Підставляємо ці значення у формулу (1):

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t \sqrt{(-3 \sin 2t)^2 + (-3 \cos 2t)^2 + (-0,76)^2} dt = \\ &= \int_0^t \sqrt{9(\sin^2 2t + \cos^2 2t) - 0,58} dt = 2,9t. \end{aligned}$$

Таким чином, закон руху мішка з цукром по гвинтовій лінії має вигляд

$$S = 2,9t,$$

якщо відлічувати додатне значення дуги за рухом стрілки годинника. Рух починається від точки з координатами $x_0 = 1,5$ м, $y_0 = 0$ м, $z_0 = 12$ м і відбувається по гвинтовій лінії за рухом стрілки годинника.

Щоб визначити швидкість мішка з цукром у момент часу $t = 5$ с, знайдемо проєкції вектора швидкості мішка на циліндричні осі координат $[\rho]$, $[\varphi]$ та $[z]$:

$$V_\rho = \dot{\rho} = \frac{d}{dt}(R) = 0;$$

$$V_\varphi = \dot{\varphi}R = \frac{d}{dt}(-2tR) = -2R = -3 \text{ (м/с)};$$

$$V_z = \dot{z} = \frac{d}{dt}(h - 0,76t) = -0,76 \text{ (м/с)}.$$

Величину вектора швидкості мішка з цукром визначимо за формулою

$$V = \sqrt{V_\rho^2 + V_\varphi^2 + V_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-0,76)^2} = 3,12 \text{ (м/с)}.$$

З проведених розрахунків видно, що мішок з цукром рухається по гвинтовій лінії зі сталою швидкістю, тобто в будь-який момент часу (включаючи і момент часу $t = 5$ с) швидкість мішка з цукром $V = 3,12$ м/с.

Вектор швидкості мішка з цукром \vec{V} і його складові \vec{V}_φ та \vec{V}_z зображено на рис. 11.37.

Щоб визначити прискорення мішка з цукром у момент часу $t = 5$ с, знайдемо проекції вектора прискорення мішка з цукром на циліндричні осі координат $[\rho]$, $[\varphi]$ та $[z]$:

$$W_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = 2\rho\dot{\varphi} = -4R = -6 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0;$$

$$W_z = \ddot{z} = 0.$$

Величину вектора прискорення мішка з цукром визначаємо за формулою

$$W = \sqrt{W_\rho^2 + W_\varphi^2 + W_z^2} = \sqrt{(-6)^2} = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Як бачимо, мішок з цукром рухається по гвинтовій лінії зі сталим прискоренням, тобто в будь-який момент часу (включаючи і момент часу $t = 5$ с) прискорення мішка з цукром $W = 6 \text{ м/с}^2$. Вектор прискорення $\vec{W} = \vec{W}_\rho$ зображено на рис. 11.37.

Приклад 11.6. Для здійснення зворотно-поступального руху штовхача M живильника загортального автомата шоколадних плиток застосовується кулачковий механізм, схему якого подано на рис. 11.38. Радіус профілю кулачка в точці контакту зі штовхачем M (точка A)

$OA = r_0 + \frac{h}{2}(1 - \cos \varphi)$, де r_0 — мінімальний радіус кулачка; h — хід штовхача M .

Визначити швидкість і прискорення точки A , що належить штовхачу M , якщо пряма OA обертається зі сталою кутовою швидкістю ω ; кут повороту φ прямої OA відлічується від горизонтальної осі x і становить $\varphi = \omega t$.

Розв'язання. Розглянемо рух точки A , що належить штовхачу M , у полярній системі координат $[r]$, $[\varphi]$. Визначаємо полярні координати точки A .

Трансверсальна координата точки A — φ визначається величиною

$$\varphi = \omega t.$$

Радіальна координата точки A — r

$$r = r_0 + \frac{h}{2}(1 - \cos \omega t).$$

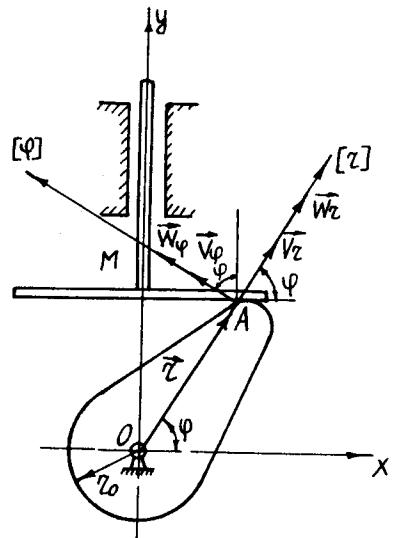


Рис. 11.38

Радіальну складову вектора швидкості точки A визначаємо за формулою

$$V_r = \dot{r} = \frac{d}{dt} \left[r_0 + \frac{h}{2} (1 - \cos \omega t) \right] = \frac{h\omega}{2} \sin \omega t.$$

Трансверсальну складову вектора швидкості точки A визначаємо за формулою

$$V_\phi = \dot{\phi} r = \frac{d}{dt} (\omega t) r = \omega \left[r_0 + \frac{h}{2} (1 - \cos \omega t) \right].$$

Вектори радіальної і трансверсальної швидкостей точки A зображено на рис. 11.38.

Оскільки штовхач M здійснює зворотно-поступальний рух уздовж осі y , то лінія дії вектора швидкості точки A , що належить штовхачу M , паралельна осі y і величина цього вектора

$$\begin{aligned} V &= V_r \sin \phi + V_\phi \cos \phi = \frac{h\omega}{2} \sin^2 \omega t + \omega \left[r_0 + \frac{h}{2} (1 - \cos \omega t) \right] \cos \omega t = \\ &= \omega \left(\frac{h}{2} \sin^2 \omega t + r_0 \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

Аналогічно знайдемо прискорення точки A , що належить штовхачу M . Радіальну складову вектора прискорення точки A визначаємо за формулою

$$W_r = \ddot{r} - \dot{\phi}^2 r = \frac{h}{2} \omega^2 \cos \omega t - \omega^2 \left[r_0 + \frac{h}{2} (1 - \cos \omega t) \right] = \omega^2 \left(r_0 + \frac{h}{2} \right).$$

Трансверсальну складову вектора прискорення точки A визначаємо за формулою

$$W_\phi = \ddot{\phi} r + 2\dot{\phi}\dot{r} = h\omega^2 \sin \omega t.$$

Оскільки штовхач M здійснює зворотно-поступальний рух уздовж осі y , то лінія дії вектора прискорення точки A , що належить штовхачу M , паралельна осі y і величина цього вектора

$$\begin{aligned} W &= W_r \sin \phi + W_\phi \cos \phi = \omega^2 \left(r_0 + \frac{h}{2} \right) \sin \omega t + h\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= \omega^2 \sin \omega t \left[\left(r_0 + \frac{h}{2} \right) + h \cos \omega t \right]. \end{aligned}$$

Вектори радіального і трансверсального прискорення точки A , а також вектор прискорення точки A штовхача M зображено на рис. 11.38.

Приклад 11.7. Відцентровий регулятор (рис. 11.39) складається з двох куль A і B . Кулі обертаються навколо осі z зі сталою кутовою швидкістю ω і з'єднані шарнірно за допомогою стрижнів OA , OB і AD , BD з муфтою D , яка може переміщуватися по вертикалі.

Визначити швидкість і прискорення куль A і B , якщо кут відхилення стрижнів OA і OB від вертикалі $\alpha = kt$, де k — стала величина, а довжина стрижнів OA і OB дорівнює R .

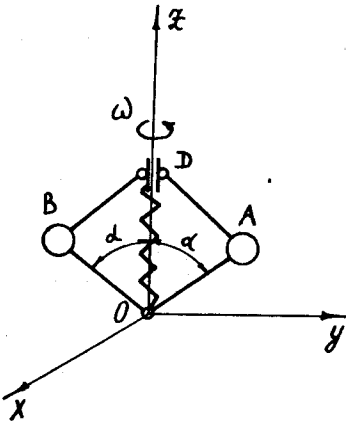


Рис. 11.39

Розв'язання. Розглянемо рух однієї кулі, наприклад A , у сферичній системі координат $[r]$, $[\theta]$, $[\varphi]$ (рис. 11.40). Сферичними координатами кулі A будуть:

$$r = R; \varphi = \omega t; \theta = \alpha = kt.$$

Визначаємо проекції вектора швидкості кулі A на сферичні осі координат:

$$V_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}(R) = 0;$$

$$V_\theta = \dot{\theta}r = \frac{d}{dt}(kt)r = kR;$$

$$V_\varphi = \dot{\varphi}r \sin \theta = \omega R \sin kt.$$

Величина швидкості кулі A

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{(kR)^2 + (\omega R \sin kt)^2} = R\sqrt{k^2 + \omega^2 \sin^2 kt}.$$

Напрямок вектора швидкості кулі A в системі координатних осей $[r]$, $[\theta]$ і $[\varphi]$ визначаємо за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos \gamma = \frac{V_\theta}{V} = \frac{kR}{R\sqrt{k^2 + \omega^2 \sin^2 kt}} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega^2 \sin^2 kt}};$$

$$\cos \beta = \frac{V_\varphi}{V} = \frac{\omega R \sin kt}{R\sqrt{k^2 + \omega^2 \sin^2 kt}} = \frac{\omega \sin kt}{\sqrt{k^2 + \omega^2 \sin^2 kt}}.$$

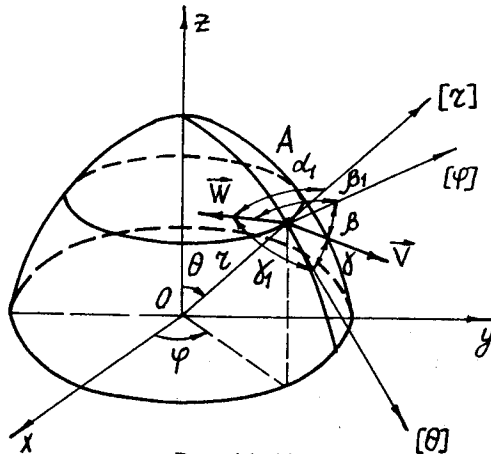


Рис. 11.40

Кути γ , β і вектор швидкості кулі A в довільний момент часу зображено на рис. 11.40.

Визначаємо проекції вектора прискорення кулі A на сферичні осі координат:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2 = -Rk^2 - R\omega^2 \sin^2 kt = -R(k^2 + \omega^2 \sin^2 kt);$$

$$W_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\phi}^2 = -R\omega^2 \sin kt \cos kt;$$

$$W_\phi = r \sin \theta \cdot \ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r \cos \theta \cdot \dot{\theta}\dot{\phi} = 2Rk\omega \cos kt.$$

Величина прискорення кулі A

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{W_r^2 + W_\theta^2 + W_\phi^2} = \\ &= \sqrt{[-R(k^2 + \omega^2 \sin^2 kt)]^2 + (-R\omega^2 \sin kt \cos kt)^2 + (2Rk\omega \cos kt)^2} = \\ &= R\sqrt{k^4 + 2k^2\omega^2(\sin^2 kt + 2\cos^2 kt) + \omega^2\left(\omega^2 \sin^4 kt + \frac{1}{4}\sin^2 2kt\right)}. \end{aligned}$$

Напрямок вектора прискорення кулі A в системі координатних осей $[r]$, $[\theta]$

і $[\phi]$ визначаємо за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos \alpha_1 = \frac{W_r}{W} = -\frac{R(k^2 + \omega^2 \sin^2 kt)}{W};$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{W_\theta}{W} = -\frac{R\omega^2 \sin kt \cos kt}{W};$$

$$\cos \beta_1 = \frac{W_\phi}{W} = \frac{2Rk\omega \cos kt}{W},$$

де

$$W = \sqrt{k^4 + 2k^2\omega^2(\sin^2 kt + 2\cos^2 kt) + \omega^2\left(\omega^2 \sin^4 kt + \frac{1}{4}\sin^2 2kt\right)}.$$

Кути α_1 , γ_1 , β_1 і вектор прискорення кулі A в довільний момент часу подано на рис. 11.40.

Запитання для самоперевірки

1. Які характеристики механічного руху твердих тіл та його точок вивчає кінематика?

2. Що означає визначити (задати) рух твердих тіл та його точок?

3. Яка змінна величина у кінематиці розглядається як незалежна?

4. У чому полягає основне завдання кінематики?

5. Які моделі матеріальних тіл є предметом дослідження в кінематиці?

6. У чому полягає векторний спосіб задання руху точки?
7. У чому полягає координатний (декартові координати) спосіб задання руху точки?
8. Яким є співвідношення між координатним (декартові координати) та векторним способами задання руху точки?
9. Чим є траєкторія точки при векторному способі задання її руху?
10. Як за кінематичним рівнянням руху точки в координатній (декартові координати) формі визначити її траєкторію?
11. Що таке годограф векторної функції і як його будують?
12. Як визначити вектор швидкості точки при векторному способі задання руху точки?
13. Який механічний зміст поняття швидкості руху точки?
14. Як визначити вектор швидкості точки при координатному (декартові координати) способі задання руху точки?
15. Що таке напрямні косинуси вектора швидкості точки і як їх визначити?
16. Як визначається модуль вектора швидкості точки при координатному (декартові координати) способі задання руху точки?
17. Що таке годограф вектора швидкості точки і якими є його параметричні рівняння в нерухомій декартовій системі координат?
18. Який вигляд має годограф вектора швидкості точки при її рівномірному русі по криволінійній траєкторії, яка розміщена в одній площині?
19. Який вигляд має годограф вектора швидкості точки при її прямолінійному рівномірному русі?
20. Який вигляд має годограф вектора швидкості точки при її прямолінійному змінному русі?
21. Як визначається вектор прискорення точки при векторному способі задання руху точки?
22. Який механічний зміст поняття прискорення руху точки?
23. Як визначається вектор прискорення точки при координатному способі задання руху точки?
24. Що таке напрямні косинуси вектора прискорення точки і як їх визначити?
25. Як визначається модуль вектора прискорення точки при координатному способі задання руху точки?
26. Чому дорівнює похідна від вектора, що має сталий модуль, за скалярним аргументом?
27. Що таке формула Пуассона?
28. Чому дорівнює абсолютна похідна від вектора, який визначений у рухомій системі відліку?
29. Як задати рух точки натуральним способом?
30. Яка відміна між поняттям “шлях” і “дугова координата” точки?
31. Що таке стична площина в натуральній системі координат?
32. Що таке осі натуральної системи координат?

33. Як визначається вектор швидкості точки при натуральному способі задання її руху?
34. Як визначити проекції вектора швидкості точки на осі натуральної системи координат?
35. Як визначається вектор прискорення точки при натуральному способі задання її руху?
36. Як визначити проекції вектора швидкості точки на осі натуральної системи координат?
37. В якій площині натурального тригранника лежить вектор прискорення?
38. Що характеризують вектори дотичного та нормального прискорення точки?
39. Як визначається модуль вектора прискорення точки при натуральному способі задання її руху?
40. Як визначаються напрямні косинуси вектора прискорення точки в натуральній системі координат?
41. Як здійснити перехід від координатного способу задання руху точки до натурального?
42. Що таке криволінійні координати точки?
43. Як визначити коефіцієнти Ламе?
44. Як записуються аналітичні умови ортогональності криволінійних координат?
45. Як визначається вектор швидкості точки в криволінійних координатах?
46. Як визначається модуль вектора швидкості та модуль вектора прискорення точки в криволінійних координатах?
47. Що таке полярні координати точки?
48. Як визначається вектор швидкості точки в полярній системі координат?
49. Як визначаються проекції швидкості точки на координатні осі полярної системи координат?
50. Як визначити напрям вектора швидкості точки відносно осей полярної системи координат?
51. Як визначається вектор прискорення точки в полярній системі координат?
52. Як визначаються проекції вектора прискорення точки на координатні осі полярної системи координат?
53. Як визначається напрям вектора прискорення точки в полярній системі координат?
54. Що таке циліндричні координати точки?
55. Як визначається вектор швидкості точки в циліндричній системі координат?
56. Як визначаються проекції вектора швидкості точки на координатні осі циліндричної системи координат?
57. Як визначити напрям вектора швидкості точки відносно осей циліндричної системи координат?

58. Як визначити вектор прискорення точки в циліндричній системі координат?
59. Як визначаються проекції вектора прискорення точки на координатні осі циліндричної системи координат?
60. Як визначити напрям вектора прискорення точки в циліндричній системі координат?
61. Що таке сферичні координати точки?
62. Як визначається вектор швидкості точки в сферичній системі координат?
63. Як визначаються проекції вектора швидкості точки на координатні осі сферичної системи координат?
64. Як визначити напрям вектора швидкості точки на координатні осі сферичної системи координат?
65. Як визначити вектор прискорення точки в сферичній системі координат?
66. Як визначаються проекції вектора прискорення точки на координатні осі сферичної системи координат?
67. Як визначити напрям вектора прискорення точки у сферичній системі координат?

Глава 12

КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

12.1. Визначення положення вільного твердого тіла в даній системі відліку. Рівняння руху вільного твердого тіла. Кількість ступенів вільності. Основні завдання кінематики твердого тіла

Визначити положення вільного твердого тіла¹ у будь-який момент часу відносно даної системи відліку — це означає мати спосіб визначення координат кожної його точки в даній системі у будь-який момент часу. Однак це не означає, що необхідно мати нескінченну кількість рівнянь руху точок тіла. Це не так, тому що переміщення окремих точок тіла зв'язані умовою незмінності відстані між ними.

Покажемо, що координати довільної точки вільного твердого тіла і, отже, положення цього тіла відносно нерухомої системи відліку (що те саме) повністю визначаються, якщо задати шість незалежних між собою параметрів.

Нехай вільне тверде тіло рухається відносно нерухомої системи відліку, або, що те саме, відносно нерухомої системи ко-

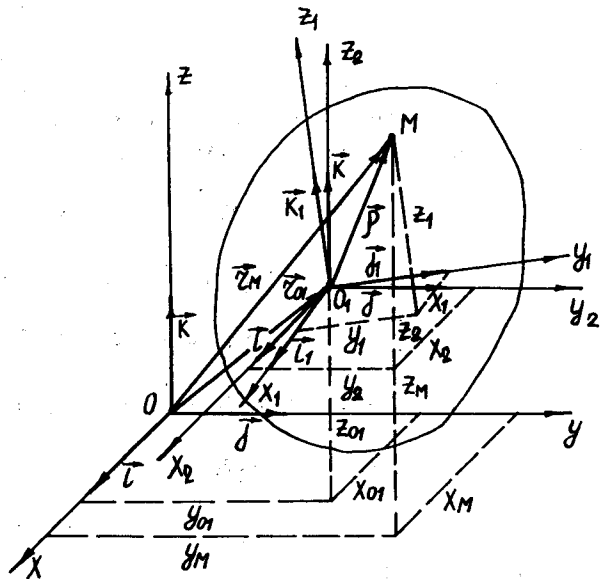


Рис. 12.1

¹ Тіло, відстань між двома будь-якими точками якого завжди залишається незмінною.

ординат $Oxyz$ (рис. 12.1). Візьмемо довільну точку тіла O_1 за полюс і зв'яжемо з цією точкою початок двох систем координат: $O_1x_2y_2z_2$ і $O_1x_1y_1z_1$, що рухається разом з тілом. Перша система $O_1x_2y_2z_2$, здійснюючи рух разом з тілом, залишається завжди паралельною нерухомій системі $Oxyz$. Друга система координат $O_1x_1y_1z_1$, здійснюючи рух разом з тілом, у будь-який момент часу займає довільне положення відносно системи координат $O_1x_2y_2z_2$, або, що те саме, відносно системи $Oxyz$.

Положення довільної точки M твердого тіла в нерухомій системі координат $Oxyz$ будемо визначати радіусом-вектором \vec{r}_m , а в рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$ — радіусом-вектором $\vec{\rho}$. Положення полюса O_1 в нерухомій системі $Oxyz$ будемо визначати радіусом-вектором \vec{r}_{O_1} . Тоді з рис. 12.1 випливає, що

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho},$$

або

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{O_1} + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1, \quad (12.1)$$

де \vec{r}_{O_1} , \vec{i}_1 , \vec{j}_1 , \vec{k}_1 — функції часу; x_1 , y_1 , z_1 — сталі.

Проекціюючи рівність (12.1) на осі нерухомої системи координат, дістанемо:

$$\begin{aligned} x_M &= x_{O_1} + x_1a_{11} + y_1a_{12} + z_1a_{13}; \\ y_M &= y_{O_1} + x_1a_{21} + y_1a_{22} + z_1a_{23}; \\ z_M &= z_{O_1} + x_1a_{31} + y_1a_{32} + z_1a_{33}, \end{aligned} \quad (12.2)$$

де x_{O_1} , y_{O_1} , z_{O_1} — координати полюса O_1 в системі $Oxyz$; x_1 , y_1 , z_1 — координати точки M в системі $O_1x_1y_1z_1$; a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{31} , a_{32} , a_{33} — косинуси кутів (напрямні косинуси) між осями координат $Oxyz$ і $O_1x_1y_1z_1$, або, що те саме, між осями координат $O_1x_2y_2z_2$ і $O_1x_1y_1z_1$, тобто:

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 \cdot \vec{i} &= \cos(\widehat{x_1, x_2}) = a_{11}; \quad \vec{i}_1 \cdot \vec{j} = \cos(\widehat{x_1, y_2}) = a_{21}; \\ \vec{i}_1 \cdot \vec{k} &= \cos(\widehat{x_1, z_2}) = a_{31}; \quad \vec{j}_1 \cdot \vec{i} = \cos(\widehat{y_1, x_2}) = a_{12}; \\ \vec{j}_1 \cdot \vec{j} &= \cos(\widehat{y_1, y_2}) = a_{22}; \quad \vec{j}_1 \cdot \vec{k} = \cos(\widehat{y_1, z_2}) = a_{32}; \\ \vec{k}_1 \cdot \vec{i} &= \cos(\widehat{z_1, x_2}) = a_{13}; \quad \vec{k}_1 \cdot \vec{j} = \cos(\widehat{z_1, y_2}) = a_{23}; \\ \vec{k}_1 \cdot \vec{k} &= \cos(\widehat{z_1, z_2}) = a_{33}. \end{aligned}$$

Напрямні косинуси a_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) зручно записувати у вигляді таблиці напрямних косинусів:

↓	x_1	y_1	z_1
$x(x_2)$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$y(y_2)$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$z(z_2)$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

За цією таблицею можна виконувати перетворення координат при переході від системи $O_1x_1y_1z_1$ до системи $O_1x_2y_2z_2$, або, що те саме, до системи $Oxyz$ і навпаки.

Рівняння (12.2) окрім сталих координат x_1, y_1, z_1 містять дванадцять функцій часу: три координати полюса $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ і дев'ять напрямних косинусів a_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$). З цих дев'яти косинусів незалежними будуть тільки три, оскільки між ними внаслідок ортогональності осей координат існують такі залежності:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1; & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0; \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1; & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0; \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1; & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Отже, положення довільної точки вільного твердого тіла відносно нерухомої системи відліку і тим самим положення тіла відносно цієї системи визначається шістьма незалежними параметрами — трьома координатами точки O_1 , яку називають *полюсом*, і трьома напрямними косинусами.

Рівняння (12.2) називають *кінематичними рівняннями руху вільного твердого тіла*.

Кількість незалежних між собою параметрів, які цілком однозначно визначають положення вільного твердого тіла, або, що те саме, положення кожної його точки відносно системи відліку, називається *кількістю ступенів вільності тіла*.

Отже, з розглянутого випливає, що вільне тверде тіло має шість ступенів вільності.

Основними завданнями кінематики твердого тіла є:

- 1) встановлення способів задання руху твердого тіла і вивчення кінематичних характеристик, властивих тілу;
- 2) визначення руху точок твердого тіла, тобто визначення траєкторій, швидкостей і прискорень окремих точок тіла.

12.2. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним рухом твердого тіла називається такий рух, за якого довільна пряма, проведена в тілі, залишається при русі тіла паралельною своєму початковому положенню.

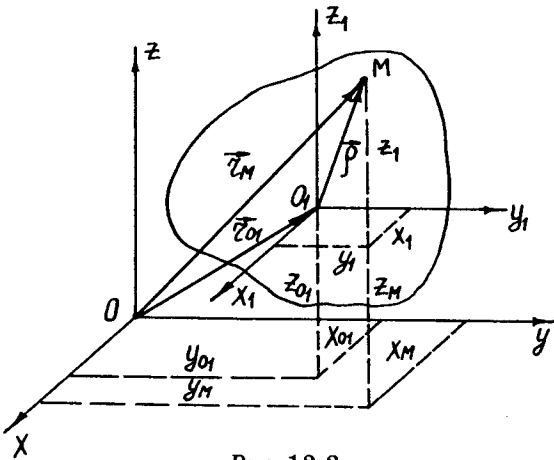


Рис. 12.2

Нехай тверде тіло рухається поступально відносно нерухомої системи координат $Oxyz$. Візьмемо в тілі довільну точку O_1 (поліус) і зв'яжемо з цією точкою початок системи координат $O_1x_1y_1z_1$, що рухається разом з тілом (рис. 12.2). Оскільки тіло рухається поступально, то осі координат $O_1x_1y_1z_1$, будучи у початковий момент руху паралельними осям координат нерухомої системи $Oxyz$, залишаються такими і в будь-який момент часу руху тіла.

На підставі формули (12.1) координати довільної точки M твердого

тіла, що рухається поступально (рис. 12.2), і, отже, положення самого тіла відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned}x_M &= x_{O_1} + x_1 a_{11} + y_1 a_{12} + z_1 a_{13} = x_{O_1} + x_1; \\y_M &= y_{O_1} + x_1 a_{21} + y_1 a_{22} + z_1 a_{23} = y_{O_1} + y_1; \\z_M &= z_{O_1} + x_1 a_{31} + y_1 a_{32} + z_1 a_{33} = z_{O_1} + z_1,\end{aligned}\quad (12.4)$$

оскільки $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$.

У формулах (12.4) x_1, y_1, z_1 — сталі; x_{O_1}, y_{O_1} і z_{O_1} — функції часу, тобто:

$$x_{O_1} = f_1(t); \quad y_{O_1} = f_2(t); \quad z_{O_1} = f_3(t).\quad (12.5)$$

Як видно з рис. 12.2,

$$\vec{r}_{O_1} = \vec{r}_{O_1}(t).\quad (12.6)$$

Функції (12.5) і (12.6) називаються *кінематичними рівняннями поступального руху твердого тіла*.

Таким чином, поступальний рух твердого тіла визначається трьома незалежними параметрами — координатами довільної точки O_1 (поліуса). Отже, тіло, що здійснює поступальний рух, має три ступеня вільності.

З рівнянь (12.4) випливає, що траєкторії точок тіла при поступальному русі однакові й утворюються одна з одної шляхом паралельного зміщення.

Визначимо швидкість і прискорення довільної точки M твердого тіла, що рухається поступально. За визначенням швидкості точки маємо

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} = \vec{V}_{O_1},\quad (12.7)$$

через те що вектор $\vec{\rho} = c\text{onst}$ згідно з визначенням поступального руху.

Взявши другу похідну з виразу (12.7), дістанемо

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{O_1}. \quad (12.8)$$

З розглянутого випливає, що поступальний рух твердого тіла повністю характеризується рухом однієї його точки, за яку беруть початок O_1 рухомої системи координат, що незмінно зв'язана з тілом. Точку O_1 називають полюсом, а траєкторію, швидкість і прискорення полюса — відповідно траєкторією, швидкістю і прискоренням поступального руху твердого тіла. Тому всі закономірності, про які йшлося в главі 11, будуть справедливими і для вивчення поступального руху твердого тіла в цілому.

12.3. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.

Закон руху тіла. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, за якого будь-які дві точки тіла залишаються нерухомими. Пряма, проведена через ці дві нерухомі точки, називається *нерухомою віссю обертання*.

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі. Візьмемо на осі обертання дві точки O і A і введемо нерухому систему координат $Oxyz$ з початком в точці O і віссю z , що проходить через точку A (рис. 12.3). Побудуємо ще рухому систему координат $Ox_1y_1z_1$, незмінно зв'язану з твердим тілом так, що вісь Oz_1 збігається з віссю обертання Oz .

На підставі формули (12.1) координати довільної точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, і, отже, положення самого тіла відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned} x_M &= x_{O_1} + x_1 a_{11} + y_1 a_{12} + z_1 a_{13} = x_1 a_{11} + y_1 a_{12}; \\ y_M &= y_{O_1} + x_1 a_{21} + y_1 a_{22} + z_1 a_{23} = x_1 a_{21} + y_1 a_{22}; \\ z_M &= z_{O_1} + x_1 a_{31} + y_1 a_{32} + z_1 a_{33} = z_1, \end{aligned} \quad (12.9)$$

де $x_{O_1} = y_{O_1} = z_{O_1} = 0$, $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0$, $a_{12} = -\sin \varphi$, $a_{21} = \sin \varphi$, $a_{11} = a_{22} = \cos \varphi$.

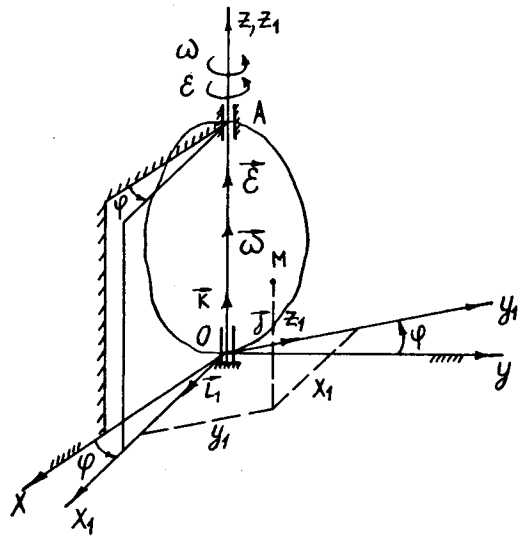


Рис. 12.3

У формулах (12.9) x_1, y_1, z_1 — сталі; $a_{12}, a_{21}, a_{11}, a_{22}$ — функції часу, оскільки

$$\varphi = \varphi(t). \quad (12.10)$$

Таким чином, обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі визначається одним параметром — кутом повороту φ . Отже, тіло, що здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, має один ступінь вільності.

Функція (12.10) називається *кінематичним рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі*.

Для вимірювання кута φ розглядають дві півплощини (рис. 12.3), які проходять через вісь обертання, причому одна з них нерухома, а друга незмінно зв'язана з тілом, яке обертається. Тоді двограний кут між цими двома півплощинами і буде кутом повороту твердого тіла φ . Визначення знака кута φ здійснюють так. Якщо з боку додатного напрямку осі Oz перехід від нерухомої півплощини до рухомої відбувається проти руху годинникової стрілки, то кут повороту φ вважається додатним, у протилежному випадку він від'ємний. Кут φ вимірюється в радіанах.

Зміну кута повороту твердого тіла φ з часом характеризує фізична величина кутова швидкість. Як було зазначено в параграфі 11.3, *кутова швидкість* — це вектор, напрямлений по осі обертання в той бік, з якого спостерігач бачить обертання, яке здійснює тіло, проти руху стрілки годинника:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}. \quad (12.11)$$

Величина вектора кутової швидкості дорівнює границі відношення приросту кута повороту $\Delta\varphi$ до проміжку часу Δt , протягом якого відбувся цей поворот при Δt , що прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (12.12)$$

Отже, кутова швидкість за величиною дорівнює першій похідній за часом від кута повороту φ . У системі СІ кутова швидкість має розмірність [рад/с] або [1/с]. У техніці кутову швидкість часто визначають за формулою

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}, \quad (12.13)$$

де n — кількість обертів тіла за хвилину.

Зміну кутової швидкості з часом характеризує фізична величина кутове прискорення. *Кутове прискорення тіла* — це вектор, напрямлений по дотичній до годографа вектора кутової швидкості, тобто по осі обертання твердого тіла:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k}. \quad (12.14)$$

Величина вектора кутового прискорення дорівнює границі відношення приросту кутової швидкості $\Delta\omega$ до проміжку часу Δt , протягом якого відбувся цей приріст при Δt , що прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\phi}. \quad (12.15)$$

Отже, кутове прискорення твердого тіла дорівнює першій похідній від кутової швидкості за часом або другій похідній від кута повороту тіла за часом. У системі СІ кутове прискорення має розмірність $[\text{рад}/\text{с}^2]$ або $[1/\text{с}^2]$.

Якщо вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ має напрям у той бік, що і вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$, тобто $\dot{\phi}$ і $\ddot{\phi}$ мають однакові знаки, то рух твердого тіла буде прискореним; якщо вектори $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ мають різні напрями, тобто $\dot{\phi}$ і $\ddot{\phi}$ мають різні знаки, то рух твердого тіла буде сповільненим.

Кутова швидкість ω і кутове прискорення ε твердого тіла ще часто зображують у вигляді кутових стрілок (рис. 12.3). Кутова стрілка кутової швидкості ω показує напрям приросту кута повороту ϕ , тобто напрям обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Кутова стрілка кутового прискорення ε показує напрям приросту кутової швидкості.

12.4. Рівномірне і рівнозмінне обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

*Якщо кутова швидкість твердого тіла залишається при русі тіла сталою величиною ($\omega = \text{const}$), то обертання тіла називається **рівномірним**.* Виведемо кінематичний закон рівномірного обертання тіла. На підставі формули (12.12) маємо $d\phi = \omega dt$. Інтегруючи цей вираз:

$$\int d\phi = \int \omega dt,$$

здобудемо

$$\phi = \omega t + c_1,$$

де c_1 — стала інтегрування.

Визначаємо c_1 з початкових умов руху. Нехай при $t = 0$ $\phi(0) = \phi_0$. Тоді з останнього рівняння випливає, що $c_1 = \phi_0$, і остаточно маємо

$$\phi = \phi_0 + \omega t. \quad (12.16)$$

Рівність (12.16) — це кінематичний закон рівномірного обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Якщо кутове прискорення твердого тіла при русі тіла залишається сталою величиною ($\varepsilon = \text{const}$), то обертання тіла називається *рівнозмінним*. Виведемо кінематичний закон рівнозмінного обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. На підставі формули (12.15) маємо

$$d\omega = \varepsilon dt.$$

Інтегруючи це рівняння:

$$\int d\omega = \int \varepsilon dt,$$

здобудемо

$$\omega = \varepsilon t + c_2,$$

де c_2 — стала інтегрування.

Визначаємо c_2 з початкових умов руху. Нехай при $t = 0$ $\omega(0) = \omega_0$. Тоді з останнього рівняння випливає, що $c_2 = \omega_0$, і остаточно матимемо

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (12.16a)$$

Рівність (12.16a) — це *кінематичний закон зміни кутової швидкості при рівнозмінному обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі*.

Підставляючи у формулу (12.16a) замість ω її значення за формулою (12.12), матимемо

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t,$$

або

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt.$$

Інтегруючи це рівняння, здобудемо

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + c_3,$$

де c_3 — стала інтегрування.

Визначаємо c_3 з початкових умов руху. Нехай при $t = 0$ $\varphi(0) = \varphi_0$; тоді з останнього рівняння випливає, що $c_3 = \varphi_0$, і остаточно маємо

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (12.17)$$

Рівність (12.17) — це *кінематичний закон рівнозмінного обертання твердого тіла навколо нерухомої осі*. Якщо при русі твердого тіла величини ω і ε мають однакові знаки, то обертання тіла буде *рівноприскореним*, а якщо різні — *рівносповільненим*.

12.5. Визначення швидкості точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю ω (рис. 12.4). Побудуємо дві системи координат — нерухому систему $Oxyz$ і рухому систему $Ox_1y_1z_1$, незмінно зв'язану з тілом, що обертається.

Позначимо одиничні вектори осей x_1, y_1, z_1 відповідно $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ (рис. 12.4). Візьмемо в тілі довільну точку M . Радіус-вектор цієї точки подамо у вигляді

$$\vec{r} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1, \quad (12.18)$$

де x_1, y_1, z_1 — координати точки M у системі $Ox_1y_1z_1$ (сталі величини); $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ — одиничні вектори осей x_1, y_1, z_1 (функції часу).

Швидкість точки M за визначенням і на підставі формули (12.18)

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt}.$$

Вектор \vec{k}_1 — нерухомий, тому $\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{0}$

і остання рівність набирає вигляду

$$\vec{V} = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt}. \quad (12.19)$$

Розглянемо похідні $\frac{d\vec{i}_1}{dt}$ і $\frac{d\vec{j}_1}{dt}$. З рис. 12.4 випливають такі залежності:

$$\vec{i}_1 = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi;$$

$$\vec{j}_1 = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi,$$

де \vec{i} і \vec{j} — одиничні вектори нерухомої системи координат $Oxyz$. Продиференціювавши за часом останні рівності, дістанемо:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = -\vec{i} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \vec{j} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} (-\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{j}_1 = \omega \vec{j}_1;$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = -\vec{i} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \vec{j} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} (\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{i}_1 = -\omega \vec{i}_1.$$

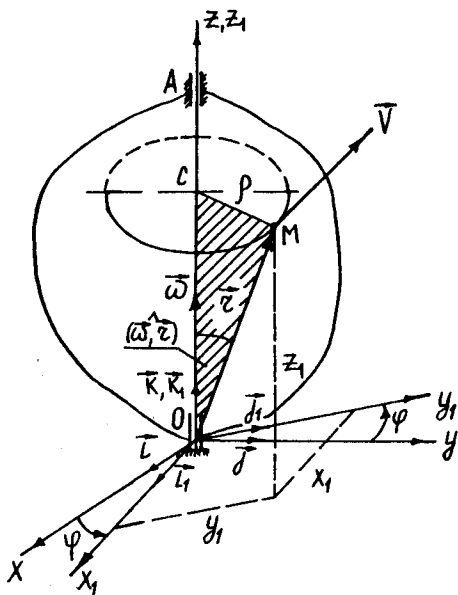


Рис. 12.4

Значення $\frac{d\vec{i}_1}{dt}$ і $\frac{d\vec{j}_1}{dt}$ підставляємо у формулу (12.19):

$$\vec{V} = x_1\omega\vec{j}_1 - y_1\omega\vec{i}_1. \tag{12.20}$$

З формули (12.20) випливає, що проекції вектора швидкості довільної точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, на рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$ такі:

$$V_{x_1} = -y_1\omega; V_{y_1} = x_1\omega; V_{z_1} = 0. \tag{12.21}$$

Розглянемо векторний добуток $\vec{\omega} \times \vec{r}$ і визначимо його проекції на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -y_1\omega\vec{i}_1 + x_1\omega\vec{j}_1. \tag{12.22}$$

Оскільки проекції векторів \vec{V} і $\vec{\omega} \times \vec{r}$ однакові, то

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{12.23}$$

З виразу (12.23) випливає, що швидкість довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки.

Формула (12.23) називається *формулою Ейлера*.

На підставі визначення векторного добутку вектор швидкості довільної точки M напрямлений уздовж перпендикуляра до площини, що утворюють вектори $\vec{\omega}$ і \vec{r} у бік обертання твердого тіла, тобто по дотичній до кола, по якому рухається точка M при обертанні тіла (рис. 12.4).

Величина (модуль) вектора швидкості точки M

$$V = \omega r \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = \omega\rho, \tag{12.24}$$

де ρ — найкоротша відстань від точки M до осі обертання (радіус обертання точки M) (рис. 12.4).

З формули (12.24) випливає, що швидкості точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, розподіляються в тілі вздовж радіуса обертання за лінійним законом, тобто при $\rho = 0$ $V = V_0 = 0$, а при $\rho = R$ $V = V_A = V_B$ (рис. 12.5).

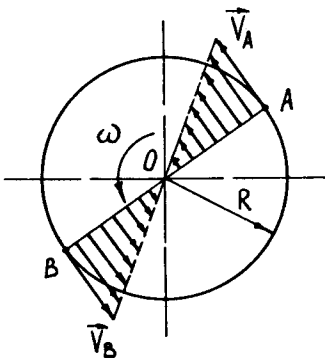


Рис. 12.5

12.6. Визначення прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Згідно з визначенням прискорення і на підставі формули (12.23) прискорення довільної точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, визначається за формулою

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Оскільки $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, а $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$, то остаточно матимемо

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{W}^{об} + \vec{W}^{доос}. \quad (12.25)$$

Отже, прискорення довільної точки M дорівнює геометричній сумі двох прискорень: обертального прискорення точки M $\vec{W}^{об}$ і доосьового прискорення точки M $\vec{W}^{доос}$. Вектор обертального прискорення

$$\vec{W}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (12.26)$$

і напрямлений перпендикулярно до площини, що утворюють вектори $\vec{\varepsilon}$ і \vec{r} у той бік, звідки найкоротший поворот від вектора $\vec{\varepsilon}$ до вектора \vec{r} такий, який здійснюється проти руху годинникової стрілки (рис. 12.6). Інакше вектор обертального прискорення $\vec{W}^{об}$ напрямлений так, як вектор швидкості \vec{V} довільної точки M тіла, якщо рух тіла прискорений, і має прямо протилежний напрям до вектора швидкості \vec{V} точки M , якщо рух тіла сповільнений. За величиною обертальне прискорення

$$W^{об} = \varepsilon r \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{r}}) = \varepsilon \rho, \quad (12.27)$$

де ρ — найкоротша відстань від точки M до осі обертання (радіус обертання точки M) (рис. 12.6).

Вектор доосьового прискорення

$$\vec{W}^{доос} = \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (12.28)$$

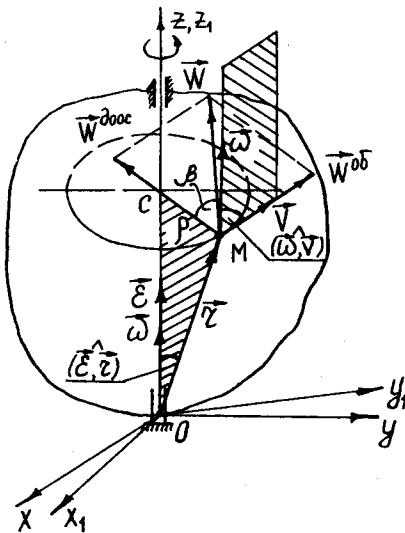


Рис. 12.6

і напрямлений перпендикулярно до площини, що утворюють вектори $\vec{\omega}$ і \vec{V} , у той бік, звідки найкоротший поворот від вектора $\vec{\omega}$ до вектора \vec{V} — проти руху стрілки годинника. Інакше вектор доосьового прискорення $\vec{W}^{\text{доос}}$ напрямлений уздовж радіуса обертання ρ точки M до осі обертання тіла. За величиною (модулем) доосьове прискорення

$$\vec{W}^{\text{доос}} = \omega V \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{V}}) = \omega V \sin \frac{\pi}{2} = \omega V = \omega^2 \rho. \quad (12.29)$$

Величина (модуль) прискорення \vec{W} довільної точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі,

$$W = \sqrt{(W^{\text{об}})^2 + (W^{\text{доос}})^2} = \sqrt{(\varepsilon \rho)^2 + (\omega^2 \rho)^2} = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (12.30)$$

Кут β , що утворюється векторами \vec{W} і $\vec{W}^{\text{доос}}$, визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|W^{\text{об}}|}{W^{\text{доос}}} = \frac{|\varepsilon \rho|}{\omega^2 \rho} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (12.31)$$

12.7. Перетворення обертальних рухів твердого тіла

При розв'язанні задач про рух різних механізмів виникає необхідність розгляду питань про перетворення найпростіших рухів одного виду в інший.

Є механізми, що перетворюють: а) обертальний рух у поступальний; б) поступальний рух в обертальний; в) один поступальний рух в інший поступальний рух; г) обертальний рух навколо однієї нерухомої осі в обертальний рух навколо іншої нерухомої осі.

Значне поширення у техніці має перетворення обертального руху навколо однієї нерухомої осі в обертальний рух навколо іншої нерухомої осі. При цьому розв'язуються два завдання: а) збільшення або зменшення кількості обертів даного привідного валу; б) зміна напрямку руху даного привідного валу. Ці завдання вирішують за допомогою двох основних видів передач: передачі, що здійснюються безпосереднім контактом тіл, які закріплюються на валах, — фрикційна, зубчаста і черв'ячна, і передачі, що здійснюються гнучкою в'яззю, — пасова, канатна, ланцюгова.

З точки зору теоретичної механіки, моделлю фрикційних і зубчастих передач є два диски, що контактують один з одним. При цьому в точці дотику дисків K ковзання немає (рис. 12.7).

Моделлю передачі гнучкою в'яззю є два диски, що зв'язані один з одним нерозтяжною ниткою так, що нитка не ковзає по ободу дисків і збігає (набігає) на диски по дотичній до зовнішнього контуру цих дисків (рис. 12.8).

Диск, що передає рух, називається *ведучим*, а диск, що приймає рух від ведучого диска, називається *веденим*. Ведучі диски будемо позначати індексом 1, а ведені — індексом 2 як при передачі руху при безпосередньому контакті дисків, так і при передачі руху гнучкою в'язкою.

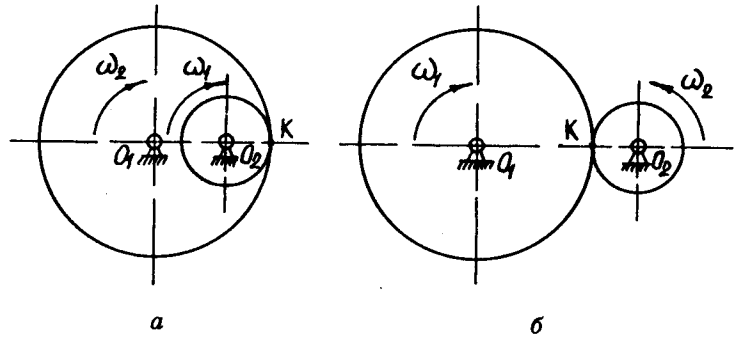


Рис. 12.7

З розглянутого випливає, що за будь-який інтервал руху всі точки дисків проходять однакові шляхи. Якщо довільна точка K ведучого диска пройшла по дузі відстань $KK_1 = S_1$, то відповідна точка K веденого диска переміщується на ту саму дугу $KK_2 = S_2$, тобто $S_1 = S_2$. Звідси маємо $\dot{S}_1 = R_1\dot{\varphi}_1$, $\dot{S}_2 = R_2\dot{\varphi}_2$, або $R_1\dot{\varphi}_1 = R_2\dot{\varphi}_2$. Продиференціювавши за часом праву і ліву частини цієї рівності,

здобудемо $R_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = R_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$, тобто

$R_1\omega_1 = R_2\omega_2$. З цієї рівності випливає, що

в точці дотику дисків або гнучкої нитки з дисками їх лінійні швидкості рівні між собою. Продиференціювавши за часом праву і ліву частини рівності $R_1\omega_1 = R_2\omega_2$, здобудемо $R_1\varepsilon_1 = R_2\varepsilon_2$, тобто в точці дотику дисків або гнучкої нитки з дисками лінійні обертальні прискорення рівні між собою. Отже, на підставі розглянутого маємо

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким чином, при передачі обертального руху з одного диска до другого (рис. 12.7 і 12.8) кути поворотів, кутові швидкості і кутові прискорення дисків обернено пропорційні радіусам цих дисків. Відношення між кутовими швидкостями ведучого і веденого дисків називається *передаточним числом*:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

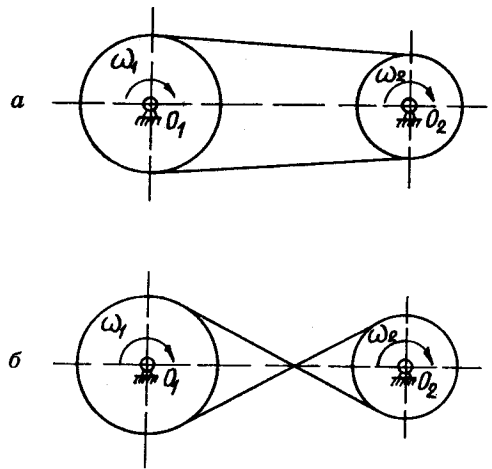


Рис. 12.8

Для зубчастих коліс початкові діаметри коліс прямо пропорційні числу зубців цих коліс. Для таких передач передаточне число визначається за формулою

$$i_{1,2} = \frac{z_2}{z_1}, \text{ де } z_1 \text{ і } z_2 \text{ — кількість зубців відповідно ведучого і веденого коліс.}$$

Отже, кінематичною умовою роботи розглянутих механізмів для перетворення обертального руху є однаковість переміщення точки контакту ведучої і веденої ланки механізму і, як наслідок, рівність лінійних швидкостей і прискорень у цій точці.

12.8. Плоскопаралельний рух твердого тіла. Рівняння руху. Незалежність обертальної частини плоскопаралельного руху від вибору полюса

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається такий рух, за якого всі точки тіла рухаються паралельно деякій нерухомій площині.

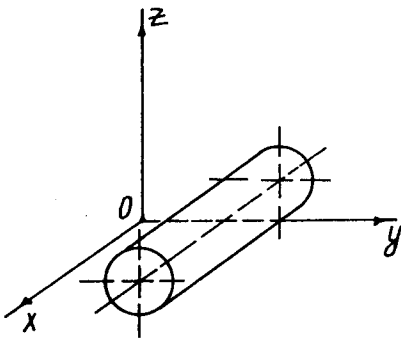


Рис. 12.9

Прикладом плоскопаралельного руху тіла є кочення циліндра по горизонтальній площині так, що його основа залишається весь час паралельною площині yOz (рис. 12.9).

Розглянемо плоскопаралельний рух твердого тіла відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ (рис. 12.10). З визначення плоскопаралельного руху випливає, що будь-яка пряма, наприклад CD , яка проведена в тілі перпендикулярно до площини xOy , буде рухатися поступально, тобто траєкторії швидкості та прискорення всіх точок цієї прямої будуть однаковими.

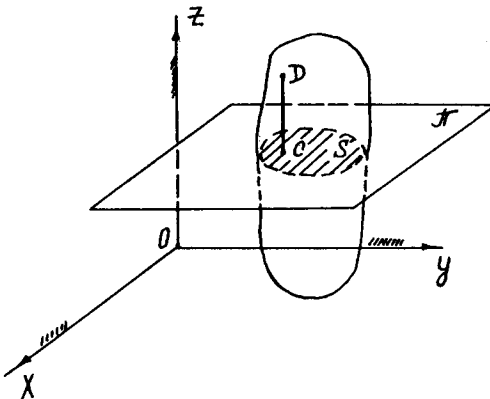


Рис. 12.10

Для визначення руху тіла необхідно знати рух лише однієї точки на кожній такій прямій. Якщо взяти точки в одній площині π , яка є паралельною нерухомій координатній площині xOy , можна стверджувати, що вивчення плоскопаралельного руху тіла зводиться до вивчення руху плоскої фігури, тобто перерізу S тіла площиною π , паралельною нерухомій координатній площині xOy (рис. 12.10). Таким чином, надалі кажучи про плоскопаралельний рух твердого тіла, матимемо на увазі рух його перерізу S .

Нехай тверде тіло здійснює плоскопаралельний рух відносно нерухомої системи координат Oxy . Візьмемо довільну точку тіла O_1 (полюс) і зв'яжемо з цією точкою початок двох систем координат: $O_1x_2y_2$ і $O_1x_1y_1$, що рухаються разом з тілом. Перша система $O_1x_2y_2$, здійснюючи рух разом з тілом, залишається завжди паралельною нерухомій системі Oxy . Друга система координат $O_1x_1y_1$, здійснюючи рух разом з тілом, у будь-який момент часу займає довільне положення відносно системи координат $O_1x_2y_2$, або, що те саме, відносно системи Oxy (рис. 12.11).

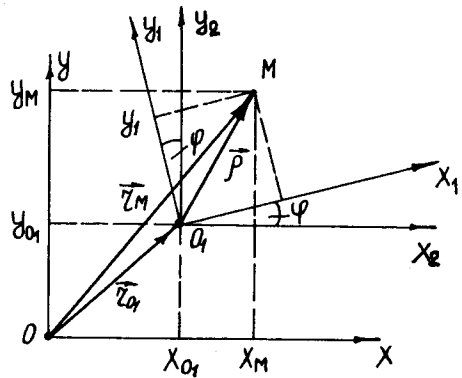


Рис. 12.11

На підставі формули (12.1) координати довільної точки M твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, і, отже, положення самого тіла відносно нерухомої системи координат Oxy будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned} x_M &= x_{O_1} + x_1 a_{11} + y_1 a_{12}; \\ y_M &= y_{O_1} + x_1 a_{21} + y_1 a_{22}, \end{aligned} \tag{12.32}$$

де $a_{12} = -\sin \varphi$, $a_{21} = \sin \varphi$, $a_{11} = a_{22} = \cos \varphi$.

У формулах (12.32) x_1 , y_1 , z_1 — сталі; x_{O_1} , y_{O_1} , a_{11} , a_{22} , a_{12} , a_{21} — функції часу. Отже, маємо:

$$x_{O_1} = f_1(t); y_{O_1} = f_2(t); \varphi = \varphi(t). \tag{12.33}$$

Таким чином, плоскопаралельний рух твердого тіла визначається трьома незалежними параметрами: двома координатами полюса O_1 і кутом повороту тіла навколо полюса O_1 .

Отже, тіло, що здійснює плоскопаралельний рух, має три ступеня вільності.

Функції (12.33) називаються *кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху твердого тіла*.

З розглянутого випливає, що плоскопаралельний рух твердого тіла розкладається на два рухи: поступальний, який визначається першими двома рівностями (12.33), і обертальний навколо полюса, який визначається третьою рівністю (12.33). При цьому кут повороту тіла φ не залежить від вибору полюса.

Розглянемо два послідовних положення I і II, які займає тверде тіло, що здійснює плоскопаралельний рух (рис. 12.12). З рис. 12.12 випливає, що перевести тіло з положення I у положення II можна двома шляхами. Візьмемо за полюс точку A_1 і перемістимо спочатку

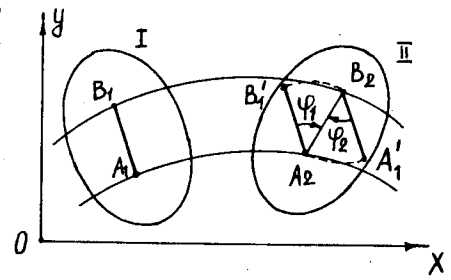


Рис. 12.12

тіло поступально так, щоб полюс A_1 зайняв положення A_2 (відрізок A_1B_1 займає положення $A_2B'_1$), а потім повернемо тіло навколо полюса A_2 на кут φ_1 . Тепер візьмемо за полюс іншу точку тіла — точку B_1 і перемістимо тіло поступально так, щоб полюс B_1 зайняв положення B_2 (відрізок A_1B_1 займає положення $B_2A'_1$), а потім повернемо тіло навколо полюса B_1 на кут φ_2 . З розглянутого видно, що при зміні полюса кут повороту не змінюється ні за величиною, ні за напрямом, оскільки відрізки $A_2B'_1$ і $B_2A'_1$ паралельні і обидва кути φ_1 і φ_2 відлічуються від цих відрізків за рухом стрілки годинника (рис. 12.12).

Оскільки кут повороту φ при плоскопаралельному русі твердого тіла не залежить від вибору полюса, то і кінематичні характеристики обертальної

частини руху тіла, тобто кутова швидкість $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ і кутове прискорення

$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, також не залежать від вибору полюса.

Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ розташовані на осі обертання, тобто осі O_1z_2 , що проходить через полюс перпендикулярно до нерухомої координатної площини xOy , і мають такі напрями: вектор $\vec{\omega}$ — такий, щоб з його кінця обертання тіла було видно проти руху стрілки годинника; напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ при прискореному обертанні тіла збігається з напрямом вектора $\vec{\omega}$, а при сповільненому обертанні вектор $\vec{\varepsilon}$ має прямо протилежний до вектора $\vec{\omega}$ напрям (рис. 12.13).

Отже, вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ і вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ при плоскопаралельному русі твердого тіла є вільними векторами, оскільки полюс — довільна точка тіла.

На закінчення зазначимо, що оскільки при розгляді плоскопаралельного руху твердого тіла сполучають площину перерізу тіла S (рис. 12.13) і нерухому координатну площину xOy з площиною рисунка (рис. 12.14), то вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ і вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$, будучи розташовані перпендикулярно до площини рисунка, повністю визначатимуться своїми проєкціями на вісь O_1z_2 , що проходить через полюс O_1 перпендикулярно до площини рисунка, і зображуються в площині рисунка у вигляді кутових стрілок (рис. 12.13 і рис. 12.14).

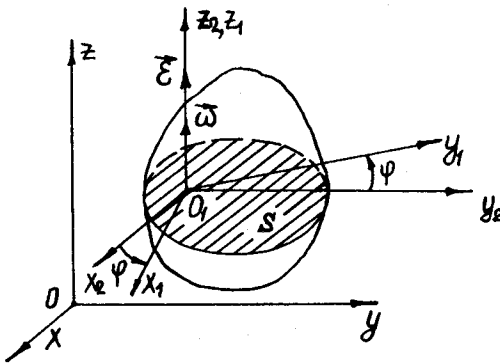


Рис. 12.13

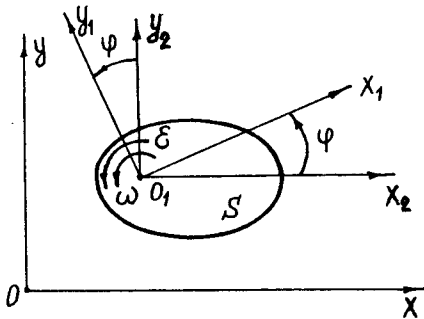


Рис. 12.14

12.9. Визначення швидкості довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі. Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що сполучає ці точки. Миттєвий центр швидкостей. Центроїди

Перейдемо до визначення швидкості довільної точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух. Нехай тверде тіло рухається відносно нерухомої системи координат Oxy (див. рис. 12.11). Радіус-вектор \vec{r}_M , який визначає положення довільної точки M тіла відносно нерухомої системи координат, можна задати за допомогою двох векторів: \vec{r}_{O_1} , що визначає положення полюса O_1 в системі Oxy , і вектора $\vec{\rho}$, що визначає положення довільної точки M у системі координат $O_1x_2y_2$:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}.$$

За визначенням швидкості точки швидкість точки M

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (12.34)$$

Похідна $\frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt}$ в рівнянні (12.34) визначає швидкість точки O_1 (полюса), тобто $\frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} = \vec{V}_{O_1}$, а похідна $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ визначає швидкість точки M при її русі відносно рухомої системи координат $O_1x_2y_2$. Позначимо цю швидкість так:

$$\vec{V}_{MO_1} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Як ми вже зазначали, рух твердого тіла відносно системи координат $O_1x_2y_2$ (див. рис. 12.11) є обертанням навколо полюса O_1 (точніше, навколо осі, що проходить через полюс O_1 перпендикулярно до нерухомої площини xOy). Отже, швидкість \vec{V}_{MO_1} є швидкістю точки M при обертанні разом з тілом навколо полюса O_1 , тобто

$$\vec{V}_{MO_1} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (12.35)$$

або

$$V_{MO_1} = \omega \rho = \omega O_1M. \quad (12.36)$$

Тоді формула (12.34) набирає вигляду

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{MO_1}. \quad (12.37)$$

Таким чином, швидкість довільної точки M твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює геометричній сумі швидкості полюса \vec{V}_{O_1} і швидкості точки M при обертанні тіла навколо полюса \vec{V}_{MO_1} .

З розглянутого випливає: щоб визначити вектор швидкості довільної точки тіла при плоскопаралельному русі, необхідно знати напрям і величину кутової швидкості тіла. Далі на підставі векторної рівності (12.37) треба побудувати в довільній точці тіла відповідні вектори і визначити величину та напрям вектора швидкості довільної точки тіла як геометричну суму двох векторів (рис. 12.15).

Розглянутий порядок визначення швидкості довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі є змістом одного з трьох способів визначення швидкості точок тіла — способу полюса.

Розглянемо другий спосіб — спосіб визначення швидкості довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі, що ґрунтується на такій теоремі: *проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що сполучає ці точки, рівні між собою.*

Дійсно, спроекціювавши векторне рівняння (12.37) на напрям відрізка O_1M , дістанемо

$$V_M \cos \beta = V_{O_1} \cos \alpha, \quad (12.38)$$

що і є доведенням розглянутої теореми.

Таким чином, щоб визначити швидкість довільної точки твердого тіла цим способом, необхідно знати величину вектора швидкості полюса, кут між вектором швидкості полюса і прямою, що сполучає полюс і довільну точку тіла, а також кут між лінією дії вектора швидкості довільної точки тіла і прямою, що сполучає полюс і довільну точку тіла.

Третій спосіб визначення швидкості довільної точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, ґрунтується на понятті миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

Миттєвим центром швидкостей (миттєвим центром обертання) твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, називається точка тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Позначають миттєвий центр швидкостей твердого тіла літерою p .

Покажемо, що при плоскопаралельному русі миттєвий центр швидкостей існує і ця точка в даний момент часу єдина. Нехай у момент часу t точки A, B, C і D тіла мають швидкості $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C$ і \vec{V}_D . Вектори $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C$ і \vec{V}_D не паралельні один одному (у протилежному разі тіло б рухалося мит-

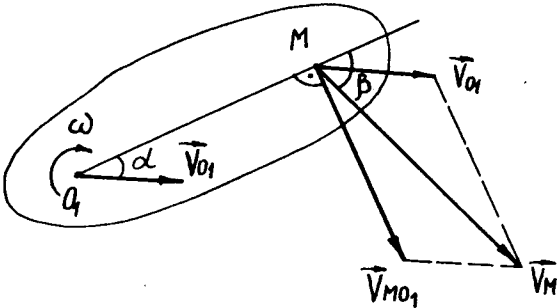


Рис. 12.15

тево-поступально). Точка p , тобто точка перетину перпендикулярів до векторів \vec{V}_A , \vec{V}_B , \vec{V}_C і \vec{V}_D , побудованих у точках A , B , C і D (рис. 12.16), і буде МЦШ, оскільки $\vec{V}_p = \vec{0}$. Дійсно, якщо припустити, що $\vec{V}_p \neq \vec{0}$, то на підставі теореми про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що сполучає ці точки, вектор \vec{V}_p має бути одночасно перпендикулярним до відрізків pA , pB , pC і pD , що неможливо. З теореми також випливає, що точка p як МЦШ єдина, тобто ніяка інша точка тіла в цей момент часу не може мати швидкість, що дорівнює нулю. Наприклад, якщо взяти точку K (рис. 12.16), то проекції векторів \vec{V}_A , \vec{V}_B і \vec{V}_D на лінію, що сполучає точки A , B і C з точкою K , не будуть дорівнювати нулю і, таким чином, $\vec{V}_k \neq \vec{0}$.

Якщо за полюс при плоскопаралельному русі тіла взяти миттєвий центр швидкостей, то на підставі рівності (12.37) матимемо

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{Mp}, \quad (12.39)$$

або

$$V_M = \omega pM, \quad (12.40)$$

де \vec{V}_{Mp} — вектор швидкості довільної точки M тіла при його обертанні навколо миттєвого центра швидкостей; pM — відстань від миттєвого центра швидкостей до довільної точки тіла.

Отже, якщо при плоскопаралельному русі твердого тіла існує миттєвий центр швидкостей, то рух тіла в даний момент часу можна розглядати як обертальний навколо миттєвого центра швидкостей [точніше, навколо осі, що проходить через МЦШ перпендикулярно до нерухомої площини xOy (рис. 12.16)]. Швидкість будь-яких точок тіла при цьому визначається як швидкості точок тіла, що обертається навколо миттєвого центра швидкостей, тобто вектори швидкостей точок тіла перпендикулярні до відрізків, що сполучають точки з МЦШ, а їх модулі пропорційні відстаням до МЦШ, тобто:

$$V_D = \omega pD; \quad V_C = \omega pC; \quad V_B = \omega pB; \quad V_A = \omega pA.$$

Знаючи положення миттєвого центра швидкостей, можна визначити швидкості усіх точок тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, якщо відома швидкість будь-якої його точки (модуль вектора швидкості і його напрям).

Дійсно, нехай відомі, наприклад, швидкість \vec{V}_D точки D і положення МЦШ

(рис. 12.16). Тоді з рівності $V_D = \omega pD$ знайдемо $\omega = \frac{V_D}{pD}$ і швидкість будь-

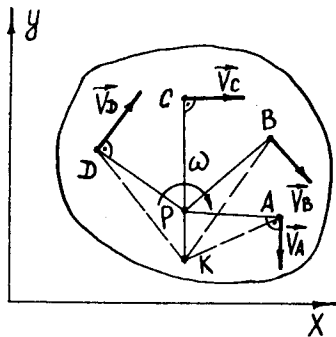


Рис. 12.16

якої точки, наприклад точки B , за модулем $V_B = \frac{V_D}{pD} \cdot pB$. Для визначення напрямку вектора \vec{V}_B необхідно сполучити точку B з точкою p (МЦШ) і перпендикулярно до відрізка pB у бік миттєвого обертання (визначає вектор швидкості точки \vec{V}_D) побудувати вектор \vec{V}_B (рис. 12.16).

Розглянемо окремі випадки визначення миттєвого центра швидкостей.

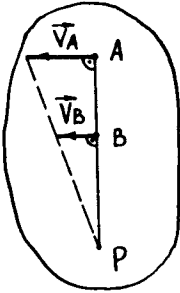


Рис. 12.17

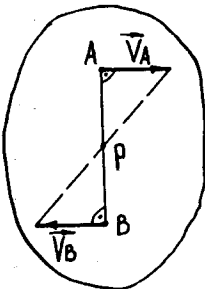


Рис. 12.18

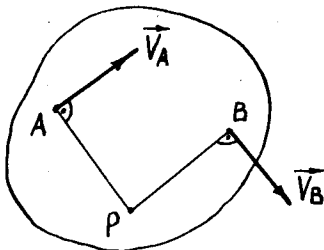


Рис. 12.19

1. Якщо вектори швидкостей точок A і B твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, паралельні й одночасно перпендикулярні до відрізка AB , мають однаковий напрям і не рівні між собою, то МЦШ розміщений на продовженні AB у точці перетину з прямою, яка сполучає кінці векторів швидкостей цих точок (рис. 12.17).

2. Якщо вектори швидкостей точок A і B твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, паралельні і перпендикулярні до відрізка AB , мають протилежні напрями, то МЦШ лежить на відрізку AB у точці його перетину з відрізком, який сполучає кінці векторів швидкостей точок A і B (рис. 12.18).

3. Якщо відомі напрями векторів швидкостей двох точок A і B твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, то МЦШ розміщений у точці перетину перпендикулярів, проведених з точок A і B до векторів швидкостей точок A і B (рис. 12.19).

4. Якщо тверде тіло, що здійснює плоскопаралельний рух, котиться без ковзання по нерухомій поверхні (прямолінійній або криволінійній), то МЦШ лежить у точці дотику твердого тіла з площиною (рис. 12.20).

5. Якщо вектори швидкостей двох точок твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, паралельні і не перпендикулярні до відрізка, який сполучає ці точки, або вектори швидкостей двох точок паралельні, рівні між собою і перпендикулярні до відрізка, який сполучає ці точки, то МЦШ у даний момент часу не існує, або, як кажуть, він перебуває у нескінченності. Отже, кутова швидкість твердого тіла дорівнює нулю, а тверде тіло здійснює миттєво-поступальний рух (рис. 12.21).

На відміну від обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі при плоскопаралельному русі МЦШ змінює своє положення як у нерухомій площині, так і в рухомій, незмінно зв'язаній з рухомих твердим тілом.

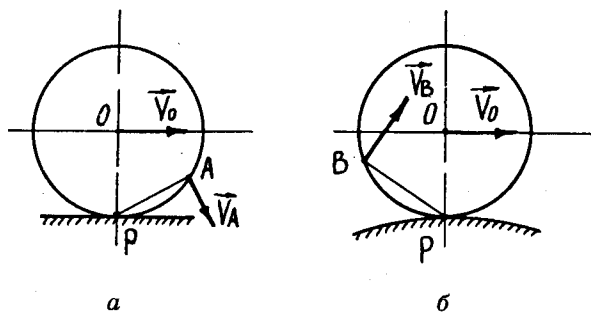


Рис. 12.20

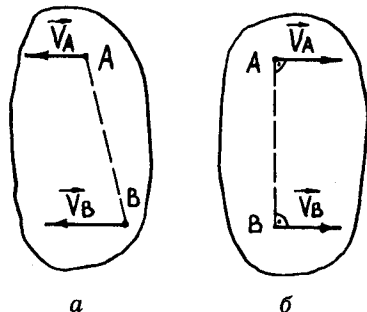


Рис. 12.21

Геометричне місце МЦШ у нерухомій площині називається *нерухомою центроїдою*, а в рухомій площині — *рухомою центроїдою*. При коченні циліндра по нерухомій горизонтальній площині (рис. 12.20, а) нерухома центроїда — горизонтальна пряма, а рухома — коло. При коченні циліндра по нерухомій криволінійній площині (рис. 12.20, б) нерухома центроїда — крива, а рухома — коло.

У кожний момент часу рухома і нерухома центроїди мають загальну точку дотику — МЦШ, тобто точку, швидкість якої дорівнює нулю. Тому плоскопаралельний рух можна уявити як кочення без ковзання рухомої центроїди по нерухомій.

Розглянуті графоаналітичні способи визначення швидкостей точок твердого тіла при плоскопаралельному русі не єдині. Поряд з ними є ще аналітичний спосіб визначення швидкостей точок тіла.

Для аналітичного визначення швидкості довільної точки M визначаємо її координати за формулою (12.32):

$$\begin{aligned}x_M &= x_{O_1} + x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi; \\y_M &= y_{O_1} + x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Диференціюючи ці вирази, дістанемо проєкції вектора швидкості довільної точки M на нерухомі осі координат Oxy :

$$\begin{aligned}\dot{x}_M &= \dot{x}_{O_1} - \dot{\varphi}(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi); \\ \dot{y}_M &= \dot{y}_{O_1} + \dot{\varphi}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi).\end{aligned}\tag{12.41}$$

Модуль швидкості точки M знайдемо за формулою

$$\begin{aligned}V_M &= \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \\ &= \sqrt{[\dot{x}_{O_1} - \dot{\varphi}(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi)]^2 + [\dot{y}_{O_1} + \dot{\varphi}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)]^2}.\end{aligned}\tag{12.42}$$

Напрямок вектора швидкості точки M визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos(\widehat{\vec{V}_M, x}) = \frac{\dot{x}_M}{V_M}; \quad \cos(\widehat{\vec{V}_M, y}) = \frac{\dot{y}_M}{V_M}; \quad \cos(\widehat{\vec{V}_M, z}) = \frac{\dot{z}_M}{V_M}, \quad (12.43)$$

де \dot{x}_M і \dot{y}_M визначаються за формулами (12.41), а V_M — за формулою (12.42).

12.10. Визначення прискорення довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі. Миттєвий центр прискорень

Визначення прискорення довільної точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, можна здійснити графоаналітично або аналітично.

Для графоаналітичного визначення прискорень точок тіла є два способи: спосіб полюса і спосіб миттєвого центра прискорень (МЦП). Розглянемо ці способи.

За визначенням прискорення точки і на підставі формули (12.37) прискорення довільної точки M твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух,

$$\begin{aligned} \vec{W}_M &= \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \\ &= \vec{W}_{O_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{MO_1} = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1}^{o6} + \vec{W}_{MO_1}^{доос} = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1}. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Похідна $\frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt}$ у рівнянні (12.44) визначає прискорення полюса O_1 , тобто $\frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} = \vec{W}_{O_1}$; похідна $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ визначає кутове прискорення твердого тіла при обертанні навколо полюса, тобто $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$; похідна $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ визначає швидкість довільної точки M твердого тіла при обертанні тіла навколо полюса O_1 , тобто $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_{MO_1}$; векторний добуток

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \vec{W}_{MO_1}^{o6} \quad (12.45)$$

визначає вектор обертального прискорення довільної точки M твердого тіла при обертанні тіла навколо полюса O_1 ; векторний добуток

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_{MO_1} = \vec{W}_{MO_1}^{доос} \quad (12.46)$$

визначає вектор доосьового прискорення довільної точки M твердого тіла при обертанні тіла навколо полюса O_1 ; вектор

$$\vec{W}_{MO_1} = \vec{W}_{MO_1}^{об} + \vec{W}_{MO_1}^{дооc} \quad (12.47)$$

визначає повне прискорення довільної точки M твердого тіла при обертанні тіла навколо полюса O_1 .

За модулем прискорення $\vec{W}_{MO_1}^{об}$, $\vec{W}_{MO_1}^{дооc}$ і \vec{W}_{MO_1} відповідно дорівнюють:

$$W_{MO_1}^{об} = \varepsilon \rho = \varepsilon O_1 M; \quad (12.48)$$

$$W_{MO_1}^{дооc} = \omega^2 \rho = \omega^2 O_1 M; \quad (12.49)$$

$$W_{MO_1} = \sqrt{(\varepsilon O_1 M)^2 + (\omega^2 O_1 M)^2} = O_1 M \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (12.50)$$

Вектор $W_{MO_1}^{об}$ напрямлений перпендикулярно до відрізка, що з'єднує довільну точку M з полюсом O_1 в напрямі кутового прискорення ε (рис. 12.22).

Вектор $W_{MO_1}^{дооc}$ напрямлений завжди вздовж відрізка, що з'єднує довільну точку M і полюс O_1 від точки M до полюса O_1 .

Кут між векторами \vec{W}_{MO_1} і $W_{MO_1}^{дооc}$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|W_{MO_1}^{об}|}{|W_{MO_1}^{дооc}|} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (12.51)$$

Таким чином, щоб визначити вектор прискорення довільної точки тіла при плоскопаралельному русі, необхідно знати напрям і величину вектора прискорення полюса, а також напрям і величину кутової швидкості і кутового прискорення тіла. Далі на підставі векторної рівності (12.44) треба побудувати в довільній точці тіла відповідні вектори і визначити величину і напрям вектора прискорення довільної точки тіла як геометричну суму трьох векторів (рис. 12.22).

Зазначимо, що практично при визначенні прискорення довільної точки тіла, як правило, при відомому прискоренні полюса і відомій кутовій швидкості обертання тіла невідомим залишається кутове прискорення тіла. В таких випадках прискорення довільної точки і кутове прискорення тіла визначаються одночасно.

Розглянемо найпоширеніший в практиці випадок. Нехай відомі швидкість \vec{V}_O і прискорення \vec{W}_O довільної точки O твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух. Визначити прискорення точки B тіла, якщо лінії дії векторів \vec{V}_B і \vec{W}_B відомі (рис. 12.23, а).

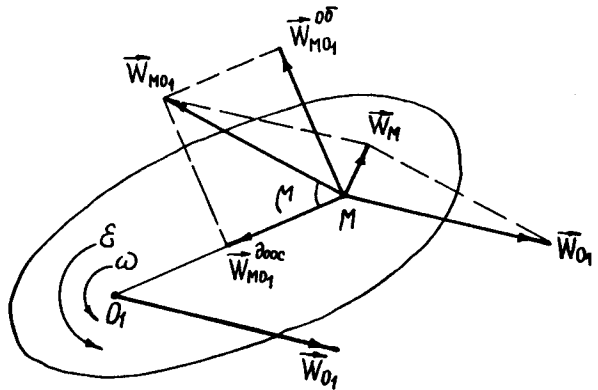


Рис. 12.22

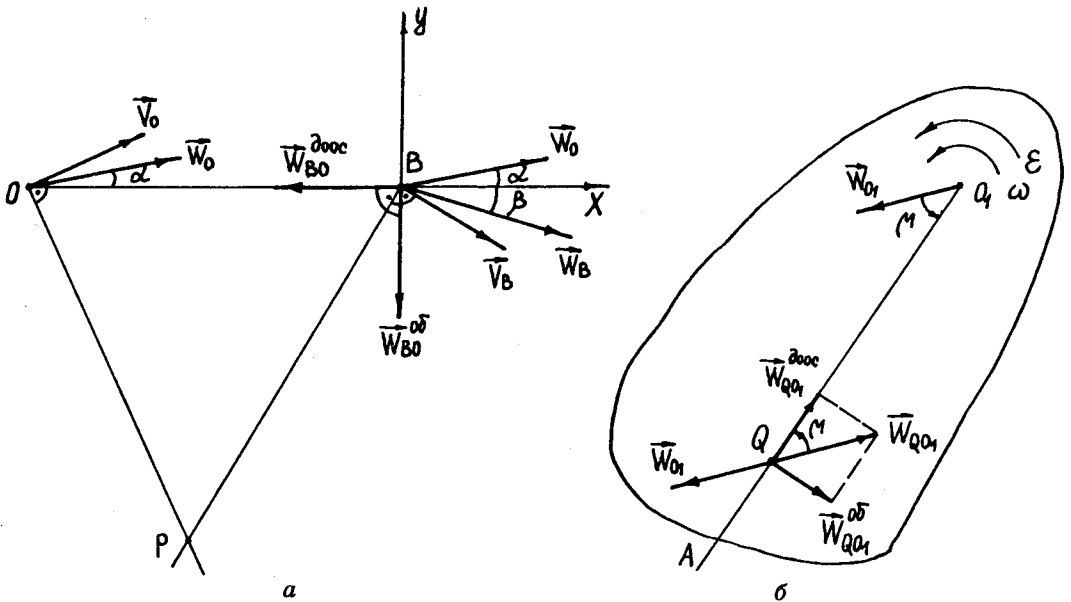


Рис. 12.23

Візьмемо за полюс точку O і для точки B запишемо рівняння (12.44):

$$\vec{W}_B = \vec{W}_O + \vec{W}_{BO}^{об} + \vec{W}_{BO}^{дооc}, \quad (12.52)$$

де $W_{BO}^{об} = \varepsilon OB$; $W_{BO}^{дооc} = \omega^2 OB$.

Кутову швидкість тіла визначимо після побудови МЦШ (рис. 12.23):

$$\omega = \frac{V_O}{Op}.$$

Кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ невідоме, оскільки невідомий закон зміни кутової швидкості з часом $[\omega = f(t)]$. Отже, маємо одне рівняння (12.52) і дві невідомі величини W_B і ε . Для розв'язання задачі побудуємо в точці B систему координат Bxy так, щоб одна з осей була перпендикулярною до вектора $\vec{W}_{BO}^{об}$ (рис. 12.23, а).

Спроеціювавши вектори, побудовані в точці B на підставі формули (12.52), на осі Bx і By , дістанемо:

$$W_B \cos \beta = W_O \cos \alpha - W_{BO}^{дооc} = W_O \cos \alpha - \omega^2 OB;$$

$$-W_B \sin \beta = W_O \sin \alpha - W_{BO}^{об} = W_O \sin \alpha - \varepsilon OB,$$

звідки:

$$W_B = \frac{W_O \cos \alpha - \omega^2 OB}{\cos \beta}; \quad \varepsilon = \frac{W_O \sin \alpha + (W_O \cos \alpha - \omega^2 OB) \operatorname{tg} \beta}{OB}.$$

Як бачимо, прискорення точки W_B і кутове прискорення ε визначаються одночасно з рівняння (12.52).

Розглянутий порядок визначення прискорення довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі є змістом способу полюса.

Розглянемо спосіб миттєвого центра прискорень (МЦП). Прискорення довільної точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, визначається як геометрична сума прискорень полюса і прискорення довільної точки при обертанні тіла навколо полюса. Покажемо, що в даний момент часу існує точка твердого тіла, прискорення якої дорівнює нулю.

Нехай в даний момент часу прискорення полюса O_1 дорівнює \vec{W}_{O_1} , тіло обертається з кутовою швидкістю ω і кутове прискорення дорівнює ε (рис. 12.23, б).

За формулою (12.51) визначимо кут μ (кут напряму на МЦП):

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Від точки O_1 під кутом μ до вектора \vec{W}_{O_1} проводимо пряму O_1A , і при цьому пряма O_1A має бути відхиленою від \vec{W}_{O_1} у бік напряму кутового прискорення ε (на рис. 12.23, б кут μ відкладений від \vec{W}_{O_1} проти руху стрілки годинника, оскільки ε має такий напрям).

Уздовж прямої O_1A відкладаємо відрізок O_1Q , що за формулою (12.50)

$$O_1Q = \frac{W_{O_1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Побудована у такий спосіб точка Q і буде МЦП (рис. 12.23, б). Дійсно, на підставі формули (12.52) прискорення Q

$$\vec{W}_Q = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{QO_1}^{\text{об}} + \vec{W}_{QO_1}^{\text{дооо}} = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{QO_1},$$

де O_1 — полюс.

Величина прискорення \vec{W}_{QO_1} визначається за формулою (12.50)

$$W_{QO_1} = QO_1 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{W_{O_1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_{O_1}.$$

Кут між вектором \vec{W}_{QO_1} і відрізком O_1Q визначається за формулою (12.51)

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

і відлічується від вектора \vec{W}_{QO_1} проти руху стрілки годинника (рис. 12.23, б).

Отже, вектор \vec{W}_{QO_1} паралельний вектору \vec{W}_{O_1} , але має протилежний напрям (рис. 12.23, б). Тому $\vec{W}_{QO_1} = -\vec{W}_{O_1}$ і $\vec{W}_Q = \vec{0}$.

Точка Q, прискорення якої у даний момент часу дорівнює нулю, називається *миттєвим центром прискорень* (МЦП).

Якщо за полюс взяти миттєвий центр прискорень, то на підставі рівняння (12.44) прискорення довільної точки M твердого тіла

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MQ} = \vec{W}_{MQ}^{об} + \vec{W}_{MQ}^{доос}. \tag{12.53}$$

Модуль вектора прискорення довільної точки тіла M

$$W_M = W_{MQ} = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{12.54}$$

Отже, якщо МЦП взяти за полюс, то в даний момент часу прискорення будь-якої точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, визначається як прискорення цієї точки при обертанні тіла навколо МЦП.

Нехай \vec{W}_A , \vec{W}_K і \vec{W}_B — прискорення точок A, K і B твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух (рис. 12.24). На підставі розглянутого маємо: $\vec{W}_A = \vec{W}_{AQ}$, $\vec{W}_B = \vec{W}_{BQ}$ і $\vec{W}_K = \vec{W}_{KQ}$. З цих рівностей випливає:

$$\begin{aligned} W_A &= W_{AQ} = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \\ W_B &= W_{BQ} = QB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \\ W_K &= W_{KQ} = QK\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned} \tag{12.55}$$

Тому

$$\frac{W_B}{W_A} = \frac{QB}{QA}; \quad \frac{W_K}{W_A} = \frac{QK}{QA}. \tag{12.56}$$

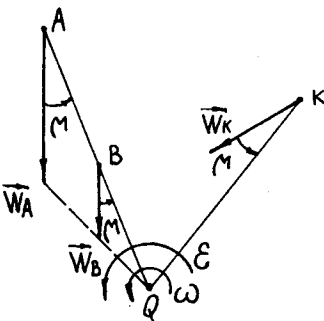


Рис. 12.24

Таким чином, модулі прискорень точок твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, у кожний момент часу пропорційні відстаням від цих точок до МЦП, а вектори прискорень утворюють з відрізками, що сполучають ці точки з МЦП, один і той самий

кут $\mu = \arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$.

Кут μ відлічується від прискорення точки до відрізка, що сполучає дану точку з МЦП, у напрямі кутового прискорення ε (рис. 12.24).

Розглянемо окремі випадки визначення МЦП.

Випадок 1. Відома точка твердого тіла, прискорення якої у даний момент часу дорівнює нулю. Ця точка і буде МЦП.

Розглянемо колесо, що котиться без ковзання по прямолінійній рейці зі сталою швидкістю центра $\vec{V}_C = \text{const}$ (рис. 12.25). Тоді $\vec{W}_C = \vec{0}$ і точка C є МЦП. Прискорення будь-якої точки обода колеса має напрям уздовж відрізка, що сполучає точку з центром колеса від точки обода до центра колеса, і становить

$$W_A = W_B = W_D = W_P = \frac{V_C^2}{R}.$$

У цьому прикладі добре видно, що МЦШ і МЦП — це різні точки тіла.

Випадок 2. У даний момент часу відомі модуль і напрям прискорення \vec{W}_A точки A твердого тіла, а також напрям і величина кутової швидкості і кутового прискорення, тобто $\omega \neq 0$ і $\varepsilon \neq 0$ (рис. 12.26). У цьому випадку МЦП лежить на відрізку, що утворює з напрямом вектора \vec{W}_A кут $\mu = \arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ (кут μ відлічується від вектора \vec{W}_A у бік ε). Відстань від точки A до МЦП

$$AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Випадок 3. У даний момент часу відомі модуль і напрям прискорення \vec{W}_A точки A твердого тіла, а також, що $\omega \neq 0$ і $\varepsilon = 0$ (рис. 12.27). У цьому випадку

$$\text{tg } \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = 0,$$

тобто вектори прискорення точок тіла напрямлені до МЦП. Відстань від точки A до МЦП визначається за формулою

$$AQ = \frac{W_A}{\omega^2}.$$

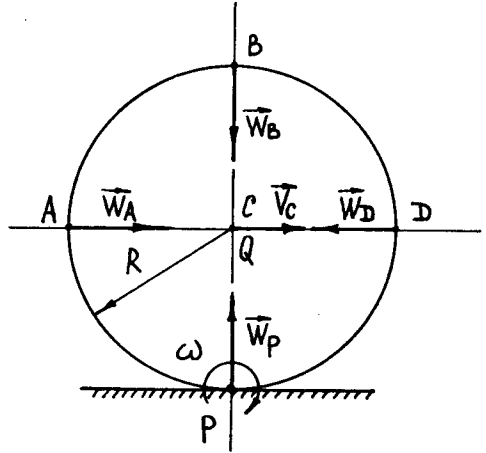


Рис. 12.25

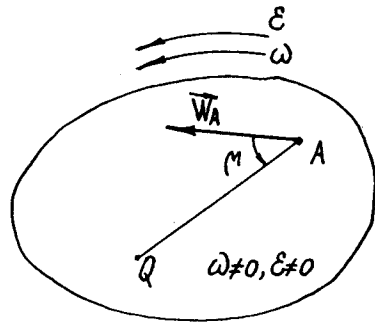


Рис. 12.26

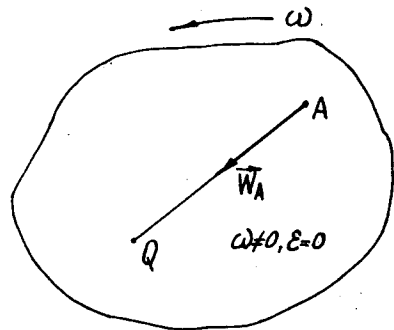


Рис. 12.27

Випадок 4. У даний момент часу відомі модуль і напрям прискорення \vec{W}_A точки A твердого тіла, а також, що $\omega = 0$ і $\varepsilon \neq 0$ (рис. 12.28). У цьому випадку

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \infty,$$

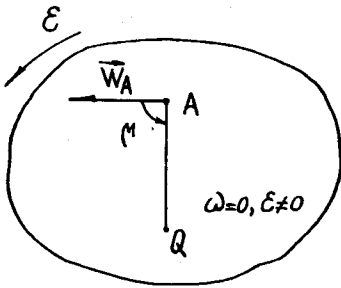


Рис. 12.28

тобто вектори прискорення точок тіла напрямлені перпендикулярно до відрізків, що сполучають ці точки з МЦП. Відстань від точки A до МЦП визначається за формулою

$$AQ = \frac{W_A}{\varepsilon}.$$

Випадок 5. У даний момент часу відомі модулі і напрям прискорень двох точок A і B твердого тіла. При цьому вектори \vec{W}_A і \vec{W}_B не паралельні (рис. 12.29).

Візьмемо за полюс точку A ; тоді на підставі формули (12.47)

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}.$$

Побудуємо в точці B паралелограм прискорень за відомими прискореннями \vec{W}_A і \vec{W}_B . Кут між вектором прискорення \vec{W}_{BA} і відрізком AB

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Відлічуючи кут μ від вектора прискорення \vec{W}_{BA} до відрізка AB , здобудемо напрям кутового прискорення тіла ε . Визначивши кут μ і напрям ε , відлічимо кут μ від векторів прискорень точок A і B за напрямом ε . Проводимо під кутом μ до \vec{W}_A і \vec{W}_B два відрізки до перетину у точці Q , яка і буде МЦП.

Випадок 6. У даний момент часу відомі модулі і напрям прискорень двох точок A і B твердого тіла. При цьому вектори \vec{W}_A і \vec{W}_B паралельні. Положення МЦП у цьому випадку визначається на підставі того, що модулі прискорень точок тіла пропорційні довжинам відрізків, що сполучають точки з МЦП, і кут між векторами прискорення точок і цими відрізками сталий:

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

На рис. 12.30, а і 12.30, б зображено визначення МЦП при $0 < \mu < 90^\circ$ і коли $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$.

На рис. 12.31 і 12.32 зображено визначення МЦП при $\mu = 90^\circ$ і якщо $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$.

На рис. 12.33 і 12.34 зображено визначення МЦП при $\mu = 0$ і якщо $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$.

Випадок 7. Якщо прискорення двох точок тіла А і В рівні за модулем і вектори \vec{W}_A і \vec{W}_B паралельні (рис. 12.35), то МЦП перебуває у нескінченності, а прискорення усіх точок тіла рівні між собою.

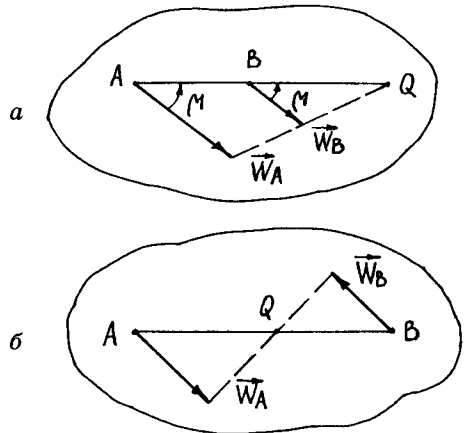


Рис. 12.30

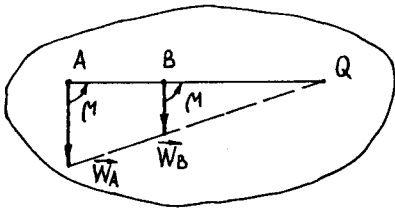


Рис. 12.31

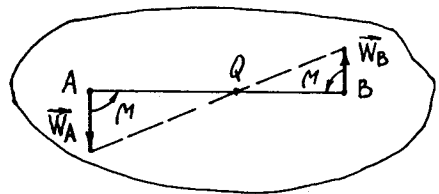


Рис. 12.32

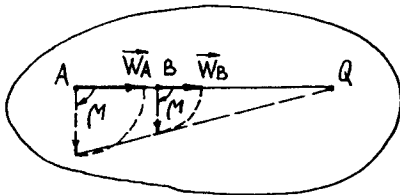


Рис. 12.33

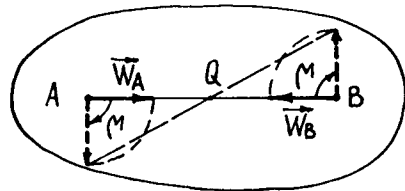


Рис. 12.34

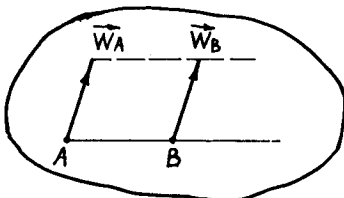


Рис. 12.35

Дійсно, на підставі рівності (12.44) маємо

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA},$$

але оскільки $\vec{W}_A = \vec{W}_B$, то на підставі формули (12.50) збудемо

$$W_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0.$$

При $AB \neq 0$ маємо $\varepsilon = \omega = 0$ і, отже,

$$AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \infty.$$

На закінчення розглянемо аналітичний спосіб визначення прискорення довільної точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух.

Для аналітичного визначення прискорення довільної точки M визначаємо похідні за часом від виразів (12.41):

$$\begin{aligned}\ddot{x}_M &= \ddot{x}_{O_1} - \ddot{\varphi}(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi); \\ \ddot{y}_M &= \ddot{y}_{O_1} + \ddot{\varphi}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi).\end{aligned}\quad (12.57)$$

Рівності (12.57) визначають проєкції прискорення довільної точки M на нерухомі осі координат Oxy .

Модуль прискорення точки M знайдемо за формулою

$$\begin{aligned}W_M &= \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \\ &= \sqrt{\left[\ddot{x}_{O_1} - \ddot{\varphi}(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)\right]^2 + \\ &+ \left[\ddot{y}_{O_1} + \ddot{\varphi}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi)\right]^2}.\end{aligned}\quad (12.58)$$

Напрямок вектора прискорення точки M визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos(\widehat{\vec{W}_M, x}) = \frac{\ddot{x}_M}{W_M}; \quad \cos(\widehat{\vec{W}_M, y}) = \frac{\ddot{y}_M}{W_M}, \quad (12.59)$$

де \ddot{x}_M і \ddot{y}_M визначаються за формулами (12.57), а W_M — за формулою (12.58).

12.11. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки.

Кути Ейлера. Рівняння руху тіла. Миттєва вісь обертання, миттєва кутова швидкість, миттєве кутове прискорення

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки називається такий рух тіла, за якого одна точка тіла протягом усього часу руху залишається нерухомою.

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки часто називають *сферичним рухом*, оскільки траєкторії точок тіла при такому русі розміщені на поверхні сфер, загальний центр яких збігається з нерухомою точкою.

Найпростішим прикладом обертального руху тіла навколо нерухомої точки є дзига, вістря якої, спираючись на нерухому площину, протягом всього часу руху залишається нерухомим.

Нехай тверде тіло рухається відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ і має одну нерухому точку O . Зв'яжемо з тілом систему координат $Ox_1y_1z_1$. При русі тіла система координат $Ox_1y_1z_1$, здійснюючи рух разом з тілом, у будь-який момент часу займає довільне положення відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ (рис. 12.36).

На підставі формули (12.1) координати довільної точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, і, отже, положення самого тіла відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned}x_M &= x_1 a_{11} + y_1 a_{12} + z_1 a_{13}; \\y_M &= x_1 a_{21} + y_1 a_{22} + z_1 a_{23}; \\z_M &= x_1 a_{31} + y_1 a_{32} + z_1 a_{33},\end{aligned}\tag{12.60}$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ — функції часу, а x_1, y_1, z_1 — сталі.

Як було зазначено в параграфі 12.1, серед дев'яти напрямних косинусів a_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) незалежними є тільки три. За цими трьома незалежними косинусами на підставі рівнянь (12.3) можна визначити шість інших напрямних косинусів.

Таким чином, положення довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, відносно нерухомої системи відліку і тим самим положення тіла відносно цієї системи визначається трьома параметрами — трьома напрямними косинусами осей координат, або, що те саме, трьома кутами між осями рухомої і нерухомої системи координат (рис. 12.36).

Отже, тверде тіло, що обертається навколо нерухомої точки, має три ступеня вільності.

Визначення напрямних косинусів осей координат a_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) на підставі рівнянь (12.3) через три незалежних косинуси пов'язане з математичними труднощами, оскільки потребує розв'язувати систему алгебричних рівнянь другого ступеня. Тому більш доцільно за незалежні взяти інші кути. Такі кути запропонував Ейлер. Через

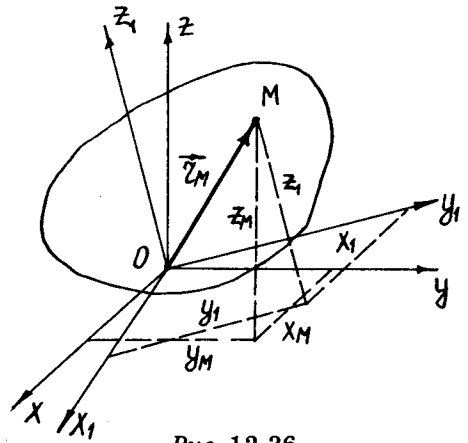


Рис. 12.36

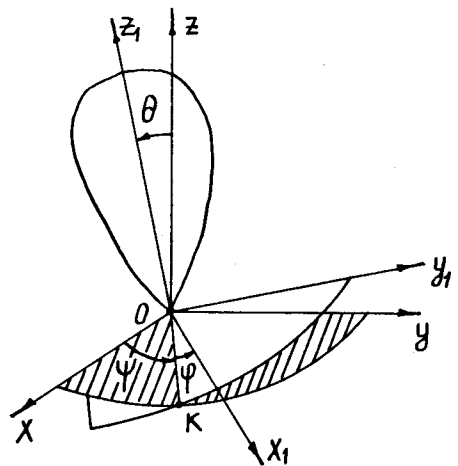


Рис. 12.37

кути Ейлера, тобто ψ , θ і φ (рис. 12.37), на підставі тригонометричних функцій (12.64) визначаються всі дев'ять напрямних косинусів a_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) у рівняннях (12.60).

Щоб ввести кути Ейлера, розглянемо дві системи координат (рис. 12.37): нерухому $Oxyz$ і рухому $Ox_1y_1z_1$, незмінно зв'язану з тілом, початок якої збігається з нерухомою точкою O . Координатна площина x_1Oy_1 перетинається з нерухомою координатною площиною xOy вздовж прямої OK . Пряма OK називається *лінією вузлів*. Кут, утворений нерухомою віссю Ox з лінією вузлів, називається *кутом прецесії* і позначається ψ . Кут, утворений лінією вузлів OK з рухомою віссю Ox_1 , називається *кутом власного обертання* і позначається φ . Кут між осями Oz і Oz_1 називається *кутом нутації* і позначається θ . Усі кути відлічуються проти руху стрілки годинника, якщо дивитися з кінця додатного напрямку відповідно осей Oz , Oz_1 і OK .

Покажемо, що, знаючи три функції $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ і $\varphi = \varphi(t)$, можна в довільний момент часу визначити положення системи координат $Ox_1y_1z_1$ відносно нерухомої системи $Oxyz$ і, таким чином, положення твердого тіла, що незмінно зв'язане із системою координат $Ox_1y_1z_1$. Дійсно, відкладаючи від осі Ox кут прецесії ψ , знайдемо лінію вузлів OK . Побудуємо через точку O перпендикулярну до лінії вузлів площину і від осі Oz (вісь Oz розташована в побудованій площині) відкладемо кут нутації θ . Таким чином, буде визначено напрям і положення осі Oz_1 . Через точку O побудуємо перпендикулярну до осі Oz_1 площину; ця площина проходить через лінію вузлів OK . У побудованій площині від лінії вузлів відкладаємо кут власного обертання φ і визначаємо додатний напрям осі Ox_1 . Вісь Oy_1 має розміщуватись у побудованій площині і разом з осями Ox_1 і Oz_1 утворювати праву систему координат. Отже, кути ψ , θ і φ повністю визначають положення рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ відносно нерухомої системи $Oxyz$ (рис. 12.37).

Функції

$$\psi = \psi(t); \theta = \theta(t); \varphi = \varphi(t) \quad (12.61)$$

називаються *кінематичними рівняннями руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки*.

Щоб установити залежності між напрямними косинусами осей координат a_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) і кутами Ейлера, введемо окрім одиничних векторів \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , \vec{i}_1 , \vec{j}_1 , \vec{k}_1 осей координат $Oxyz$ і $Ox_1y_1z_1$ (на рис. 12.38 ці вектори не зображено) ще одиничні вектори \vec{n} , \vec{n}_1 , \vec{n}_2 осей ON , ON_1 , ON_2 (рис. 12.38). Додатний напрям осей ON , ON_1 і ON_2 показано на рис. 12.38. При цьому вісь ON збігається з лінією вузлів; вісь ON_1 перпендикулярна до осі ON і міститься в площині xOy ; вісь ON_2 перпендикулярна до осі ON і міститься в площині x_1Oy_1 . З рис. 12.38 також випливає, що кут між осями ON_2 і ON_1 є лінійним кутом двогранного кута між площинами координат x_1Oy_1 і xOy , тобто кутом θ .

Введення одиничних векторів \vec{n} , \vec{n}_1 і \vec{n}_2 дає можливість виразити одиничні вектори \vec{i} , \vec{j} і \vec{i}_1 , \vec{j}_1 через одиничні вектори \vec{n} , \vec{n}_1 , \vec{n}_2 і кути Ейлера:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{n} \cos \psi - \vec{n}_1 \sin \psi; & \vec{i}_1 &= \vec{n} \cos \varphi + \vec{n}_2 \sin \varphi; \\ \vec{j} &= \vec{n} \sin \psi + \vec{n}_1 \cos \psi; & \vec{j}_1 &= -\vec{n} \sin \varphi + \vec{n}_2 \cos \varphi.\end{aligned}\quad (12.62)$$

Тоді на підставі залежностей (12.62), рівностей:

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{n} &= 1; & \vec{n} \cdot \vec{n}_2 &= 0; & \vec{n}_1 \cdot \vec{n} &= 0; & \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \cos \theta; \\ \vec{n} \cdot \vec{k} &= 0; & \vec{n} \cdot \vec{k}_1 &= 0; \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{k}_1 &= -\sin \theta; & \vec{n}_2 \cdot \vec{k} &= \sin \theta\end{aligned}\quad (12.63)$$

і напрямних косинусів переходу от осей координат $Ox_1y_1z_1$ до $Oxyz$:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{x, x_1}) &= a_{11}; & \cos(\widehat{x, y_1}) &= a_{12}; & \cos(\widehat{x, z_1}) &= a_{13}; \\ \cos(\widehat{y, x_1}) &= a_{21}; & \cos(\widehat{y, y_1}) &= a_{22}; & \cos(\widehat{y, z_1}) &= a_{23}; \\ \cos(\widehat{z, x_1}) &= a_{31}; & \cos(\widehat{z, y_1}) &= a_{32}; & \cos(\widehat{z, z_1}) &= a_{33}\end{aligned}$$

здобудемо:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta; \\ a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta; \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta; \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta; \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta; \\ a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta; \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta; \\ a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta; \\ a_{33} &= \cos \theta.\end{aligned}\quad (12.64)$$

Оскільки положення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, визначається трьома кутами Ейлера, то переміщення тіла за елементарний проміжок часу dt можна уявити як сукупність поворотів на кути $d\psi$, $d\theta$ і $d\varphi$ навколо відповідно осей Oz , OK і Oz_1 . При складанні ці три повороти утворюють істинне елементарне переміщення тіла. Розглянемо спочатку результат додавання поворотів навколо осей Oz і Oz_1 (рис. 12.39).

При повороті на кут $d\varphi$ навколо осі Oz_1 будь-яка точка тіла, що лежить в площині z_1Oz (усередині кута z_1Oz), буде мати елементарне переміщення, і це переміщення буде перпендикулярне до площини z_1Oz . Чисельно це переміщення буде дорівнювати $h_1 d\varphi$, де h_1 — відстань точки від осі Oz_1 . Одночасно при повороті навколо осі Oz та сама точка отримує протилежне за на-

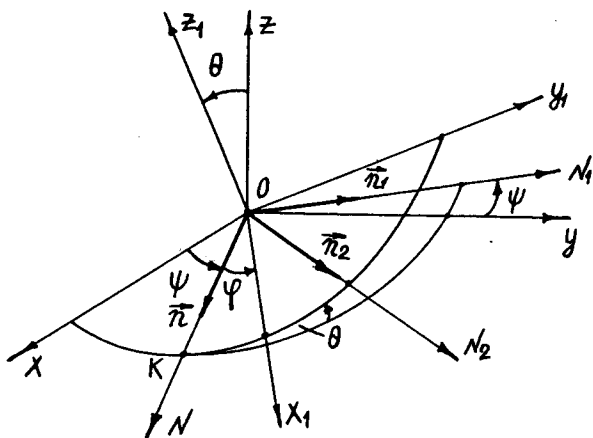


Рис. 12.38

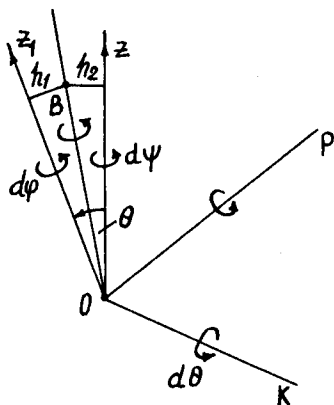


Рис. 12.39

прямом переміщенні, яке чисельно буде дорівнювати $h_2 d\psi$. Отже, усередині кута $z_1 O z$ може бути така точка B , для якої $h_1 d\phi = h_2 d\psi$ і переміщення якої дорівнює нулю (якщо напрям одного з поворотів буде протилежним до показаного на рис. 12.39, то така точка лежить поза кутом $z_1 O z$). Звідси елементарне переміщення тіла, яке воно отримує внаслідок поворотів навколо осей $O z_1$ і $O z$, буде таким самим, як у тіла, що має дві нерухомі точки O і B , тобто є елементарним поворотом навколо осі OB , яка проходить через точку O . Аналогічно дійдемо висновку, що елементарні повороти навколо осей OB і OK будуть еквівалентними одному елементарному повороту навколо деякої осі Op , яка проходить через точку O (рис. 12.39).

Вісь Op , елементарним поворотом навколо якої можна перемістити тіло з даного положення в суміжне, нескінченно близьке до даного, називається **миттєвою віссю обертання**.

Таким чином, обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки складається із серії послідовних елементарних поворотів навколо миттєвих осей обертання, які проходять через цю нерухому точку (рис. 12.40).

Розглянуте виражає зміст і доведення теореми Ейлера—Д'Аламбера¹: *Кожне елементарне переміщення твердого тіла, що має нерухому точку, являє собою елементарний поворот навколо деякої миттєвої осі обертання, що проходить через цю нерухому точку.*

Кінематичними характеристиками обертального руху тіла навколо нерухомої точки є миттєва кутова швидкість і миттєве кутове прискорення.

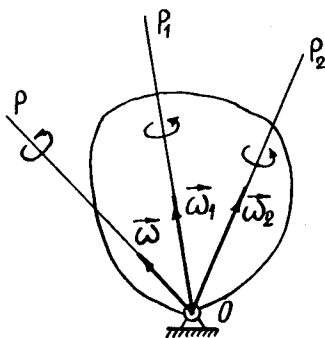


Рис. 12.40

¹ Жан Лерон Д'Аламбер (1717—1783) — французький математик, механік і філософ, член Паризької академії наук.

Кутова швидкість $\bar{\omega}$, з якою тіло здійснює елементарний поворот навколо миттєвої осі обертання, називається **миттєвою кутовою швидкістю**. Вектор миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}$ напрямлений по миттєвій осі обертання в той бік, з якого спостерігач бачить обертання, яке здійснює тіло, проти руху стрілки годинника.

На підставі теореми Ейлера—Д'Аламбера вектор $\bar{\omega}$ визначається у вигляді

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3, \quad (12.65)$$

де $\bar{\omega}_1$ — кутова швидкість елементарного повороту тіла навколо осі Oz ($\omega_1 = \psi$); $\bar{\omega}_2$ — кутова швидкість елементарного повороту тіла навколо осі Oz_1 ($\omega_2 = \phi$); $\bar{\omega}_3$ — кутова швидкість елементарного повороту тіла навколо осі ON , яка збігається з лінією вузлів ($\omega_3 = \theta$).

З урахуванням значень $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ і $\bar{\omega}_3$ формула (12.65) набирає вигляду

$$\bar{\omega} = \psi \bar{k} + \phi \bar{k}_1 + \theta \bar{n}, \quad (12.66)$$

де \bar{k} — одиничний вектор осі Oz ; \bar{k}_1 — одиничний вектор осі Oz_1 ; \bar{n} — одиничний вектор осі ON , що збігається з лінією вузлів.

Отже, при русі тіла, що має одну нерухому точку, вираз “кутова швидкість” має умовний характер, оскільки положення тіла визначається не одним, а трьома кутами.

Оскільки напрям миттєвої осі Op безперервно змінюється, то вектор $\bar{\omega}$ також змінюється не тільки за величиною, а й за напрямом (рис. 12.40).

Миттєвим кутовим прискоренням $\bar{\epsilon}$ твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, є векторна величина:

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (12.67)$$

З формули (12.67) випливає, що вектор $\bar{\epsilon}$ можна розглядати як вектор швидкості кінця вектора $\bar{\omega}$. Напрямок вектора $\bar{\epsilon}$ як дотичної до годографа вектора $\bar{\omega}$ залежить від закону зміни вектора $\bar{\omega}$ (рис. 12.41).

Отже, на відміну від тіла, що обертається навколо нерухомої осі, де вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\epsilon}$ напрямлені вздовж осі обертання, для тіла, що обертається навколо нерухомої точки, напрям векторів $\bar{\omega}$ і $\bar{\epsilon}$ відносно один до одного залежить від закону зміни вектора кутової швидкості $\bar{\omega}$.

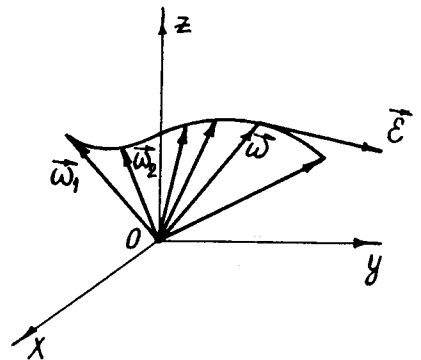


Рис. 12.41

12.12. Визначення миттєвої кутової швидкості і миттєвого кутового прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

На підставі формули (12.65) вектор миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ при обертанні тіла навколо нерухомої точки визначається як замикальна сторона багатокутника кутових швидкостей елементарних поворотів тіла навколо осей Oz , Oz_1 і ON (збігається з лінією вузлів), тобто $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$ (рис. 12.42).

Модуль вектора $\vec{\omega}$ знайдемо так. З паралелограма кутових швидкостей $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ знаходимо вектор $\vec{\omega}_4$ як діагональ паралелограма:

$$\omega_4^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \theta.$$

З паралелограма кутових швидкостей $\vec{\omega}_4$ і $\vec{\omega}_3$ дістанемо

$$\omega^2 = \omega_4^2 + \omega_3^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \theta + \omega_3^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \theta, \quad (12.68)$$

оскільки вектор $\vec{\omega}_4$ лежить у площині zOz_1 , а вектор $\vec{\omega}_3$ має напрям уздовж лінії вузлів, що перпендикулярна до площини zOz_1 , тобто кут між векторами $\vec{\omega}_4$ і $\vec{\omega}_3$ дорівнює 90° (рис. 12.42).

Враховуючи, що $\omega_1 = \dot{\psi}$, $\omega_2 = \dot{\phi}$ і $\omega_3 = \dot{\theta}$, формула (12.68) набирає вигляду

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta}. \quad (12.69)$$

Формула (12.69) визначає модуль миттєвої кутової швидкості твердого тіла при обертанні тіла навколо миттєвої осі Op .

Модуль і напрям кутової швидкості $\vec{\omega}$ можна також визначити за її проєкціями на нерухомі осі системи координат $Oxyz$ або на рухомі осі системи координат $Ox_1y_1z_1$. Проєкція $\vec{\omega}$ на кожну вісь визначається як алгебрична сума проєкцій векторів $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ і $\vec{\omega}_3$ на кожну вісь.

Проєкціюючи вектори $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ і $\vec{\omega}_3$ на осі нерухомої системи координат $Oxyz$ (рис. 12.42), здобудемо:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_2 \sin \theta \sin \psi + \omega_3 \cos \psi; \\ \omega_y &= -\omega_2 \sin \theta \cos \psi - \omega_3 \sin \psi; \\ \omega_z &= \omega_1 + \omega_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

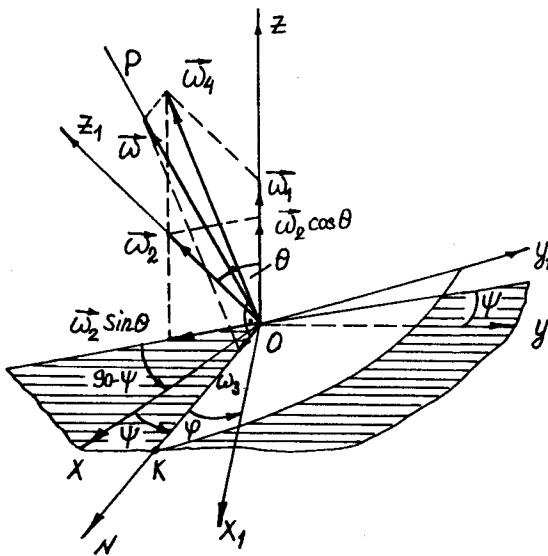


Рис. 12.42

Враховуючи значення $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ і $\bar{\omega}_3$, подамо останні рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \\ \omega_y &= -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}\quad (12.70)$$

Рівняння (12.70) називаються *кінематичними рівняннями Ейлера*. Модуль вектора $\bar{\omega}$ визначається за формулою

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta}.$$

Напрямок вектора $\bar{\omega}$ в системі координат $Oxyz$ визначається за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\bar{\omega}, x}) = \frac{\omega_x}{\omega}; \quad \cos(\widehat{\bar{\omega}, y}) = \frac{\omega_y}{\omega}; \quad \cos(\widehat{\bar{\omega}, z}) = \frac{\omega_z}{\omega}.\quad (12.71)$$

Проекціюючи вектори $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ і $\bar{\omega}_3$ на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 12.43), здобудемо:

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \omega_1 \sin \theta \sin \varphi + \omega_3 \cos \varphi; \\ \omega_{y_1} &= \omega_1 \sin \theta \cos \varphi - \omega_3 \sin \varphi; \\ \omega_{z_1} &= \omega_1 \cos \theta + \omega_2.\end{aligned}$$

Враховуючи значення $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ і $\bar{\omega}_3$, подамо останні рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.\end{aligned}\quad (12.72)$$

Рівняння (12.72), так само як і рівняння (12.70), називаються *кінематичними рівняннями Ейлера*.

Модуль вектора $\bar{\omega}$ визначається за формулою

$$\omega = \sqrt{\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 + \omega_{z_1}^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta}.$$

Напрямок вектора $\bar{\omega}$ в системі координат $Ox_1y_1z_1$ визначається за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\bar{\omega}, x_1}) = \frac{\omega_{x_1}}{\omega}; \quad \cos(\widehat{\bar{\omega}, y_1}) = \frac{\omega_{y_1}}{\omega}; \quad \cos(\widehat{\bar{\omega}, z_1}) = \frac{\omega_{z_1}}{\omega}.\quad (12.73)$$

Якщо вектор миттєвої кутової швидкості подати у вигляді

$$\bar{\omega} = \omega \bar{e},$$

де \bar{e} — одиничний вектор миттєвої осі Op , то на підставі формули (12.67) здобудемо

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\bar{e}) = \frac{d\omega}{dt}\bar{e} + \omega\frac{d\bar{e}}{dt} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2. \quad (12.74)$$

Складова вектора миттєвого кутового прискорення

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\bar{e}; \quad (12.75)$$

вона характеризує зміну вектора $\bar{\omega}$ за величиною, а складова

$$\bar{\varepsilon}_2 = \omega\frac{d\bar{e}}{dt}; \quad (12.76)$$

$\bar{\varepsilon}_2$ характеризує зміну вектора $\bar{\omega}$ за напрямом (рис. 12.44).

Модуль і напрям миттєвого кутового прискорення ε можна також визначити за проекціями вектора $\bar{\varepsilon}$ на нерухомі $Oxyz$ і рухомі $Ox_1y_1z_1$ осі координат.

Розкладемо вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ по осях нерухомої системи координат:

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}, \quad (12.77)$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x\bar{i} + \varepsilon_y\bar{j} + \varepsilon_z\bar{k}. \quad (12.78)$$

Вектор кутового прискорення дорівнює похідній за часом від вектора кутової швидкості [формула (12.67)], тому

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}) = \frac{d\omega_x}{dt}\bar{i} + \frac{d\omega_y}{dt}\bar{j} + \frac{d\omega_z}{dt}\bar{k}, \quad (12.79)$$

де \bar{i} , \bar{j} і \bar{k} — сталі.

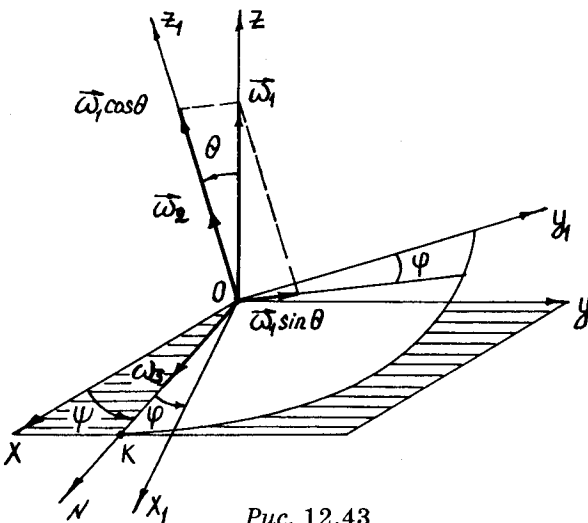


Рис. 12.43

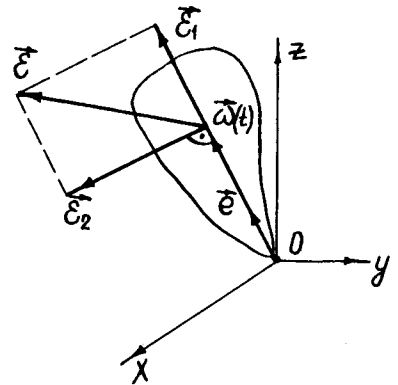


Рис. 12.44

Порівнюючи вирази (12.78) і (12.79), знаходимо проекції вектора $\bar{\varepsilon}$ на нерухомі осі координат $Oxyz$:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}; \quad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (12.80)$$

Розкладемо вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ по осях рухомої системи координат:

$$\bar{\omega} = \omega_{x_1} \bar{i}_1 + \omega_{y_1} \bar{j}_1 + \omega_{z_1} \bar{k}_1, \quad (12.81)$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{x_1} \bar{i}_1 + \varepsilon_{y_1} \bar{j}_1 + \varepsilon_{z_1} \bar{k}_1. \quad (12.82)$$

Вектор кутового прискорення дорівнює похідній за часом від вектора кутової швидкості, тому

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\omega_{x_1} \bar{i}_1 + \omega_{y_1} \bar{j}_1 + \omega_{z_1} \bar{k}_1) = \left(\omega_{x_1} \frac{d\bar{i}_1}{dt} + \omega_{y_1} \frac{d\bar{j}_1}{dt} + \omega_{z_1} \frac{d\bar{k}_1}{dt} \right) + \\ &+ \left(\frac{d\omega_{x_1}}{dt} \bar{i}_1 + \frac{d\omega_{y_1}}{dt} \bar{j}_1 + \frac{d\omega_{z_1}}{dt} \bar{k}_1 \right), \end{aligned}$$

де $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1, \omega_{x_1}, \omega_{y_1}$ і ω_{z_1} — функції часу.

На підставі формул (11.25) перший доданок набирає вигляду

$$\omega_{x_1} \frac{d\bar{i}_1}{dt} + \omega_{y_1} \frac{d\bar{j}_1}{dt} + \omega_{z_1} \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \bar{\omega} \times (\omega_{x_1} \bar{i}_1 + \omega_{y_1} \bar{j}_1 + \omega_{z_1} \bar{k}_1) = \bar{\omega} \times \bar{\omega} = 0.$$

Тоді

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\omega_{x_1}}{dt} \bar{i}_1 + \frac{d\omega_{y_1}}{dt} \bar{j}_1 + \frac{d\omega_{z_1}}{dt} \bar{k}_1. \quad (12.83)$$

Порівнюючи вирази (12.82) і (12.83), знаходимо проекції вектора $\bar{\varepsilon}$ на рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$:

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{d\omega_{x_1}}{dt}; \quad \varepsilon_{y_1} = \frac{d\omega_{y_1}}{dt}; \quad \varepsilon_{z_1} = \frac{d\omega_{z_1}}{dt}. \quad (12.84)$$

Модуль і напрям вектора кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ визначаються за формулами:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{y_1}^2 + \varepsilon_{z_1}^2}; \quad (12.85)$$

$$\cos(\widehat{\bar{\varepsilon}, x}) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon}; \quad \cos(\widehat{\bar{\varepsilon}, y}) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon}; \quad \cos(\widehat{\bar{\varepsilon}, z}) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}; \quad (12.86)$$

$$\cos(\widehat{\bar{\varepsilon}, x_1}) = \frac{\varepsilon_{x_1}}{\varepsilon}; \quad \cos(\widehat{\bar{\varepsilon}, y_1}) = \frac{\varepsilon_{y_1}}{\varepsilon}; \quad \cos(\widehat{\bar{\varepsilon}, z_1}) = \frac{\varepsilon_{z_1}}{\varepsilon}. \quad (12.87)$$

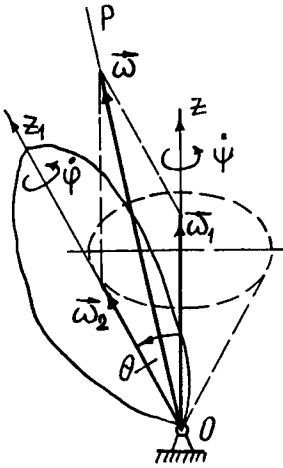


Рис. 12.45

На закінчення розглянемо обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки O , що складається з обертання тіла навколо власної осі симетрії Oz_1 з кутовою швидкістю $\omega_2 = \dot{\varphi} = \text{const}$ і обертання разом з цією віссю навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\omega_1 = \dot{\psi} = \text{const}$, описуючи конічну поверхню з кутом θ (рис. 12.45). Якщо при русі тіла кут θ залишається сталим, то рух, що здійснює вісь симетрії Oz_1 , називається *регулярною прецесією*.

При регулярній прецесії власної осі тіла, що здійснює рух навколо нерухомої точки, вектор миттєвої кутової швидкості тіла визначається за формулою

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (12.88)$$

Модуль вектора $\vec{\omega}$ визначається за формулою

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta}. \quad (12.89)$$

Вектор миттєвого кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на підставі формули (12.74)

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega} \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}, \quad (12.90)$$

де $\vec{\Omega}$ — кутова швидкість обертання вектора $\vec{\omega}$.

Модуль кутового прискорення ε визначається за формулою

$$\varepsilon = h_{\Omega} \Omega, \quad (12.91)$$

де h_{Ω} — найкоротша відстань від кінця вектора $\vec{\omega}$ до осі, по якій напрямлений вектор $\vec{\Omega}$.

12.13. Визначення швидкості і прискорення довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Нехай тверде тіло має нерухому точку O . Зв'яжемо з тілом систему координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 12.46). Візьмемо в тілі довільну точку M . Положення цієї точки в рухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$ будемо визначати радіусом-вектором \vec{r} :

$$\vec{r} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1, \quad (12.92)$$

де x_1, y_1, z_1 — координати точки M у рухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$ (сталі величини); $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ — одиничні вектори осей координат $Ox_1y_1z_1$ (функції часу).

За визначенням швидкості точки, швидкість точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1) = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt}. \quad (12.93)$$

Знайдемо проєкції вектора \vec{V} швидкості точки M на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$. Помножуючи обидві частини рівняння (12.93) скалярно на одиничні вектори \vec{i}_1 , \vec{j}_1 і \vec{k}_1 , здобудемо:

$$\begin{aligned} V_x &= \vec{V} \cdot \vec{i}_1 = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1; \\ V_y &= \vec{V} \cdot \vec{j}_1 = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1; \\ V_z &= \vec{V} \cdot \vec{k}_1 = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1. \end{aligned} \quad (12.94)$$

Між одиничними векторами \vec{i}_1 , \vec{j}_1 і \vec{k}_1 існують такі рівності:

$$\begin{aligned} \vec{i}_1^2 &= 1; \quad \vec{j}_1^2 = 1; \quad \vec{k}_1^2 = 1; \\ \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 &= 0; \quad \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0; \quad \vec{k}_1 \cdot \vec{i}_1 = 0. \end{aligned} \quad (12.95)$$

Диференціюючи за часом рівності (12.95), здобудемо:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 = 0; \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = 0; \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 = 0; \quad (12.96)$$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = -\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1; \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 = -\frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1; \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 = -\frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1. \quad (12.97)$$

Враховуючи вирази (12.96) і (12.97), рівняння (12.94) можна записати так:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 z_1 - \frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 y_1; \\ V_y &= \frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 x_1 - \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 z_1; \\ V_z &= \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 y_1 - \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 x_1. \end{aligned} \quad (12.98)$$

На підставі формули (11.22) маємо:

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 = \omega_{x_1}; \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 = \omega_{y_1}; \quad \frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = \omega_{z_1}.$$

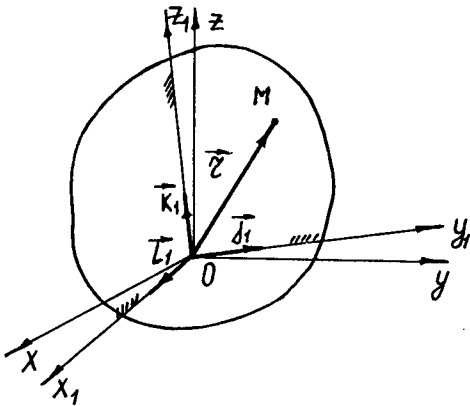


Рис. 12.46

Тоді рівняння (12.98) набирають вигляду:

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1; \\ V_{y_1} &= \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1; \\ V_{z_1} &= \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1, \end{aligned} \tag{12.99}$$

де $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ — проєкції вектора миттєвої кутової швидкості твердого тіла на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$.

Отже, вектор швидкості довільної точки M твердого тіла, що має одну нерухому точку, можна подати у вигляді

$$\vec{V} = (\omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1) \vec{i} + (\omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1) \vec{j} + (\omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1) \vec{k}_1. \tag{12.100}$$

Розглянемо векторний добуток $\vec{\omega} \times \vec{r}$ і визначимо його проєкції на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \tag{12.101}$$

$$= (\omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1) \vec{i}_1 + (\omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1) \vec{j}_1 + (\omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1) \vec{k}_1.$$

Оскільки проєкції векторів \vec{V} і $\vec{\omega} \times \vec{r}$ однакові, то

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{12.102}$$

де $\vec{\omega}$ — вектор миттєвої кутової швидкості тіла; \vec{r} — радіус-вектор довільної точки M тіла.

Отже, швидкості точок тіла, що має одну нерухому точку, розподіляються так, ніби тіло обертається навколо осі, яка збігається в даний момент часу з миттєвою віссю обертання. Величина швидкості довільної точки M тіла в даний момент часу визначається рівністю

$$V = \omega \rho, \tag{12.103}$$

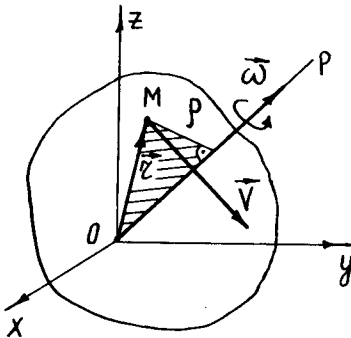


Рис. 12.47

де ρ — найкоротша відстань від точки M до миттєвої осі обертання (рис. 12.47).

Вектор \vec{V} швидкості довільної точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки O , має напрям, перпендикулярний до площини, що проходить через її радіус-вектор \vec{r} і миттєву вісь обертання Op (рис. 12.47).

Якщо відомі напрями векторів швидкостей двох точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, то положення миттєвої осі обертання Op можна визначити графічно. З рис. 12.47 випливає, що миттє-

ва вісь Op лежить у площині, перпендикулярній до вектора швидкості точки тіла, і проходить через нерухому точку тіла O . Таким чином, якщо через точки твердого тіла, вектори швидкостей яких відомі, провести площини, перпендикулярні до цих векторів, то лінія перетину цих площин і буде миттєвою віссю обертання Op .

Миттєву вісь обертання Op можна визначити також, якщо відома одна точка тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. З'єднаючи цю точку з нерухомою точкою тіла O , знайдемо миттєву вісь обертання Op .

Якщо взяти будь-яку точку твердого тіла, що лежить в даний момент часу на миттєвій осі обертання, то радіус-вектор \vec{r} цієї точки і вектор миттєвої кутової швидкості тіла $\vec{\omega}$ будуть напрямлені вздовж однієї прямої. Отже, проєкції цих векторів на осі координат будуть пропорційними. Тому, якщо позначити координати точки, що лежить на миттєвій осі обертання, через x, y і z , матимемо

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (12.104)$$

Рівняння (12.104) — це рівняння миттєвої осі обертання в нерухомій системі координат $Oxyz$.

Аналогічно отримаємо рівняння миттєвої осі обертання в рухомій системі координат:

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \quad (12.105)$$

Геометричне місце миттєвих осей обертання, побудованих у нерухомій системі координат, називається *нерухомим аксоїдом*.

Геометричне місце миттєвих осей обертання, побудованих у рухомій системі координат, називається *рухомим аксоїдом*.

Нерухомий і рухомий аксоїди являють собою конуси з вершинами в нерухомій точці O , оскільки усі миттєві осі проходять через цю точку. Рухомий і нерухомий аксоїди в кожний даний момент часу дотикаються один до одного вздовж загальної твірної Op , що є в цей момент часу віссю обертання твердого тіла (рис. 12.48).

При русі твердого тіла рухомий аксоїд котиться без ковзання по нерухомому, що дає наочну геометричну картину руху твердого тіла навколо нерухомої точки.

Визначимо прискорення довільної точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Прискорення точки M тіла за визначенням

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (12.106)$$

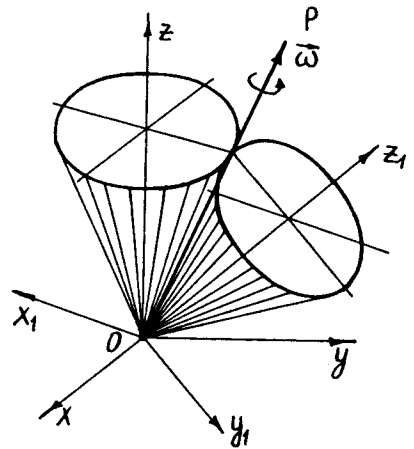


Рис. 12.48

Таким чином, прискорення довільної точки M твердого тіла при обертанні навколо нерухомої точки складається з двох прискорень:

$$\vec{W}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad (12.107)$$

$$\vec{W}^{доос} = \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (12.108)$$

Прискорення $\vec{W}^{об}$ називається *обертальним прискоренням* точки M , а $\vec{W}^{доос}$ — *доосьовим прискоренням* точки M . Величина $\vec{W}^{об}$ становить:

$$W^{об} = \varepsilon r \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{r}}) = \varepsilon h, \quad (12.109)$$

де h — найкоротша відстань від точки M до вектора $\vec{\varepsilon}$.

Обертальне прискорення точки M має напрям перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і \vec{r} в той бік, звідки найкоротший перехід від вектора $\vec{\varepsilon}$ до вектора \vec{r} видно проти руху стрілки годинника (рис. 12.49). Особливо зазначимо, що через незбіжність векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ вектор $\vec{W}^{об}$ може бути напрямлений відносно вектора швидкості \vec{V} довільної точки M тіла під будь-яким кутом, залишаючись перпендикулярним до вектора \vec{r} . У цьому істотна відміна між обертанням тіла навколо нерухомої осі і рухом тіла, що має одну нерухому точку.

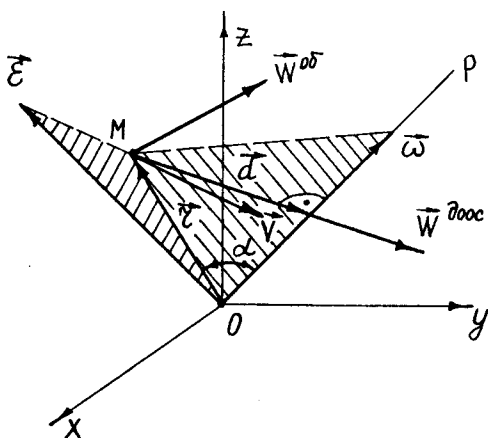


Рис. 12.49

Доосьове прискорення точки M $\vec{W}^{доос}$ має напрям уздовж перпендикуляра до площини векторів $\vec{\omega}$ і \vec{V} , тобто по напрямку вектора \vec{d} (рис. 12.49).

Вектор \vec{d} має початок у точці M і кінець в основі перпендикуляра, що проведений через точку M на миттєву вісь обертання Op (рис. 12.49).

Модуль вектора

$$\vec{W}^{доос} = \omega^2 d, \quad (12.110)$$

оскільки $\omega r \sin \alpha = \omega d$.

Таким чином, прискорення довільної точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, дорівнює геометричній сумі обертального $\vec{W}^{об}$ і доосьового $\vec{W}^{доос}$ прискорень точки M :

$$\vec{W} = \vec{W}^{об} + \vec{W}^{доос}. \quad (12.111)$$

Модуль повного прискорення точки M визначається за формулою

$$W = \sqrt{(W^{об})^2 + (W^{доос})^2 + 2W^{об}W^{доос} \cos \gamma}, \quad (12.111a)$$

де γ — кут між векторами $\vec{W}^{об}$ і $\vec{W}^{доос}$.

12.14. Рух вільного твердого тіла в загальному випадку. Визначення швидкості і прискорення довільної точки тіла

У параграфі 12.1 показано, що положення вільного твердого тіла відносно нерухомої системи відліку визначається шістьма незалежними параметрами — трьома координатами полюса і трьома напрямними косинусами осей рухомої і нерухомої систем координат.

У параграфі 12.11 також доведено, що замість трьох незалежних напрямних косинусів осей координат доцільніше прийняти три кути Ейлера.

Отже, щоб визначити рух вільного твердого тіла в загальному випадку, візьмемо окрім нерухомої системи координат $Oxyz$ ще й рухому систему координат $O_1x_2y_2z_2$, що рухається поступально відносно осей координат $Oxyz$ і зв'язана з тілом тільки в одній точці O_1 (полюсі), і рухому систему координат $O_1x_1y_1z_1$, яка незмінно зв'язана з тілом (рис. 12.50). У рухомій системі координат

$O_1x_2y_2z_2$ тверде тіло має одну закріплену точку — точку O_1 ; отже, тіло в цій системі координат бере участь у русі, який ми розглянули в параграфі 12.11. Таким чином, щоб задати положення твердого тіла в рухомій системі координат $O_1x_2y_2z_2$, можна ввести три кути Ейлера ψ , θ і φ , а щоб визначити положення тіла відносно нерухомої системи координат, необхідно задати ще положення точки O_1 , тобто знати ще три величини: x_{o_1} , y_{o_1} і z_{o_1} (рис. 12.50).

Отже, положення вільного твердого тіла в загальному випадку руху відносно нерухомої системи відліку визначається шістьма незалежними параметрами:

$$\begin{aligned} x_{o_1} &= f_1(t); \quad y_{o_1} = f_2(t); \quad z_{o_1} = f_3(t); \\ \psi &= \psi(t); \quad \theta = \theta(t); \quad \varphi = \varphi(t). \end{aligned} \quad (12.112)$$

Рівняння (12.112), так само як і рівняння (12.2), називаються *кінематичними рівняннями руху вільного твердого тіла в загальному випадку*.

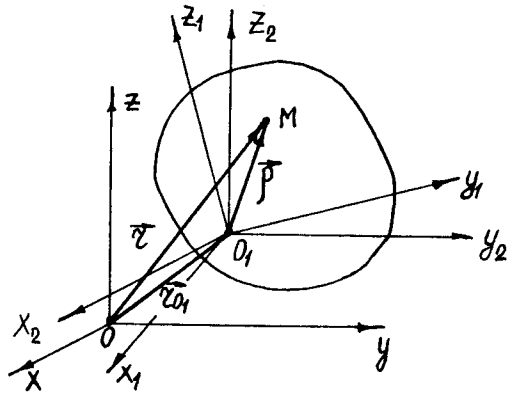


Рис. 12.50

Визначимо швидкість довільної точки вільного твердого тіла. З рис. 12.50 випливає, що радіус-вектор довільної точки M тіла

$$\vec{r} = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}.$$

За визначенням швидкості точки, швидкість точки M знайдемо за формулою

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (12.113)$$

Похідна $\frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt}$ визначає швидкість полюса O_1 — \vec{V}_{O_1} ; похідна $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ визначає швидкість точки M при русі твердого тіла відносно рухомої системи координат $O_1x_2y_2z_2$, в якій тіло має одну закріплену точку, тобто $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$.

Отже, формулу (12.113) можна записати так:

$$\vec{V} = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (12.114)$$

де $\vec{\omega}$ — вектор миттєвої кутової швидкості твердого тіла; $\vec{\rho}$ — радіус-вектор точки M у системі координат $O_1x_1y_1z_1$.

Так само, як і при плоскопаралельному русі твердого тіла, при русі вільного тіла можна довести, що миттєва кутова швидкість не залежить від вибору полюса.

Таким чином, за формулою (12.114) швидкість будь-якої точки M вільного твердого тіла дорівнює геометричній сумі швидкості довільної точки тіла-полюса і швидкості точки M тіла при обертальному русі тіла відносно полюса.

При русі вільного твердого тіла справедлива також така теорема: *проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що проходить через ці точки, рівні між собою.*

Дійсно, проєкціюючи рівність (12.114) на пряму AB , що проходить через точки M і O_1 , здобудемо

$$\text{пр}_{AB}(\vec{V}_M) = \text{пр}_{AB}(\vec{V}_{O_1}) + \text{пр}_{AB}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}),$$

але вектор $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ перпендикулярний до вектора $\vec{\rho}$ і, отже, до прямої AB , тому $\text{пр}_{AB}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = 0$ і $\text{пр}_{AB}(\vec{V}_M) = \text{пр}_{AB}(\vec{V}_{O_1})$.

За визначенням прискорення точки, прискорення довільної точки M вільного твердого тіла знайдемо за формулою

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (12.115)$$

Похідна $\frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt}$ визначає прискорення полюса O_1 — \vec{W}_{O_1} ; похідна $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ визначає кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ твердого тіла в рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$; похідна $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ визначає швидкість точки M при обертанні тіла навколо полюса, тобто $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$.

Отже, формулу (12.115) можна записати так:

$$\vec{W} = \vec{W}_{O_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \quad (12.116)$$

Зважаючи на те що

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \vec{W}^{об}, \quad (12.117)$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \vec{V} = \omega^2 \vec{d} = \vec{W}^{доос}, \quad (12.118)$$

де вектор \vec{d} — вектор, що має початок в точці M , а кінець — в основі перпендикуляра, що проведений через точку M на вектор миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ (рис. 12.51).

Прискорення $\vec{W}^{об}$ (обертальне прискорення точки M) за модулем

$$W^{об} = \varepsilon h, \quad (12.119)$$

де h — найкоротша відстань від точки M до вектора $\vec{\varepsilon}$.

Прискорення $\vec{W}^{доос}$ (доосьове прискорення точки M) за модулем

$$W^{доос} = \omega^2 d, \quad (12.120)$$

де d — модуль вектора \vec{d} .

З урахуванням рівностей (12.117) і (12.118) вираз (12.116) набирає вигляду

$$\vec{W} = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}^{об} + \vec{W}^{доос}. \quad (12.121)$$

З формули (12.121) випливає, що при русі вільного твердого тіла в загальному випадку прискорення довільної точки M дорівнює геометричній сумі прискорення полюса \vec{W}_{O_1} , обертального $\vec{W}^{об}$ і доосьового $\vec{W}^{доос}$ прискорень точки M при обертанні тіла відносно полюса.

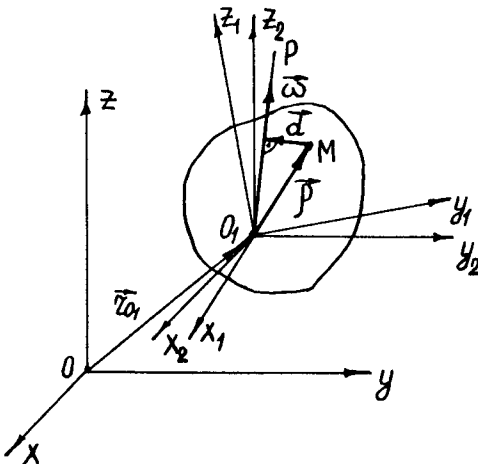


Рис. 12.51

12.15. Методика та приклади розв'язання задач з кінематики твердого тіла

При поступальному русі твердого тіла траєкторії точок тіла однакові й утворюються одна з одної шляхом паралельного зміщення; швидкості і прискорення усіх точок тіла геометрично рівні. Отже, при розв'язанні задач про поступальний рух твердого тіла достатньо визначити рух будь-якої однієї точки тіла. Таким чином, задача про поступальний рух твердого тіла зводиться до задачі кінематики точки.

Приклад 12.1. Для здійснення зворотно-поступального руху сита E для просіювання борошна застосовано кривошипно-кулісний механізм, схема якого подана на рис. 12.52. Куліса O_1B з'єднана із ситом E в точці B і з кривошипом OA у точці A за допомогою ковзних муфт, а в точці O_1 спирається на нерухомий шарнір. Довжина куліси дорівнює l . Кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю ω і $O_1O = OA = a$.

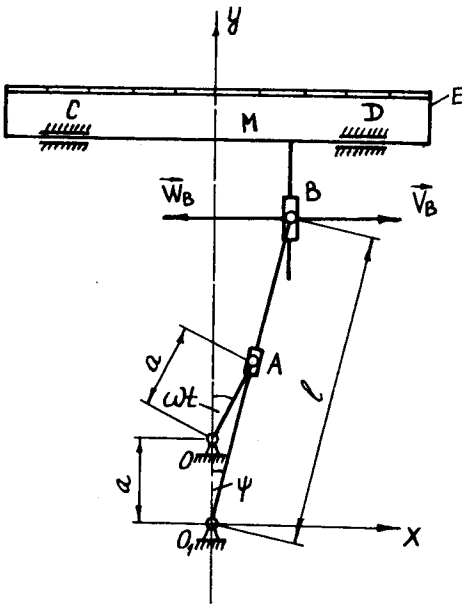


Рис. 12.52

Визначити рівняння руху сита E , а також його швидкість і прискорення.

Розв'язання. Сито E здійснює поступальний рух. Щоб визначити закон руху сита, достатньо визначити закон руху будь-якої точки сита, наприклад точки B . Побудуємо декартову систему координат з початком у точці O_1 і визначимо координату x точки B . З рис. 12.52 випливає, що

$$x_B = l \sin \psi.$$

З трикутника ΔO_1AO знайдемо

$$180^\circ = 2\psi + (180^\circ - \omega t),$$

звідки

$$\psi = \frac{180^\circ - (180^\circ - \omega t)}{2} = \frac{\omega t}{2}.$$

Отже, закон руху сита E набирає вигляду

$$x_B = l \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Щоб визначити швидкість сита E , диференціюємо закон руху сита за часом:

$$\dot{x}_B = \frac{dx_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(l \sin \frac{\omega t}{2} \right) = \frac{\omega l}{2} \cos \frac{\omega t}{2}.$$

Щоб визначити прискорення сита E , диференціюємо закон зміни швидкості сита за часом:

$$\ddot{x}_B = \frac{d\dot{x}_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega l}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \right) = -\frac{\omega^2 l}{4} \sin \frac{\omega t}{2}.$$

З виразів швидкості і прискорення сита E випливає, що максимальну швидкість сито має при проходженні середнього положення (точка M), а максимальне прискорення (сповільнення) сито має в крайніх положеннях (точки C і D).

При розв'язанні задач про обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, в яких відоме рівняння руху тіла, а потрібно визначити кутову швидкість і кутове прискорення тіла, а також швидкість і прискорення довільної точки тіла, слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) будуємо систему координат так, щоб одна з осей (для визначеності — вісь z) збігалася з віссю обертання;
- 2) диференціюючи за часом рівняння руху тіла, визначаємо кутову швидкість тіла;
- 3) диференціюючи за часом вираз кутової швидкості тіла, визначаємо кутове прискорення тіла;
- 4) знаючи кутову швидкість тіла, визначаємо швидкість довільної точки тіла і її доосьове прискорення;
- 5) знаючи прискорення тіла, визначаємо обертальне прискорення довільної точки тіла;
- 6) знаючи доосьове і обертальне прискорення довільної точки тіла, визначаємо повне прискорення точки як за величиною, так і за напрямом.

Якщо в задачі відоме кутове прискорення або кутова швидкість твердого тіла, а потрібно визначити закон руху тіла, швидкість і прискорення довільної точки тіла, слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) інтегруючи диференціальне рівняння, що визначає кутове прискорення тіла, здобудемо значення кутової швидкості тіла; сталу інтегрування визначаємо за початковими умовами руху тіла;
- 2) інтегруючи диференціальне рівняння, що визначає кутову швидкість тіла, здобудемо рівняння руху тіла; сталу інтегрування визначаємо за початковими умовами руху тіла;
- 3) знаючи кутову швидкість тіла, визначаємо швидкість довільної точки тіла і її доосьове прискорення;
- 4) визначаємо обертальне прискорення довільної точки, знаючи кутове прискорення тіла, і далі знаходимо повне прискорення точки.

Приклад 12.2. Лопатева мішалка для перемішування рідини обертається відносно нерухомої осі z за законом $\varphi = a \ln \left(1 + \frac{\omega_0 t}{a} \right)$, де φ — кут повороту мішалки в радіанах, t — час в секундах, а a і ω_0 — сталі коефіцієнти (рис. 12.53).

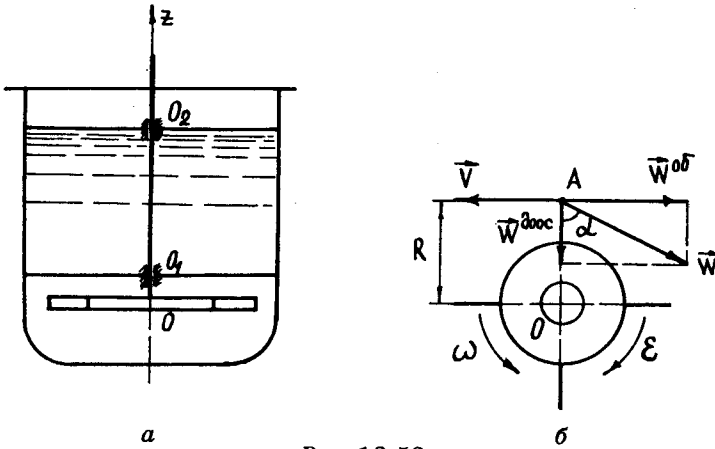


Рис. 12.53

Визначити кутову швидкість і кутове прискорення мішалки, а також швидкість і прискорення точки A лопаті, якщо відстань від центра мішалки до точки A $OA = R$ (рис. 12.53, б).

Розв'язання. Визначаємо кутову швидкість мішалки, диференціюючи за часом рівняння її руху:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[a \ln \left(1 + \frac{\omega_0 t}{a} \right) \right] = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a} t} \left(\frac{1}{c} \right).$$

З цієї рівності випливає, що у початковий момент часу $t = 0$ величина кутової швидкості мішалки дорівнює ω_0 .

Визначаємо кутове прискорення мішалки, диференціюючи за часом вираз її кутової швидкості:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a} t} \right) = - \frac{\omega_0^2}{a \left(1 + \frac{\omega_0}{a} t \right)^2} \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Оскільки кутове прискорення від'ємне, то кутова швидкість мішалки з часом зменшується.

Визначаємо швидкість точки A (рис. 12.53, б). Модуль швидкості точки A

$$V = R\omega = \frac{R\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a} t} \quad (\text{м/с}).$$

Вектор швидкості точки A зображено на рис. 12.53, б.

Прискорення точки A складається з доосового прискорення $\vec{W}_A^{\text{доос}}$ і обертального прискорення $\vec{W}_A^{\text{об}}$:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{\text{доос}} + \vec{W}_A^{\text{об}}.$$

Величина доосьового прискорення точки A визначається за формулою

$$W_A^{\text{доос}} = R\omega^2 = \frac{R\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a}t\right)^2} \quad (\text{м/с}).$$

Величина обертального прискорення точки A визначається за формулою

$$W_A^{\text{об}} = R\varepsilon = -\frac{R\omega_0^2}{a\left(1 + \frac{\omega_0}{a}t\right)^2} \quad (\text{м/с}^2).$$

Вектори $\vec{W}_A^{\text{доос}}$ і $\vec{W}_A^{\text{об}}$ зображено на рис. 12.53, б.

Модуль повного прискорення точки A

$$W = \sqrt{(W^{\text{доос}})^2 + (W^{\text{об}})^2} = \frac{R\omega_0^2}{a\left(1 + \frac{\omega_0}{a}t\right)^2} \sqrt{1 + a^2} \quad (\text{м/с}^2).$$

Кут α , що складає прискорення \vec{W} з вектором $\vec{W}^{\text{доос}}$, визначаємо за фор-

$$\text{мулою } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} = -\frac{1}{a}.$$

Приклад 12.3. На рис. 12.54 зображено схему дискової машини з горизонтальним валом для дроблення зерна. Машина має два диски (жорна), один з яких нерухомий 1 і зв'язаний з корпусом 3, а другий рухомий 2 і зв'язаний з валом 6. Зерно засипається в лійку 4 і за допомогою шнека 5 затягується в конусоподібну щілину між дисками 1 та 2 і роздрібнюється.

Вважаючи, що кутове прискорення вала протягом часу пуску машини стало, визначити час пуску, кутову швидкість і кутове прискорення рухомого диска, а також швидкість і прискорення точки M диска 2 в його робочому стані. Число обертів вала 6 в робочому стані машини $n = 750$ об/хв. Діаметр рухомого диска $D = 760$ мм. Від початку пуску машини до її робочого стану рухомий диск 2 здійснює $n_n = 60$ обертів.

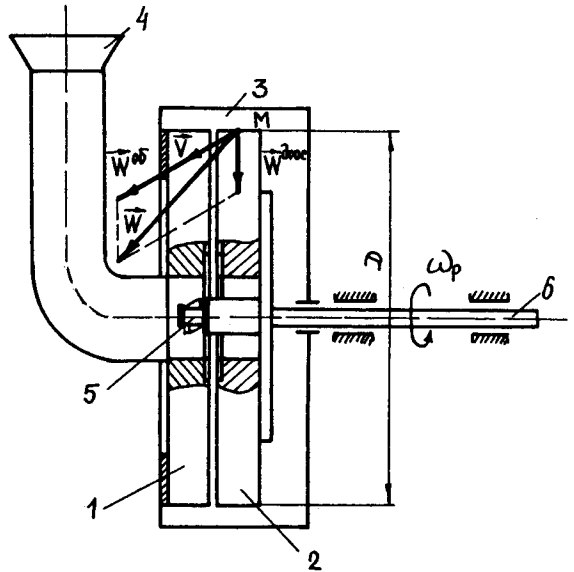


Рис. 12.54

Розв'язання. Запишемо закон зміни кутової швидкості і закон рівнозмінного руху диска 2 за час пуску t_n машини:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon t_n; \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t_n + \frac{\varepsilon t_n^2}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Підставляючи в ці рівняння початкові умови руху машини, тобто $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, здобудемо:

$$\begin{cases} \omega = \varepsilon t_n; \\ \varphi = \frac{\varepsilon t_n^2}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'язуючи систему (2), здобудемо закон зміни кута повороту диска 2 при пуску машини:

$$\varphi = \frac{\omega t_n}{2}. \quad (3)$$

Визначаємо кутову швидкість і кут повороту диска 2 в кінцевий момент часу t_n пуску машини:

$$\begin{aligned} \omega = \omega_p &= \frac{\pi n}{30} = \frac{750\pi}{30} = 2\pi \left(\frac{1}{c} \right); \\ \varphi = \varphi_k &= 2\pi n_n = 2\pi \cdot 60 = 120\pi \text{ рад.} \end{aligned}$$

З рівності (3) знаходимо час пуску машини

$$t_n = \frac{2\varphi_k}{\omega_p} = \frac{2 \cdot 120 \cdot \pi}{25\pi} = 9,6 \text{ (с)}.$$

З другого рівняння системи (2) знаходимо кутове прискорення диска 2

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t_n} = \frac{25\pi}{9,6} = 8,17 \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Визначаємо швидкість точки M диска 2 в робочому стані машини за формулою

$$V = \omega_p R = 25\pi \cdot 0,38 = 9,5\pi = 29,83 \text{ (м/с)}.$$

Вектор швидкості точки M диска 2 зображено на рис. 12.54.

Прискорення точки M диска 2 складається з доосьового прискорення $\vec{W}_M^{\text{доос}}$ і обертального прискорення $\vec{W}_M^{\text{об}}$:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_M^{\text{доос}} + \vec{W}_M^{\text{об}}.$$

Величина доосьового прискорення точки M диска 2 в робочому стані машини визначається за формулою

$$W_M^{\text{доос}} = \omega_p^2 R = (25\pi)^2 \cdot 0,38 = 2341,6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Величина обертального прискорення точки M диска 2 в робочому стані машини визначається за формулою

$$W_M^{\text{об}} = \varepsilon R = 8,17 \cdot 0,38 = 3,7 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Повне прискорення точки M диска 2 визначається за формулою

$$W_M = \sqrt{(W_M^{\text{доос}})^2 + (W_M^{\text{об}})^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,38\sqrt{8,17^2 + (25\pi)^2} = 2346,9 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектори $\vec{W}_M^{\text{об}}$, $\vec{W}_M^{\text{доос}}$ і \vec{W}_M зображено на рис. 12.54.

Приклад 12.4. На рис. 12.55 подано схему лопатевої планетарної мішалки. Через 2 с після пуску мішалки кількість обертів ведучого вала OO досягає свого робочого значення $n_0 = 980$ об/хв. Через конічну і циліндричну зубчасті передачі 1 і 2 ведений вал O_2O_3 , на якому насаджені лопати 3 мішалки, приводиться в рух (рис. 12.55).

Визначити швидкість і прискорення точки A лопати в кінці пуску мішалки. Кількість зубців конічної передачі $z_1 = 18$, $z_2 = 90$; кількість зубців циліндричної передачі $z_3 = 19$, $z_4 = 76$. Довжина лопати $l = 1$ м. Рух ведучого вала в період пуску вважати рівнозмінним.

Розв'язання. Визначаємо кутову швидкість ведучого вала в робочому стані мішалки:

$$\omega_p = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{3,14 \cdot 980}{30} = 102,6 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

На підставі закону зміни кутової швидкості ведучого вала при рівнозмінному русі визначаємо кутове прискорення за час розгону мішалки:

$$\omega_p = \omega_0 + \varepsilon t_n,$$

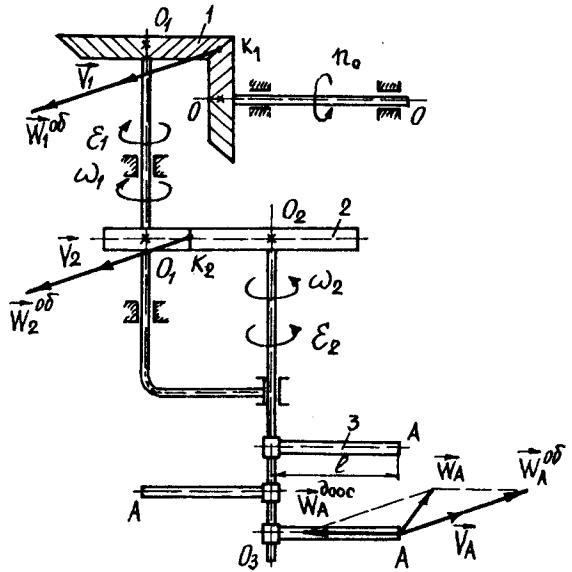


Рис. 12.55

звідки при $\omega_0 = 0$ здобудемо

$$\varepsilon = \frac{\omega_p}{t_n} = \frac{102,6}{2} = 51,3 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right).$$

Точка контакту конічних зубчастих коліс k_1 має швидкість

$$V_{k_1} = z_1 \omega_p = z_2 \omega_1,$$

де ω_1 — кутова швидкість вала O_1O_1 .

З цієї рівності знаходимо кутову швидкість вала O_1O_1 :

$$\omega_1 = \frac{z_1 \omega_p}{z_2} = \frac{18 \cdot 102,6}{90} = 20,5 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

Аналогічно знаходимо кутове прискорення вала O_1O_1 :

$$W_{k_1}^{\text{об}} = z_1 \varepsilon = z_2 \varepsilon_1,$$

звідки

$$\varepsilon_1 = \frac{z_1 \varepsilon}{z_2} = \frac{18 \cdot 51,3}{90} = 10,2 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right).$$

Точка контакту циліндричних зубчастих коліс k_2 має такі швидкість і обертальне прискорення:

$$V_2 = z_3 \omega_1 = z_4 \omega_2;$$

$$W_2^{\text{об}} = z_3 \varepsilon_1 = z_4 \varepsilon_2.$$

З цих рівностей здобудемо кутову швидкість і кутове прискорення веденого вала O_2O_3 в кінці пуску мішалки:

$$\omega_2 = \frac{z_3 \omega_1}{z_4} = \frac{19 \cdot 20,5}{76} = 5,1 \left(\frac{1}{\text{с}} \right);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{z_3 \varepsilon_1}{z_4} = \frac{19 \cdot 10,2}{76} = 2,6 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right).$$

Модуль швидкості точки A лопаті мішалки визначаємо за формулою

$$V_A = \omega_2 l = 5,1 \cdot 1 = 5,1 \text{ (м/с)}.$$

Вектор \vec{V}_A зображено на рис. 12.55.

Прискорення точки A лопаті мішалки складається з двох прискорень: обертального прискорення $\vec{W}_A^{\text{об}}$ і доосового прискорення $\vec{W}_A^{\text{доос}}$:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{\text{об}} + \vec{W}_A^{\text{доос}}.$$

Величина обертального прискорення точки A визначається за формулою

$$W_A^{об} = \varepsilon_2 l = 2,6 \cdot 1 = 2,6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Величина доосьового прискорення точки A визначається за формулою

$$W_A^{доос} = \omega_2^2 l = 5,1^2 \cdot 1 = 26,2 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right).$$

Повне прискорення точки A лопаті

$$W_A = \sqrt{(W_A^{доос})^2 + (W_A^{об})^2} = \sqrt{26,2^2 + 2,6^2} = 26,3 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектори $\vec{W}_A^{об}$, $\vec{W}_A^{доос}$ і \vec{W}_A зображено на рис. 12.55.

При розв'язанні задач про плоскопаралельний рух твердого тіла, тобто при визначенні кутової швидкості і кутового прискорення тіла, а також швидкостей і прискорень точок тіла, можна застосувати аналітичний і графоаналітичні способи.

Аналітичний спосіб доцільно застосовувати, якщо за умовою задачі є відомими або можна скласти (без особливих труднощів) рівняння руху тіла, тобто рівняння (12.33):

$$x_{O_i} = f_1(t); y_{O_i} = f_2(t); \varphi = \varphi(t).$$

Аналітичний спосіб дає можливість визначити швидкості та прискорення тіла і точок тіла як функції часу. Проте одержати такий розв'язок не завжди можливо.

До графоаналітичних способів визначення швидкостей належать: спосіб полюса, що ґрунтується на застосуванні векторної рівності (12.37); спосіб рівності проєкцій швидкостей, що ґрунтується на теоремі про проєкції швидкостей двох точок тіла на пряму, що сполучає ці точки, і спосіб МЦШ, що ґрунтується на застосуванні поняття МЦШ.

При застосуванні перших двох способів слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) прийняти за полюс точку тіла, швидкість якої відома;
- 2) на підставі векторної рівності (12.37) побудувати трикутник швидкостей іншої точки тіла, для якої відомий напрям лінії дії вектора її швидкості;
- 3) із трикутника швидкостей визначити швидкість другої точки тіла (аналітично або методом проєкцій);
- 4) із трикутника швидкостей визначити обертальну швидкість другої точки відносно полюса (аналітично або методом проєкцій);
- 5) визначити кутову швидкість твердого тіла;
- 6) знаючи кутову швидкість тіла, визначити швидкості інших точок тіла, застосовуючи векторну рівність (12.37).

Якщо ж задача розв'язується за допомогою способу МЦШ, то слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) визначити положення МЦШ твердого тіла одним з розглянутих вище способів (див. параграф 12.9);

2) визначити величину миттєвого радіуса тієї точки тіла, швидкість якої відома, і визначити кутову швидкість тіла, поділяючи величину швидкості точки на величину миттєвого радіуса;

3) знайти шукані величини швидкостей точок тіла, перемножуючи кутову швидкість на миттєвий радіус відповідної точки.

При розв'язанні задач з визначення прискорень точок тіла графоаналітичним способом, якщо відомі швидкість і прискорення однієї точки тіла та напрям швидкості і прискорення іншої точки тіла, можна рекомендувати таку послідовність дій:

1) знайти МЦП за відомими швидкостями двох точок тіла і визначити кутову швидкість тіла;

2) визначити доосьове прискорення другої точки тіла при обертанні тіла навколо першої точки;

3) прирівнюючи до нуля суму проєкцій усіх складових прискорень на вісь, перпендикулярну до відомого напрямку прискорення, знайти з цієї рівності величину невідомого обертального прискорення;

4) визначити кутове прискорення тіла за визначеним обертальним прискоренням;

5) визначити прискорення довільної точки тіла за допомогою векторної рівності (12.44).

Якщо задані прискорення двох точок тіла і необхідно визначити положення МЦП та прискорення будь-якої точки тіла, то при розв'язанні задач доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

1) розглядаючи першу точку тіла як полюс, проєкціюємо на пряму, що сполучає дві точки тіла, векторну рівність (12.44);

2) визначаємо з рівності (12.44) величину доосьового прискорення другої точки і далі величину кутової швидкості тіла;

3) проєкціюючи векторну рівність (12.44) на напрям, перпендикулярний до прямої, що сполучає дві точки тіла, знаходимо величину обертального прискорення другої точки і далі кутове прискорення тіла;

4) знаходимо прискорення будь-якої точки тіла, застосовуючи векторну рівність (12.44);

5) знаходимо положення МЦП, застосовуючи формули (12.50) і (12.51).

Із задач про визначення швидкостей та прискорень точок при плоскопаралельному русі твердого тіла найпоширеніші задачі, в яких є плоскі механізми. Розв'язуючи ці задачі, розглядають послідовно рух окремих ланок механізму, починаючи з тієї ланки, рух якої задано, а потім при переході від однієї ланки до другої визначають швидкості і прискорення тих точок, які є спільними для цих двох ланок механізму.

Приклад 12.5. Механізм щокової дробарки з верхнім підвісом щоки складається з нерухомої щоки I—I, рухомої щоки O_2C , передньої BC та задньої O_1B розпірних плит, шатуна AB та кривошипа OA , насадженого на вісь O . Кривошип OA обертається навколо нерухомої осі O з кутовою швидкістю ω_0 і передає за допомогою шатуна AB і розпірних плит BC та O_1B рух ру-

хомій щоці O_2C , яка, гойдаючись на осі O_2 , подрібнює матеріал, що розміщений між щоками (рис. 12.56).

Визначити кутові швидкості шатуна AB , розпірних плит BC і O_1B рухомої щоки O_2C та швидкості точок B , C і K (розташовані на середині шатуна AB) механізму в момент, коли $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$ і кривошип OA займає горизонтальне положення, якщо $l = 80$ см; $OA = 10$ см; $CB = O_1B = 40$ см; $O_2C = 60$ см і кутова

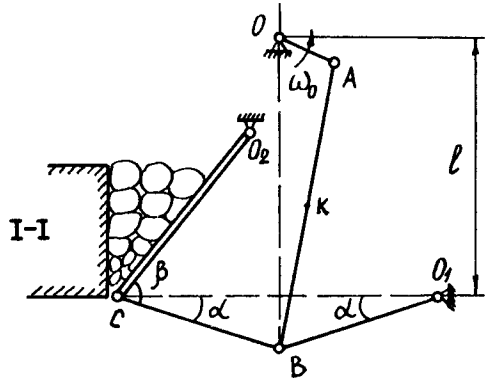


Рис. 12.56

швидкість кривошипа $\omega_0 = 10 \frac{1}{c}$.

Розв'язання. Визначення кутових швидкостей ланок і швидкостей точок плоского механізму можна здійснити трьома способами.

Спосіб 1. Беремо точку A кривошипа OA за полюс (рис. 12.57). Тоді швидкість точки B шатуна AB можна визначити як геометричну суму швидкостей — швидкості полюса A і швидкості точки B в обертальному русі навколо полюса A :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Швидкість полюса A (як швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі)

$$V_A = \omega_0 OA = 10 \cdot 0,1 = 1 \text{ (м/с)}.$$

Вектор \vec{V}_A має напрям, перпендикулярний до OA , а вектор \vec{V}_{BA} — перпендикулярний до AB . Напрямок вектора швидкості точки B \vec{V}_B визначається за рухом розпірної плити O_1B , яка гойдається навколо точки O_1 , тобто вектор \vec{V}_B має напрям, перпендикулярний до O_1B .

На підставі розглянутого будуємо в точці B трикутник швидкостей (рис. 12.57).

Визначаємо кут φ у трикутнику ΔOAB :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{80 + 0,5O_1B} = \frac{10}{100} = 0,1;$$

$$\varphi = \arctg 0,1 = 5^\circ 42'.$$

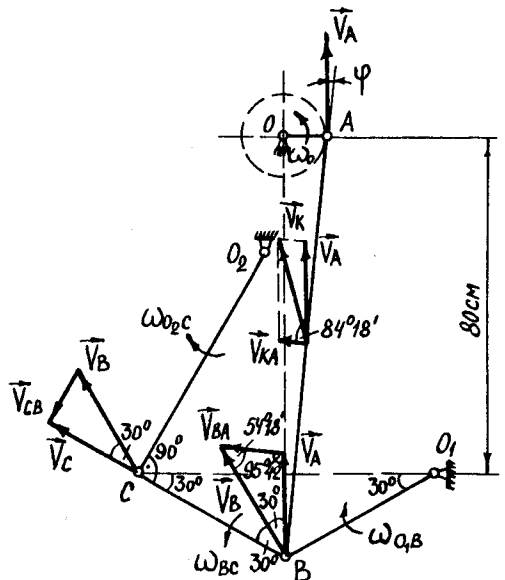


Рис. 12.57

Знаючи кут φ , неважко обчислити кути в трикутнику швидкостей: кут між \vec{V}_A і \vec{V}_B — 30° ; кут між \vec{V}_{BA} і \vec{V}_A — $95^\circ 42'$; кут між \vec{V}_B і \vec{V}_{BA} — $54^\circ 18'$.

Для визначення числових значень швидкостей \vec{V}_{BA} і \vec{V}_B записуємо теорему синусів:

$$\frac{V_A}{\sin 54^\circ 18'} = \frac{V_{BA}}{\sin 30^\circ} = \frac{V_B}{\sin 95^\circ 42'}.$$

Звідси

$$V_{BA} = \frac{V_A \sin 30^\circ}{\sin 54^\circ 18'} = \frac{0,5}{0,8121} = 0,615 \text{ (м/с)};$$

$$V_B = \frac{V_A \sin 95^\circ 42'}{\sin 54^\circ 18'} = \frac{0,9951}{0,8121} = 1,225 \text{ (м/с)}.$$

Оскільки $V_{BA} = \omega_{AB} AB$, то звідси маємо величину кутової швидкості шатуна AB :

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{V_{BA} \cos 5^\circ 42'}{OB} = 0,615 \cdot 0,9951 = 0,61 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

Визначимо швидкість точки K , яка міститься на середині шатуна AB . Для точки K можна записати

$$\vec{V}_K = \vec{V}_A + \vec{V}_{KA},$$

де вектор \vec{V}_{KA} перпендикулярний до AB .

Величину швидкості \vec{V}_{KA} обчислюємо так:

$$\vec{V}_{KA} = \omega_{AB} AK = \frac{0,61}{\cos 5^\circ 42' \cdot 2} = \frac{0,61}{0,9951 \cdot 2} = 0,305 \text{ (м/с)}.$$

Будуємо в точці K вектори \vec{V}_A і \vec{V}_{KA} (рис. 12.57). Вектор \vec{V}_K — діагональ паралелограма, побудованого на векторах \vec{V}_A і \vec{V}_{KA} .

Тоді на підставі теореми косинусів величина швидкості

$$\begin{aligned} V_K &= \sqrt{V_A^2 + V_{KA}^2 + 2V_A V_{KA} \cos \left(\widehat{\vec{V}_A, \vec{V}_{KA}} \right)} = \\ &= \sqrt{1^2 + 0,305^2 + 2 \cdot 0,305 \cdot 0,0993} = 1,059 \text{ (м/с)}, \end{aligned}$$

де кут $\left(\widehat{\vec{V}_A, \vec{V}_{KA}} \right) = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 5^\circ 42' = 84^\circ 18'$.

Визначаємо кутову швидкість розпірної плити O_1B :

$$\omega_{O_1B} = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{1,225}{0,4} = 3,06 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

Отже, щоб визначити \vec{V}_{BA} , необхідно побудувати трикутник швидкостей у точці B (рис. 12.58). З трикутника швидкостей визначаємо величину \vec{V}_{BA} :

$$\frac{V_{BA}}{\sin 30^\circ} = \frac{V_B}{\sin 95^\circ 42'}$$

звідки

$$V_{BA} = \frac{V_B \sin 30^\circ}{\sin 95^\circ 42'} = \frac{1,225 \cdot 0,5}{0,8121} = 0,615 \text{ (м/с)},$$

де кути між \vec{V}_B і $(-\vec{V}_A)$, $(-\vec{V}_A)$ і \vec{V}_{BA} визначені при розв'язанні задачі способом 1.

Тепер визначаємо кутову швидкість шатуна AB :

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{V_{BA} \cos \varphi}{OB} = \frac{0,615 \cos 5^\circ 42'}{1} = 0,615 \cdot 0,9951 \text{ м} = 0,611 \text{ (м/с)}.$$

Щоб визначити швидкість точки C , застосуємо теорему про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що сполучає ці точки.

Проекціюємо вектори швидкостей точок B і C на пряму CB :

$$V_C = V_B \cos 30^\circ = 1,225 \cdot 0,866 = 1,059 \text{ (м/с)},$$

де кут між CB і \vec{V} визначено при розв'язанні задачі способом 1.

Щоб визначити кутову швидкість розпірної плити BC , необхідно визначити швидкість \vec{V}_{CB} . Вектор \vec{V}_{CB} перпендикулярний до BC .

Для точки C можна записати:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}.$$

Звідси маємо

$$\vec{V}_{CB} = \vec{V}_C + (-\vec{V}_B).$$

Будуємо трикутник швидкостей у точці C . З трикутника швидкостей визначаємо величину \vec{V}_{CB} :

$$V_{CB} = V_B \sin 30^\circ = 1,225 \cdot 0,5 = 0,615 \text{ (м/с)}.$$

Кутові швидкості розпірних плит BC і O_1B , а також рухомої щоки O_2C такі:

$$\begin{aligned} \omega_{BC} &= \frac{V_{BC}}{BC} = \frac{0,615}{0,4} = 1,53 \left(\frac{1}{\text{с}} \right); \\ \omega_{O_2C} &= \frac{V_C}{O_2C} = \frac{1,059}{0,6} = 1,765 \left(\frac{1}{\text{с}} \right); \\ \omega_{O_1B} &= \frac{V_B}{O_1B} = \frac{1,225}{0,4} = 3,06 \left(\frac{1}{\text{с}} \right). \end{aligned}$$

Спосіб 3. Для визначення швидкостей точок B , K і C та кутових швидкостей шатуна, розпірних плит та рухомої щок побудуємо миттєві центри швидкостей (МЦШ) для шатуна AB і розпірної плити BC (рис. 12.59). МЦШ шатуна AB розташований у точці перетину перпендикулярів до векторів швидкостей у точках A та B — точка p_1 . МЦШ розпірної плити BC розташований у точці перетину перпендикулярів до векторів швидкостей у точках B та C — точка p_2 .

Зазначимо, що вектори \vec{V}_A , \vec{V}_B і \vec{V}_C відповідно перпендикулярні до прямих OA , O_1B та O_2C , оскільки точка A обертається разом з OA навколо точки O , а точки B і C гойдаються відповідно навколо точок O_1 і O_2 .

Побудувавши миттєвий центр швидкостей p_1 , можна записати:

$$\frac{V_A}{Ap_1} = \frac{V_B}{Bp_1} = \omega_{AB}.$$

Визначаємо миттєві радіуси Ap_1 і Bp_1 . У трикутнику ΔOBp_1 кут $\angle Op_1B$ дорівнює 30° . Тоді

$$Bp_1 = 2OB = 2(\ell + 0,5O_1B) = (0,8 + 0,2) = 2 \text{ (м)};$$

$$Ap_1 = Op_1 - OA = Bp_1 \cos 30^\circ - OA = 2 \cdot 0,866 - 0,1 = 1,631 \text{ (м)}.$$

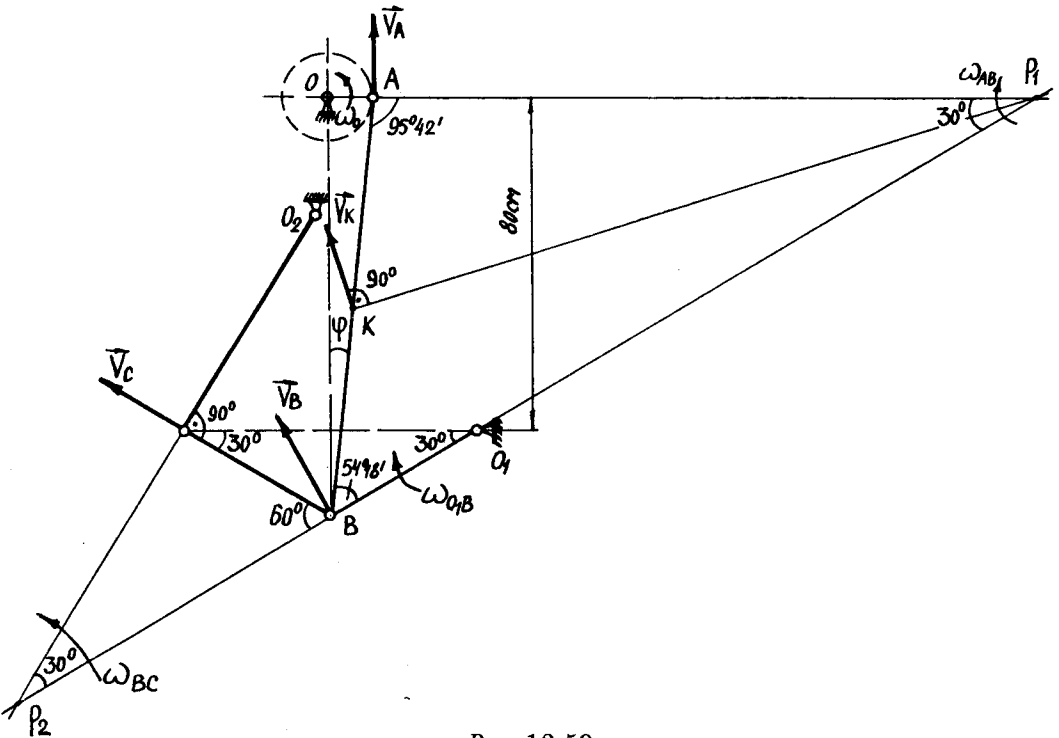


Рис. 12.59

Отже, величина вектора швидкості точки B

$$V_B = \frac{V_A B p_1}{A p_1} = \frac{2}{1,631} = 1,225 \text{ (м/с)}.$$

Кутова швидкість шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{A p_1} = \frac{V_B}{B p_1} = \frac{1}{1,631} = \frac{1,225}{2} = 0,61 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

Щоб визначити швидкість точки K , сполучаємо МЦШ — точку p_1 — з точкою K і поставимо до $K p_1$ перпендикуляр \vec{V}_K . Напрямок \vec{V}_K має бути таким, щоб відповідати обертальній швидкості точки K навколо p_1 (рис. 12.59). Оскільки

$$\frac{V_A}{A p_1} = \frac{V_K}{K p_1},$$

то

$$V_K = \frac{V_A K p_1}{A p_1}.$$

Знайдемо миттєвий радіус $K p_1$. З трикутника $\Delta A K p_1$ на підставі теореми косинусів маємо

$$\begin{aligned} K p_1 &= \sqrt{A p_1^2 + A K^2 - 2 A p_1 A K \cos 95^\circ 42'} = \\ &= \sqrt{1,631^2 + 0,502^2 + 2 \cdot 1,631 \cdot 0,502 \cdot 0,0993} = 1,73 \text{ (м)}, \end{aligned}$$

де $A K = 0,502$ м (див. спосіб 1).

Тоді швидкість точки K

$$V_K = \frac{V_A K p_1}{A p_1} = \frac{1,73}{1,631} = 1,059 \text{ (м/с)}.$$

Побудувавши миттєвий центр швидкостей p_2 , можна записати:

$$\frac{V_B}{B p_2} = \frac{V_C}{C p_2} = \omega_{BC}.$$

З трикутника $\Delta B C p_2$, де кут $\angle B p_2 C = 30^\circ$, визначаємо миттєві радіуси $B p_2$ і $C p_2$:

$$B p_2 = \frac{CB}{\sin 30^\circ} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8 \text{ (м)};$$

$$C p_2 = \frac{CB}{\text{tg } 30^\circ} = \frac{0,4}{0,5774} = 0,693 \text{ (м)}.$$

Отже, величина вектора швидкості точки C

$$V_C = \frac{V_B C p_2}{B p_2} = \frac{1,225 \cdot 0,693}{0,8} = 1,059 \text{ (м/с)}.$$

Кутові швидкості розпірних плит BC і O_1B , а також рухомої щоки O_2C такі:

$$\begin{aligned} \omega_{BC} &= \frac{V_B}{B p_2} = \frac{1,225}{0,8} = 1,53 \left(\frac{1}{\text{с}} \right); \\ \omega_{O_1B} &= \frac{V_B}{O_1 B} = \frac{1,225}{0,4} = 3,06 \left(\frac{1}{\text{с}} \right); \\ \omega_{O_2C} &= \frac{V_C}{O_2 C} = \frac{1,059}{0,6} = 1,765 \left(\frac{1}{\text{с}} \right). \end{aligned}$$

Приклад 12.6. Користуючись умовою попередньої задачі (див. приклад 12.5), визначити прискорення точок A, B, D, E і кутові прискорення шатуна AB , розпірних плит BC та O_1B і рухомої щоки O_2C механізму щокової дробарки з верхнім підвісом щоки (див. рис. 12.56).

Розв'язання. Кривошип OA обертається навколо осі, що проходить через точку O (рис. 12.60) зі сталою кутовою швидкістю $\omega_0 = 10 \frac{1}{\text{с}}$, тому прискорення точки A

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{\text{доос}},$$

де $\vec{W}_A^{\text{доос}}$ — доосьове прискорення точки A .

Величина прискорення \vec{W}_A

$$W_A = W_A^{\text{доос}} = \omega_0^2 OA = 10^2 \cdot 0,1 = 10 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Для точки B можна записати:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{\text{об}} + \vec{W}_{BA}^{\text{доос}}.$$

Напрям векторів у правій частині цього рівняння відомий: вектор \vec{W}_A перпендикулярний до OA і має напрям від точки A ліворуч; вектор $\vec{W}_{BA}^{\text{об}}$ перпендикулярний до AB , візьмемо напрям цього вектора таким, як зображено на рис. 12.60, тобто припустимо, що точка B обертається

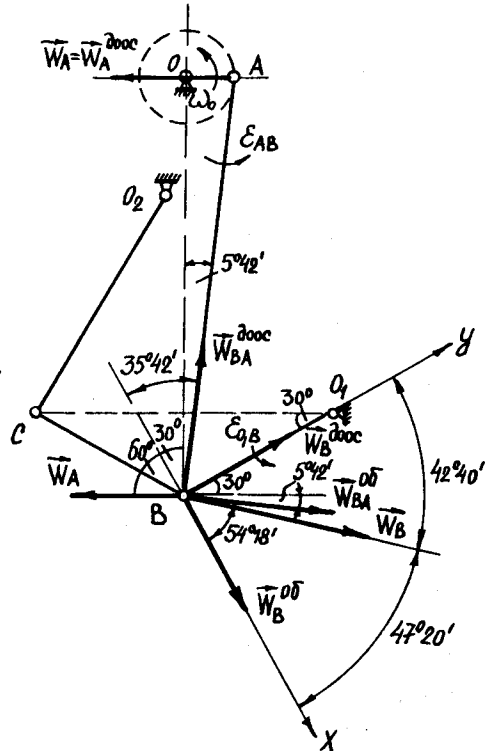


Рис. 12.60

ся навколо точки A з обертальним прискоренням проти руху стрілки годинника; вектор $\vec{W}_A^{\text{дооc}}$ має напрям уздовж прямої AB від B до A .

Для визначення напрямку вектора прискорення \vec{W}_B беремо до уваги, що точка B належить також і до розпірної плити O_1B , яка гойдається навколо точки O_1 . Тоді

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^{\text{o6}} + \vec{W}_B^{\text{дооc}}.$$

Вектор $\vec{W}_B^{\text{дооc}}$ напрямлений уздовж O_1B від B до O_1 . Вектор \vec{W}_B^{o6} перпендикулярний до O_1B . Візьмемо напрям цього вектора таким, як зображено на рис. 12.60, тобто припустимо, що точка B обертається навколо точки O_1 з обертальним прискоренням проти руху стрілки годинника.

Тоді остаточно маємо

$$\vec{W}_B^{\text{o6}} + \vec{W}_B^{\text{дооc}} = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{\text{o6}} + \vec{W}_{BA}^{\text{дооc}}. \quad (1)$$

Визначаємо величину прискорень $\vec{W}_B^{\text{дооc}}$ і $\vec{W}_{BA}^{\text{дооc}}$:

$$W_{BA}^{\text{дооc}} = \omega_{AB}^2 AB = \frac{0,61^2}{\cos 5^\circ 42'} = \frac{0,61^2}{0,9951} = 0,374 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_B^{\text{дооc}} = \omega_{O_1B}^2 O_1B = 3,06^2 \cdot 0,4 = 3,745 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

де ω_{AB} і ω_{O_1B} обчислені при розв'язанні прикладу 12.5.

Для визначення невідомих прискорень \vec{W}_B^{o6} і \vec{W}_{BA}^{o6} необхідно рівність (1) спроекціювати на довільні взаємно перпендикулярні координатні осі x і y . Побудуємо систему координат Bxy з початком у точці B так, як показано на рис. 12.60, і спроекціюємо всі вектори рівності (1) на ці осі (кути між відповідними векторами прискорень і осями x та y зображено на рис. 12.60):

$$W_{Bx} = W_B^{\text{o6}} = -W_A \cos 60^\circ + W_{BA}^{\text{o6}} \cos 54^\circ 18' - W_{BA}^{\text{дооc}} \cos 35^\circ 42';$$

$$W_{By} = W_B^{\text{дооc}} = -W_A \sin 60^\circ + W_{BA}^{\text{o6}} \sin 54^\circ 18' + W_{BA}^{\text{дооc}} \sin 35^\circ 42'.$$

З другого рівняння знаходимо

$$\begin{aligned} W_{BA}^{\text{o6}} &= \frac{W_B^{\text{дооc}} + W_A \sin 60^\circ - W_{BA}^{\text{дооc}} \sin 35^\circ 42'}{\sin 54^\circ 18'} = \\ &= \frac{3,745 + 10 \cdot 0,866 - 0,374 \cdot 0,5835}{0,8121} = 15 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що оскільки $W_{BA}^{\text{o6}} > 0$, то взятий напрям вектора \vec{W}_{BA}^{o6} є дійсним його напрямом. При $W_{BA}^{\text{o6}} < 0$ напрям вектора \vec{W}_{BA}^{o6} слід змінити на протилежний.

З першого рівняння знаходимо:

$$W_B^{\text{o6}} = -10 \cdot 0,5 + 15 \cdot 0,5835 - 0,374 \cdot 0,8121 = 3,45 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Оскільки $W_B^{o6} > 0$, то вектор \vec{W}_B^{o6} має напрям, зображений на рис. 12.60.

Величину вектора \vec{W}_B визначаємо за формулою

$$W_B = \sqrt{(W_{Bx})^2 + (W_{By})^2} = \sqrt{(W_B^{o6})^2 + (W_B^{дооc})^2} = \sqrt{3,45^2 + 3,745^2} = 5,09 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Напрямок вектора \vec{W}_B визначаємо за напрямними косинусами:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{W}_B, x}) &= \frac{W_{Bx}}{W} = \frac{W_B^{o6}}{W} = \frac{3,45}{5,09} = 0,6778; \\ \arccos 0,6778 &= 47^\circ 20'; \\ \cos(\widehat{\vec{W}_B, y}) &= \frac{W_{By}}{W} = \frac{W_B^{дооc}}{W} = \frac{3,745}{5,09} = 0,7358; \\ \arccos 0,7358 &= 47^\circ 40'. \end{aligned}$$

Вектор \vec{W}_B зображено на рис. 12.60.

Визначаємо кутові прискорення ланок AB і O_1B механізму:

$$\begin{aligned} \epsilon_{AB} &= \frac{W_{BA}^{o6}}{AB} = \frac{15}{1,004} = 14,9 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right); \\ \epsilon_{O_1B} &= \frac{W_B^{o6}}{O_1B} = \frac{3,45}{0,4} = 8,625 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right), \end{aligned}$$

де $AB = 1,004$ м (див. приклад 12.5).

Той самий результат можна отримати, якщо побудувати багатокутник прискорень за формулами:

$$\begin{aligned} \vec{W}_B &= \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{o6} + \vec{W}_{BA}^{дооc}; \\ \vec{W}_B &= \vec{W}_B^{o6} + \vec{W}_B^{дооc}. \end{aligned}$$

Побудову багатокутника прискорень починаємо з довільної точки O (рис. 12.61). Від точки O відкладаємо у деякому масштабі вектор \vec{W}_A . Від кінця вектора \vec{W}_A відкладаємо (у масштабі) вектор $\vec{W}_{BA}^{дооc}$. Далі через кінець вектора $\vec{W}_{BA}^{дооc}$ проводимо пряму, перпендикулярну до шатуна AB .

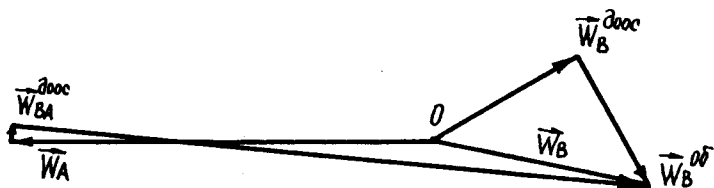


Рис. 12.61

Далі через кінець вектора $\vec{W}_{BA}^{дооc}$ проводимо пряму, перпендикулярну до шатуна AB .

Таким чином, ми побудували праву частину рівності

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{об} + \vec{W}_{BA}^{доос}.$$

Аналогічно будемо праву частину рівності:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^{об} + \vec{W}_B^{доос},$$

тобто від точки O відкладаємо (у масштабі) вектор $\vec{W}_B^{доос}$. Через кінець вектора $\vec{W}_B^{доос}$ проводимо пряму до її перетину з прямою, що проходить через кінець вектора $\vec{W}_{BA}^{доос}$, перпендикулярно до шатуна AB . Отриману точку сполучаємо з точкою O . Вектор, що лежить на цій прямій і який має напрям від точки O до точки A , і буде шуканим прискоренням точки B , тобто \vec{W}_B .

Вимірюючи вектори $\vec{W}_{BA}^{об}$, \vec{W}_B і $\vec{W}_B^{об}$ (рис. 12.61), отримуємо (з урахуванням масштабу) їх чисельну величину.

Визначимо прискорення точки K . Записуємо для точки K рівність:

$$\vec{W}_K = \vec{W}_A + \vec{W}_{KA}^{об} + \vec{W}_{KA}^{доос}.$$

Зображаємо вектори \vec{W}_A , $\vec{W}_{KA}^{об}$ і $\vec{W}_{KA}^{доос}$ на рис. 12.62. Побудуємо взаємно перпендикулярні осі x_1 і y_1 з початком у точці K і спроекціюємо вектори \vec{W}_A , $\vec{W}_{KA}^{об}$ і $\vec{W}_{KA}^{доос}$ на ці осі:

$$W_{Kx_1} = -W_A \cos 5^\circ 42' + W_{KA}^{об};$$

$$W_{Ky_1} = W_A \sin 5^\circ 42' + W_{KA}^{доос}.$$

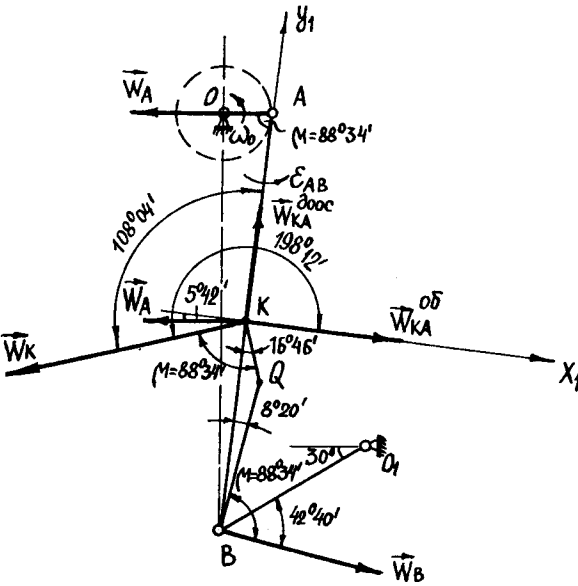


Рис. 12.62

Визначаємо величину $W_{KA}^{об}$ і $W_{KA}^{доос}$:

$$W_{KA}^{об} = \epsilon_{AB} AK = \frac{14,9}{\cos 5^\circ 42'} = \frac{14,9}{0,9951 \cdot 2} = 7,48 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{KA}^{доос} = \omega_{AB}^2 AB = \frac{0,61^2}{\cos 5^\circ 42' \cdot 2} = \frac{0,61}{0,9951 \cdot 2} = 0,187 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тоді з рівностей отримуємо:

$$W_{Kx_1} = -W_A \cos 5^\circ 42' + W_{KA}^{ог} = -10 \cdot 0,9951 + 7,48 = -2,47 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{Ky_1} = -W_A \sin 5^\circ 42' + W_{BA}^{ооо} = -10 \cdot 0,0993 + 0,187 = -0,806 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Величина прискорення \vec{W}_K така:

$$W_K = \sqrt{(W_{Kx_1})^2 + (W_{Ky_1})^2} = \sqrt{(-2,47)^2 + (-0,806)^2} = 2,6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Напрявні косинуси вектора \vec{W}_K визначаються за формулами:

$$\cos(\widehat{\vec{W}_K, x_1}) = \frac{W_{Kx_1}}{W_K} = -\frac{2,47}{2,6} = -0,95;$$

$$\arccos(-0,95) = 161^\circ 48';$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}_K, y_1}) = \frac{W_{Ky_1}}{W_K} = -\frac{0,806}{2,6} = -0,31;$$

$$\arccos(-0,31) = 108^\circ 04'.$$

Положення вектора \vec{W}_K зображено на рис. 12.62.

Величину і напрям вектора \vec{W}_K можна визначити за допомогою миттєвого центра прискорень.

Визначаємо кут між вектором \vec{W}_B і напрямом на миттєвий центр прискорень:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon_{AB}|}{\omega_{AB}^2} = \frac{14,9}{0,61^2} = 40;$$

$$\operatorname{arctg} 40 = 88^\circ 34'.$$

Визначаємо відстань між точкою B і миттєвим центром прискорень:

$$BQ = \frac{W_B}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^2}} = \frac{5,09}{\sqrt{14,9^2 + 0,61^4}} = 0,342 \text{ (м)}.$$

Під кутом μ (кут μ відкладається за напрямом ε_{AB}) до вектора \vec{W}_B через точку B проводимо пряму BQ . Сполучаємо точку Q і точку K (рис. 12.62).

Визначаємо кути трикутника ΔKQB . Застосовуючи теорему синусів, знайдемо відстань KQ :

$$\frac{BQ}{\sin 16^\circ 46'} = \frac{KQ}{\sin 8^\circ 20'};$$

$$KQ = \frac{BQ \sin 8^\circ 20'}{\sin 16^\circ 46'} = \frac{0,342 \cdot 0,145}{0,288} = 0,172 \text{ (м)}.$$

Тоді маємо

$$\frac{W_B}{W_K} = \frac{BQ}{KQ},$$

звідки

$$W_K = \frac{W_B KQ}{BQ} = \frac{5,09 \cdot 0,172}{0,342} = 2,56 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Похибка визначення величини W_K за допомогою миттєвого центра прискорень відносно визначення W_K методом проекцій у нашому випадку

$$\frac{2,6 - 2,56}{2,6} \cdot 100 \% = 1,54 \%.$$

Переходимо до визначення прискорення точки C . Для точки C можна записати:

$$\vec{W}_C = \vec{W}_B + \vec{W}_{CB}^{об} + \vec{W}_{CB}^{доос}.$$

Беремо до уваги, що точка C належить також і рухомій щоді O_2B , яка гоїдається навколо точки O_2 . Тоді

$$\vec{W}_C = \vec{W}_C^{об} + \vec{W}_C^{доос}.$$

Отже, для точки C остаточно можна записати таке рівняння:

$$\vec{W}_C^{об} + \vec{W}_C^{доос} = \vec{W}_B + \vec{W}_{CB}^{об} + \vec{W}_{CB}^{доос}. \quad (2)$$

Обчислюємо величину відомих прискорень

$W_{CB}^{доос}$ і $W_B^{доос}$:

$$W_{CB}^{доос} = \omega_{CB}^2 CB = 1,53^2 \cdot 0,4 = 0,936 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_C^{доос} = \omega_{O_2C}^2 O_2C = 1,765^2 \cdot 0,6 = 1,869 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

де ω_{CB} і ω_{O_2C} визначено при розв'язанні прикладу 12.5.

Для визначення невідомих прискорень $\vec{W}_C^{об}$ і $\vec{W}_{CB}^{об}$ необхідно рівність (2) спроекціювати на довільні взаємно перпендикулярні координатні осі x_2 і y_2 . Побудуємо систему координат Cx_2y_2 з початком у точці C так, як зображено на рис. 12.63, і спроекціюємо всі вектори рівності (2) на осі координат Cx_2y_2 (кути між відповідними векторами прискорень і осями x_2 та y_2 зображено на рис. 12.63):

$$W_{Cx_2} = W_C^{об} = W_B \cos 17^\circ 20' + W_{CB}^{доос};$$

$$W_{Cy_2} = W_C^{доос} - W_B \sin 17^\circ 20' + W_{CB}^{об}.$$

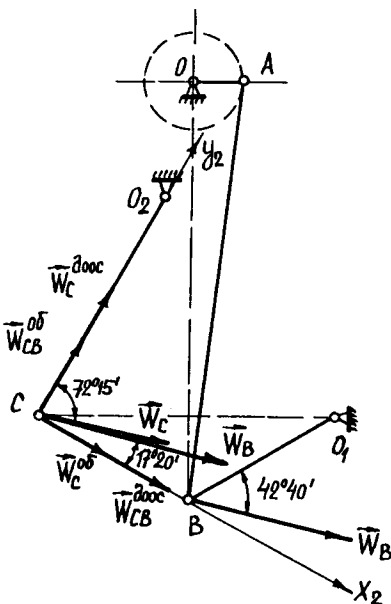


Рис. 12.63

З першого рівняння визначаємо W_C^{o6} :

$$W_C^{o6} = W_B \cos 17^\circ 20' + W_{CB}^{дооc} = 5,09 \cdot 0,9546 + 0,936 = 5,8 \text{ (м / с}^2\text{)}.$$

З другого рівняння визначаємо W_{CB}^{o6} :

$$W_{CB}^{o6} = W_C^{дооc} - W_B \sin 17^\circ 20' = 1,869 - 5,09 \cdot 0,298 = 0,352 \text{ (м / с}^2\text{)}.$$

Визначаємо величину прискорення точки C за формулою

$$W_C = \sqrt{(W_{Cx_2})^2 + (W_{Cy_2})^2} = \sqrt{(W_C^{o6})^2 + (W_C^{дооc})^2} = \sqrt{5,8^2 + 1,869^2} = 6,09 \text{ (м / с}^2\text{)}.$$

Визначаємо напрямні косинуси вектора \vec{W}_C :

$$\cos(\widehat{\vec{W}_C, x_2}) = \frac{W_{Cx_2}}{W} = \frac{5,8}{6,09} = 0,9524;$$

$$\arccos 0,9524 = 17^\circ 45';$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}_C, y_2}) = \frac{W_{Cy_2}}{W} = \frac{1,869}{6,09} = 0,3069;$$

$$\arccos 0,3069 = 72^\circ 15'.$$

Вектор \vec{W}_C зображено на рис. 12.63.

Визначаємо кутові прискорення ланок CB і O_2C механізму:

$$\epsilon_{CB} = \frac{W_{CB}^{o6}}{CB} = \frac{0,352}{0,4} = 0,88 \left(\frac{1}{c^2} \right);$$

$$\epsilon_{O_2C} = \frac{W_C^{o6}}{O_2C} = \frac{5,8}{0,6} = 9,67 \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Той самий результат можна отримати, якщо побудувати багатокутник прискорень за формулами:

$$\vec{W}_C = \vec{W}_B + \vec{W}_{CB}^{o6} + \vec{W}_{CB}^{дооc},$$

$$\vec{W}_C = \vec{W}_C^{o6} + \vec{W}_C^{дооc}.$$

Багатокутник прискорень для визначення прискорення точки C зображено на рис. 12.64 (порядок побудови багатокутника описано при визначенні прискорення точки B).

Вимірюючи вектори \vec{W}_{CB}^{o6} , \vec{W}_C і $\vec{W}_C^{дооc}$ (рис. 12.64), отримуємо (з урахуванням масштабу) їх чисельну величину.

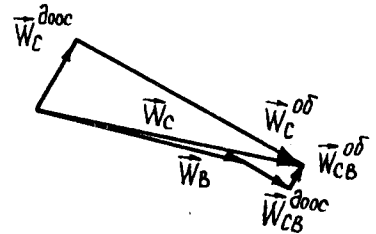


Рис. 12.64

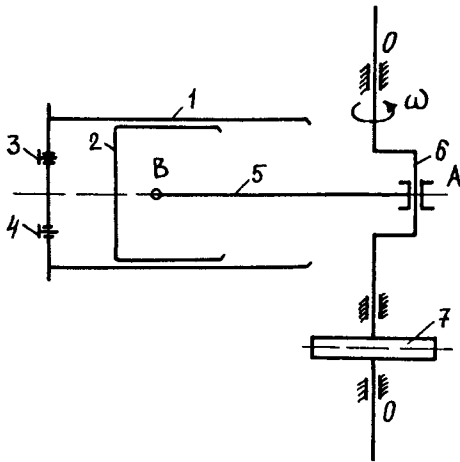


Рис. 12.65

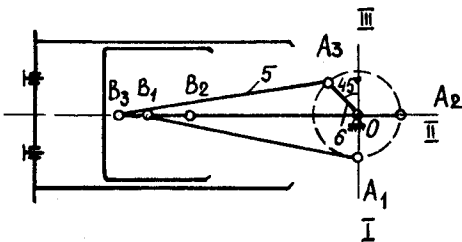


Рис. 12.66

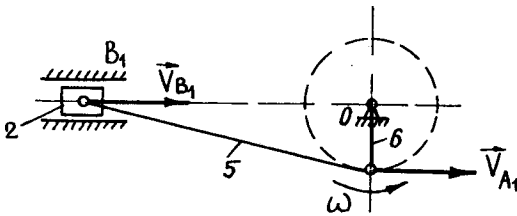


Рис. 12.67

Вектор V_{A_1} має напрям перпендикулярний до OA_1 (рис. 12.67).

Визначаємо швидкість точки B_1 . Точка B_1 одночасно належить поршню 2 і шатуна 5. Поршень 2 здійснює поступальний рух, тому лінія дії вектора швидкості точки B_1 збігається з прямою OB_1 . З іншого боку, миттєвий центр швидкостей (МЦШ) шатуна 5 у положенні, що зображено на рис. 12.67, перебуває у нескінченності (шатун 5 здійснює миттєво-поступальний рух), тому

$$V_{B_1} = V_{A_1} = 6,27 \text{ м/с}; \quad \omega_{A_1 B_1} = 0,$$

і вектор \vec{V}_{B_1} має напрям уздовж прямої OB_1 від точки B_1 до точки O (рис. 12.67).

Приклад 12.7. На рис. 12.65 зображено схему одноступінчастого компресора. Компресор складається з циліндра 1, в якому розташовані всмоктувальний 3 і нагнітальний 4 клапани, і поршня 2. Поршень 2 з'єднаний з шатуном 5 і кривошипом 6, на вал якого насаджений маховик 7. Кривошип 6 з маховиком 7 обертаються зі сталою кутовою швидкістю $n = 240$ об/хв.

Визначити швидкість і прискорення поршня 2, а також кутову швидкість і кутове прискорення шатуна 5 в той момент часу, коли точка A кривошипа 6 займає відповідно положення I, II і III (рис. 12.66), якщо довжина шатуна 5 $l = 2,0$ м, а довжина кривошипа 6 $r = 0,25$ м.

Розв'язання. Визначаємо кутову швидкість кривошипа OA :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 240}{30} = 25,1 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

1. Визначаємо швидкість і прискорення поршня 2, а також кутову швидкість і кутове прискорення шатуна 5 в момент часу, коли точка A кривошипа 6 займає положення I (див. рис. 12.66 і рис. 12.67).

Знаходимо швидкість точки A як швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$V_{A_1} = \omega r = 25,1 \cdot 0,25 = 6,27 \text{ (м/с)}.$$

Переходимо до визначення прискорень. Прискорення точки A_1 кривошипа 6

$$\vec{W}_{A_1} = \vec{W}_{A_1}^{o6} + \vec{W}_{A_1}^{\text{дооc}}.$$

Оскільки кривошип 6 обертається зі сталою кутовою швидкістю ω , то кутове прискорення кривошипа дорівнює нулю:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

і, отже, обертальне прискорення точки A_1 також дорівнює нулю:

$$W_{A_1}^{o6} = 0.$$

З розглянутого випливає, що прискорення точки A_1 дорівнює її доосовому прискоренню:

$$W_{A_1} = W_{A_1}^{\text{дооc}} = \omega^2 r = 25,1^2 \cdot 0,25 = 157,5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор прискорення точки A_1 зображено на рис. 12.68.

Для точки B_1 записуємо векторну рівність (12.44):

$$\vec{W}_{B_1} = \vec{W}_{A_1} + \vec{W}_{B_1 A_1}^{o6} + \vec{W}_{B_1 A_1}^{\text{дооc}}.$$

Оскільки $\omega_{A_1 B_1} = 0$, то $W_{B_1 A_1}^{\text{дооc}} = \omega_{A_1 B_1}^2 l = 0$.

Отже, прискорення точки B_1 дорівнює геометричній сумі двох прискорень:

$$\vec{W}_{B_1} = \vec{W}_{A_1} + \vec{W}_{B_1 A_1}^{o6}.$$

Вектори \vec{W}_{B_1} , \vec{W}_{A_1} і $\vec{W}_{B_1 A_1}^{o6}$ зображено на рис. 12.68.

Побудуємо систему координат $B_1 x y$ з початком у точці B_1 (рис. 12.68) і спроекціюємо останнє рівняння на осі x і y :

$$\begin{cases} W_{B_1} = W_{A_1} \sin \alpha; \\ 0 = W_{A_1} + W_{A_1}^{o6} \cos \alpha. \end{cases}$$

З другого рівняння визначаємо:

$$W_{A_1}^{o6} \cos \alpha = W_{A_1};$$

$$\varepsilon_{A_1 B_1} l \cos \alpha = W_{A_1};$$

$$\varepsilon_{A_1 B_1} = \frac{W_{A_1}}{l \cos \alpha} = \frac{157,5}{2 \cdot 0,992} = 79,38 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right),$$

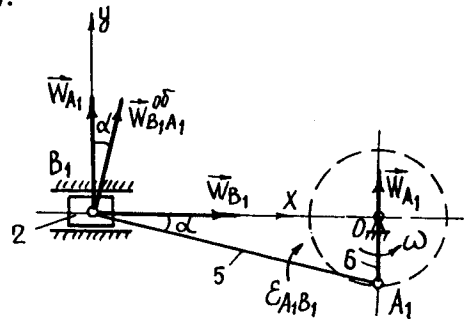


Рис. 12.68

де $\alpha = 7^\circ 7'$ (див. рис. 12.62, $\Delta B_1 A_1 O$, звідки $\text{tg } \alpha = \frac{r}{l} = \frac{0,25}{2} = 0,125$, $\arctg 0,125 = 7^\circ 7'$).

З першого рівняння матимемо

$$W_{B_1} = W_{A_1}^{об} \sin \alpha = \varepsilon_{A_1 B_1} l \sin \alpha = 79,38 \cdot 2 \cdot 0,124 = 19,69 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор \vec{W}_{B_1} має напрям від точки B_1 до точки O (рис. 12.68).

2. Визначаємо швидкість і прискорення поршня 2, а також кутову швидкість і кутове прискорення шатуна 5 в момент часу, коли точка A кривошипа 6 займає положення II (див. рис. 12.66 і рис. 12.69).

Вектор швидкості точки A_2 — \vec{V}_{A_2} перпендикулярний до кривошипа 6 і має напрям такий, як зображено на рис. 12.69. Величина вектора \vec{V}_{A_2}

$$V_{A_2} = \omega r = 25,1 \cdot 0,25 = 6,27 \text{ (м/с)}.$$

Будуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) шатуна 5. МЦШ шатуна розміщений в точці B_2 , тому швидкість точки B_2 дорівнює нулю:

$$V_{B_2} = 0.$$

Кутова швидкість шатуна 5 у положенні механізму, що розглядається,

$$\omega_{A_2 B_2} = \frac{V_{A_2}}{l} = \frac{6,27}{2} = 3,13 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

Визначаємо прискорення точок механізму. Прискорення точки A_2

$$\vec{W}_{A_2} = \vec{W}_{A_2}^{об} + \vec{W}_{A_2}^{доос}.$$

Оскільки кривошип 6 обертається зі сталою кутовою швидкістю ω , то

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

і, отже, $\vec{W}_{A_2} = \vec{W}_{A_2}^{доос}$, оскільки $\vec{W}_{A_2}^{об} = \vec{0}$. За величиною вектор \vec{W}_{A_2} такий:

$$W_{A_2} = \omega^2 r = 25,1^2 \cdot 0,25 = 157,5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор прискорення точки A_2 зображено на рис. 12.69.

Для точки B_2 записуємо векторну рівність (12.44):

$$\vec{W}_{B_2} = \vec{W}_{A_2} + \vec{W}_{B_2 A_2}^{об} + \vec{W}_{B_2 A_2}^{доос}.$$

Вектори \vec{W}_{B_2} , \vec{W}_{A_2} , $\vec{W}_{B_2 A_2}^{об}$ і $\vec{W}_{B_2 A_2}^{доос}$ зображено на рис. 12.69.

Побудуємо систему координат $B_2 xy$ з початком у точці B_2 (рис. 12.69) і спроеціюємо останнє рівняння на осі x і y :

$$\begin{cases} -W_{B_2} = -W_{A_2} + W_{B_2 A_2}^{доос}; \\ 0 = W_{B_2 A_2}^{доос}. \end{cases}$$

З другого рівняння визначаємо

$$W_{B_2A_2}^{об} = \varepsilon_{A_2B_2} l = 0,$$

звідки $\varepsilon_{A_2B_2} = 0$.

З першого рівняння визначаємо W_{B_2} :

$$W_{B_2} = W_{A_2} - W_{B_2A_2}^{доос} = W_{A_2} - \omega_{A_2B_2}^2 l = 157,5 - 3,13^2 \cdot 2 = 137,9 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор \vec{W}_{B_2} має напрям такий, як зображено на рис. 12.69.

3. Визначаємо швидкість і прискорення поршня 2, а також кутову швидкість і кутове прискорення шатуна 5 в момент часу, коли точка A кривошипа 6 займає положення III (див. рис. 12.66 і рис. 12.70).

Швидкість точки A_3

$$V_{A_3} = \omega r = 25,1 \cdot 0,25 = 6,27 \text{ (м/с)}.$$

Вектор V_{A_3} перпендикулярний до кривошипа 6 (рис. 12.70).

Для визначення швидкості точки B_3 побудуємо МЦШ шатуна 5. Щоб знайти його положення, поставимо до векторів швидкостей у точках A_3 і B_3 перпендикуляри (рис. 12.70). Точка їх перетину p буде миттєвим центром шатуна 5. Побудувавши МЦШ, можна записати:

$$\frac{V_{A_3}}{A_3p} = \frac{V_{B_3}}{B_3p},$$

звідки

$$V_{B_3} = \frac{V_{A_3} B_3p}{A_3p}.$$

Визначаємо миттєві радіуси A_3p і B_3p . З трикутника ΔB_3A_3D маємо:

$$\sin \beta = \frac{A_3D}{A_3B_3} = \frac{r \sin 45^\circ}{l} = \frac{0,25 \cdot 0,707}{2} = 0,0884;$$

$$\beta = \arcsin 0,0884 = 5,1^\circ.$$

Визначаємо кути трикутника ΔB_3pA_3 (рис. 12.70).

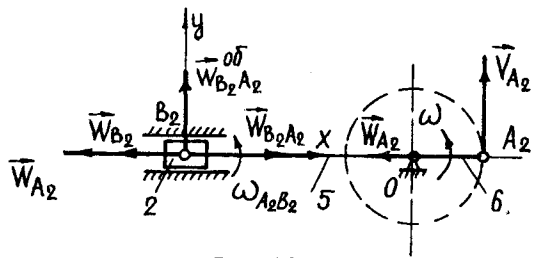


Рис. 12.69

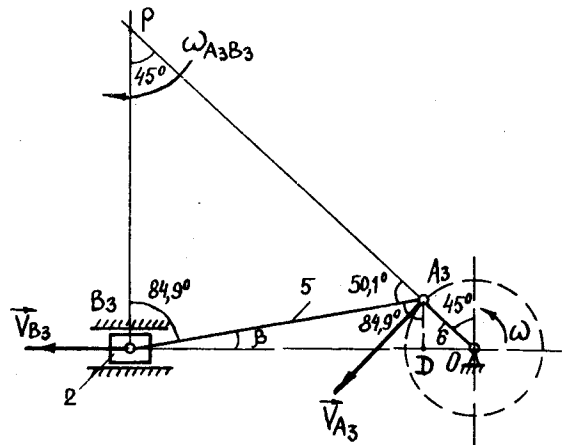


Рис. 12.70

На підставі теореми синусів матимемо:

$$\frac{A_3 B_3}{\sin 45^\circ} = \frac{B_3 p}{\sin 50,1^\circ} = \frac{A_3 p}{\sin 84,9^\circ},$$

звідки

$$A_3 p = \frac{A_3 B_3 \sin 84,9^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 0,996}{0,707} = 2,82 \text{ (м)};$$

$$B_3 p = \frac{A_3 B_3 \sin 50,1^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 0,767}{0,707} = 2,17 \text{ (м)}.$$

Тоді

$$V_{B_3} = \frac{V_{A_3} B_3 p}{A_3 p} = \frac{6,27 \cdot 2,17}{2,82} \text{ (м/с)}.$$

Визначаємо кутову швидкість шатуна:

$$\omega_{A_3 B_3} = \frac{V_{A_3}}{A_3 p} = \frac{V_{B_3}}{B_3 p} = \frac{6,27}{2,82} = \frac{4,82}{2,17} = 2,22 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

Визначаємо прискорення точок A_3 і B_3 . Прискорення точки A_3 (див. попередні розв'язки)

$$W_{A_3} = W_{A_3}^{\text{доос}} = \omega^2 r = 25,1 \cdot 0,25 = 157,5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор \vec{W}_{A_3} зображено на рис. 12.71.

Для точки B_3 записуємо векторну рівність (12.44):

$$\vec{W}_{B_3} = \vec{W}_{A_3} + \vec{W}_{B_3 A_3}^{\text{об}} + \vec{W}_{B_3 A_3}^{\text{доос}}.$$

Зображуємо вектори \vec{W}_{B_3} , \vec{W}_{A_3} , $\vec{W}_{B_3 A_3}^{\text{об}}$ і $\vec{W}_{B_3 A_3}^{\text{доос}}$ на рис. 12.71.

Побудуємо систему координат $B_3 x y$ з початком у точці B_3 (рис. 12.71) і спроектуємо останнє рівняння на осі x і y :

$$\begin{cases} W_{B_3} = W_{A_3} \sin 45^\circ - W_{B_3 A_3}^{\text{об}} \sin \beta + W_{B_3 A_3}^{\text{доос}} \cos \beta; \\ 0 = -W_{A_3} \cos 45^\circ + W_{B_3 A_3}^{\text{об}} \cos \beta + W_{B_3 A_3}^{\text{доос}} \sin \beta. \end{cases}$$

З другого рівняння знаходимо

$$\begin{aligned} \epsilon_{A_3 B_3} &= \frac{W_{A_3} \cos 45^\circ - W_{B_3 A_3}^{\text{доос}} \sin \beta}{l \cos \beta} = \\ &= \frac{W_{A_3} \cos 45^\circ - \omega_{A_3 B_3}^2 l \sin \beta}{l \cos \beta} = \\ &= \frac{157,5 \cdot 0,707 - 2,22^2 \cdot 2 \cdot 0,089}{2 \cdot 0,996} = 55,46 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right). \end{aligned}$$

З першого рівняння здобудемо

$$\begin{aligned} W_{B_3} &= W_{A_3} \sin 45^\circ - W_{B_3 A_3}^{об} \sin \beta + W_{B_3 A_3}^{дооc} \cos \beta = \\ &= W_{A_3} \sin 45^\circ - \varepsilon_{A_3 B_3} l \sin 5,1^\circ + \omega_{A_3 B_3}^2 l \cos 5,1^\circ = \\ &= 157,5 \cdot 0,707 - 55,46 \cdot 2 \cdot 0,089 + 2,22^2 \cdot 2 \cdot 0,996 = 111,3 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Напрямок вектора W_{B_3} зображено на рис. 12.71.

Приклад 12.8. Машина для формування циліндричних заготовок з тіста складається з двох транспортерів 1 і 2 (рис. 12.72). Через п'ять секунд після пуску машини транспортер 1, здійснюючи рівноприскорений рух, набуває швидкості $V_1 = 3 \text{ м/с}$, а транспортер 2 — $V_2 = 1 \text{ м/с}$.

Визначити швидкість і прискорення центра тістової заготовки, вважаючи, що її переріз є правильним колом, а також обчислити її кутову швидкість і кутове прискорення через 5 с після пуску машини, якщо діаметр заготовки $d = 0,2 \text{ м}$.

Розв'язання. З рис. 12.72 випливає, що заготовка, розміщуючись між транспортерами, здійснює плоскопаралельний рух. При цьому точки контакту A і B заготовки з транспортерами відповідно мають швидкості \vec{V}_1 і \vec{V}_2 (рис. 12.73).

Вектори \vec{V}_1 і \vec{V}_2 перпендикулярні до прямої AB , паралельні і напрямлені в різні сторони. Миттєвий центр швидкостей заготовки лежить на прямій AB і поділяє цю пряму на відрізки, пропорційні швидкостям точок A і B :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{Ap}{Bp}, \text{ або } \frac{V_1}{V_2} = \frac{d - Bp}{Bp},$$

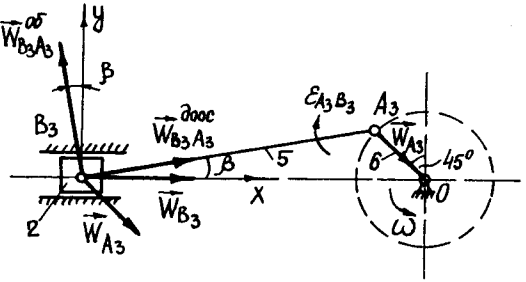


Рис. 12.71

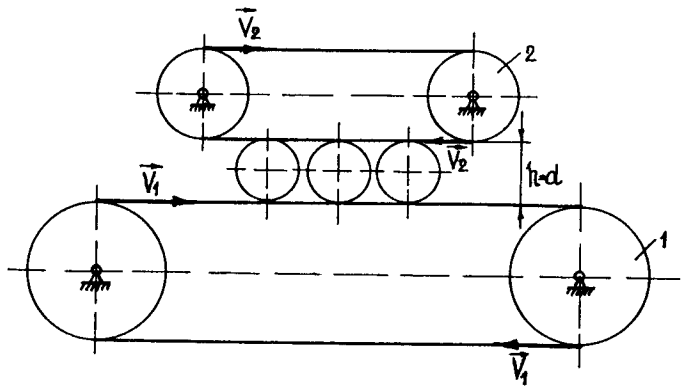


Рис. 12.72

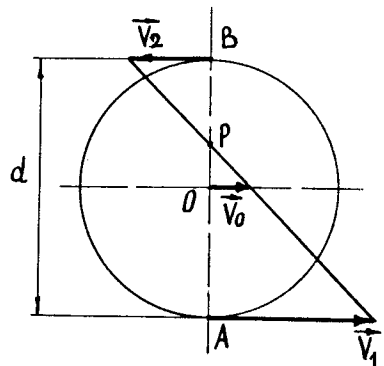


Рис. 12.73

звідки

$$Bp = \frac{V_2 d}{(V_1 + V_2)} = \frac{1 \cdot 0,2}{1 + 3} = 0,05 \text{ (м)}.$$

Визначаємо кутову швидкість заготовки:

$$\omega = \frac{V_2}{Bp} = \frac{V_1}{Ap} = \frac{1}{0,05} = \frac{3}{0,15} = 20 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

Знайдемо швидкість центра заготовки як середню лінію трапеції:

$$V_0 = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 \text{ (м/с)}.$$

Визначаємо прискорення центра заготовки. Для точок A і B можна записати векторні рівності (поліус — точка O).

$$\begin{cases} \vec{W}_A = \vec{W}_O + \vec{W}_{AO}^{об} + \vec{W}_{AO}^{доос}; \\ \vec{W}_B = \vec{W}_O + \vec{W}_{BO}^{об} + \vec{W}_{BO}^{доос}, \end{cases}$$

де \vec{W}_O — прискорення центра заготовки.

Зображуємо вектори \vec{W}_O , $\vec{W}_{AO}^{об}$, $\vec{W}_{AO}^{доос}$, $\vec{W}_{BO}^{об}$, $\vec{W}_{BO}^{доос}$ в точках A і B (рис. 12.74). Побудуємо систему координат Oxy з початком у точці O і спроеціюємо векторні рівності на вісь x :

$$\begin{cases} W_A = W_O + W_{AO}^{об}; \\ -W_B = W_O - W_{BO}^{об}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, матимемо:

$$W_O = \frac{W_A - W_B}{2} = \frac{0,6 - 0,2}{2} = 0,2 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{AO}^{об} = W_{BO}^{об} = \frac{W_A + W_B}{2} = \frac{0,6 + 0,2}{2} = 0,4 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

де $W_A = \frac{V_1}{t} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ (м/с}^2\text{)}; W_B = \frac{V_2}{t} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$

Кутове прискорення заготовки

$$\varepsilon = \frac{2W_{AO}^{об}}{d} = \frac{2W_{BO}^{об}}{d} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,1} = 8 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right).$$

При розв'язанні задач про перетворення обертальних рухів твердого тіла слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) виходячи з умови задачі, записати рівняння руху або інші кінематичні співвідношення для того твердого тіла, рух якого є відомим;

2) на підставі формул кінематики оберального руху твердого тіла навколо нерухомої осі знайти рівняння руху другого твердого тіла, тобто тіла, якому передається рух, а також визначити швидкість і прискорення точок цього твердого тіла.

Приклад 12.9. Редуктор швидкості тунельної печі хлібопекарного виробництва складається з чотирьох зубчастих коліс, які обертаються навколо нерухомих осей (рис. 12.75). Зубчасті колеса мають таку кількість зубців: $z_1 = 12$, $z_2 = 72$, $z_3 = 10$.

Вал II має кутову швидкість $n_{IV} = 100$ об/хв,

а вал I повинен мати $n_I = 5400$ об/хв. Знайти число зубців четвертого зубчастого колеса.

Розв'язання. Величини кутових швидкостей першої пари зубчастих коліс обернено пропорційні кількості зубців:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Аналогічну рівність можна записати для другої пари коліс:

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Колеса 2 і 3 жорстко закріплені на загальному валу, отже, їх кутові швидкості $\omega_2 = \omega_3$. Тоді, перемножуючи здобуті співвідношення, матимемо

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Оскільки $\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{n_I}{n_{IV}}$, то

$$z_4 = \frac{n_I z_1 z_3}{n_{IV} z_2} = \frac{5400 \cdot 12 \cdot 10}{100 \cdot 72} = 90.$$

При розв'язанні задач про рух твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) визначити похідні від рівнянь руху тіла за часом;
- 2) знайти проекції кутової швидкості на осі нерухомої і рухомої системи координат;

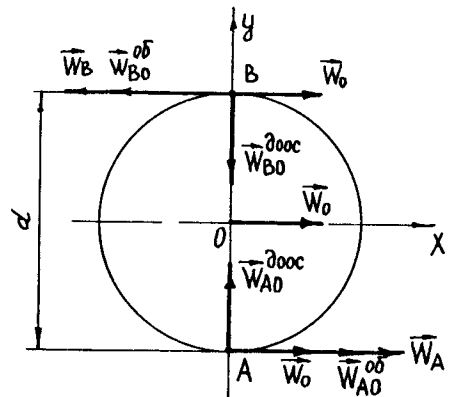


Рис. 12.74

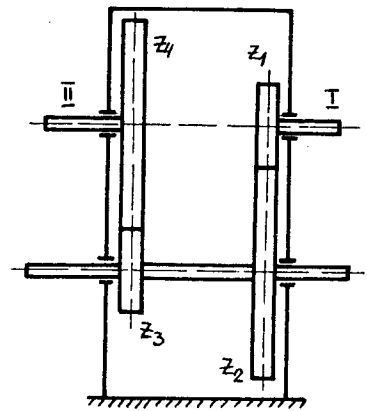


Рис. 12.75

- 3) визначити величину миттєвої кутової швидкості;
- 4) визначити положення миттєвої осі;
- 5) визначити миттєве прискорення як швидкість кінця вектора миттєвої кутової швидкості або через проекції кутового прискорення на рухомі і нерухомі осі координат;
- 6) визначити швидкість точки за величиною і за напрямом;
- 7) визначити обертальне і доосьове прискорення точки або проекції прискорення цієї точки на рухомі і нерухомі осі координат;
- 8) визначити прискорення точки за величиною і за напрямом.

Приклад 12.10. Дисковий млин складається з дисків D і E у вигляді чавунних коліс зі сталевими ободами, які котяться без ковзання по дну конічної чаші. Кутова швидкість обертання дисків навколо осі O_1O $\omega_0 = 1 \frac{1}{c}$. Визначити швидкість і прискорення точок A і B дисків у положенні, що зображено на рис. 12.76, якщо $R = 1$ м, а $r = 0,5$ м.

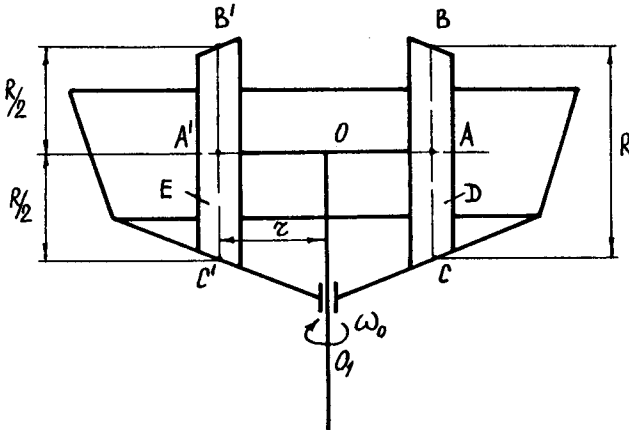


Рис. 12.76

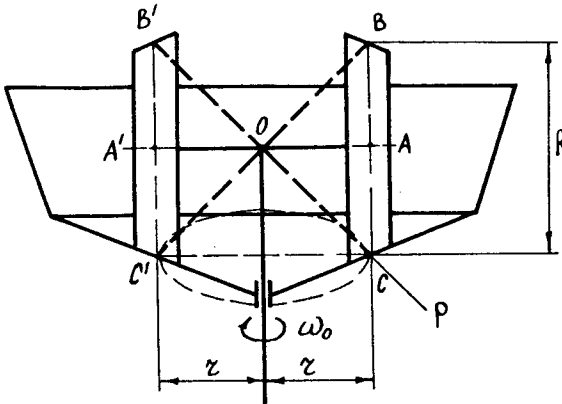


Рис. 12.77

Розв'язання. Розглянемо рух одного з дисків. Диск обертається навколо нерухомої осі OO_1 з кутовою швидкістю ω_0 і одночасно обертається навколо власної осі OA . Під час руху диска точка O осі OO_1 залишається нерухомою. Таким чином, маємо випадок руху твердого тіла навколо нерухомої точки O .

Визначимо положення миттєвої осі обертання. Для цього необхідно знати дві точки, швидкість яких у цьому положенні диска дорівнює нулю. Такими точками є точка O і точка C (рис. 12.77). Швидкість точки C дорівнює нулю, тому що ця точка є миттєвим центром швидкостей диска при його коченні без ковзання по дну нерухомої конічної чаші. Пряма, що проходить через нерухомі точки O і C , і буде миттєвою віссю обертання диска — вісь Op .

З геометричного погляду і з погляду кінематики руху, обертання диска навколо миттєвої осі обертання Op можна

увияти як кочення без ковзання рухомого конуса BOC по нерухомому конусу COC' (рис. 12.77 і рис. 12.78).

Визначимо миттєву кутову швидкість диска. Оскільки диск обертається навколо власної осі OA (кутова швидкість ω_2 , рис. 12.78) і навколо нерухомої осі OO_1 (кутова швидкість $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_0$) і при цьому кут між осями OA і OO_1 (кут θ) не змінюється з часом, то рух, що здійснює вісь OA , називається *регулярною прецесією*, а кутова швидкість $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_0$ її обертання навколо нерухомої осі OO_1 — *кутовою швидкістю прецесії*.

У випадку регулярної прецесії миттєва кутова швидкість диска дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей власного обертання і кутової швидкості прецесії:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2.$$

Тоді з рис. 12.78 випливає, що

$$\omega = \frac{\omega_1}{\cos \beta} = \frac{\omega_0}{\cos \beta} = \frac{1}{0,4472} = 1,414 \left(\frac{1}{c} \right),$$

де

$$\cos \beta = \frac{R}{2OC} = \frac{R}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{0,5^2 + 0,5^2}} = \frac{1}{1,414} = 0,707;$$

$$\beta = \arccos 0,707 = 45^\circ.$$

Визначаємо швидкість точок A і B :

$$V_A = \omega \rho_A = \frac{\omega R \sin \beta}{2} = \frac{1,414 \cdot 1 \cdot 0,707}{2} = 0,5 \text{ (м/с)};$$

$$V_B = \omega \rho_B = \omega R \sin \beta = 1,414 \cdot 1 \cdot 0,707 = 1 \text{ (м/с)},$$

де ρ_A і ρ_B — відповідно найкоротші відстані від точок A і B до миттєвої осі обертання (рис. 12.78).

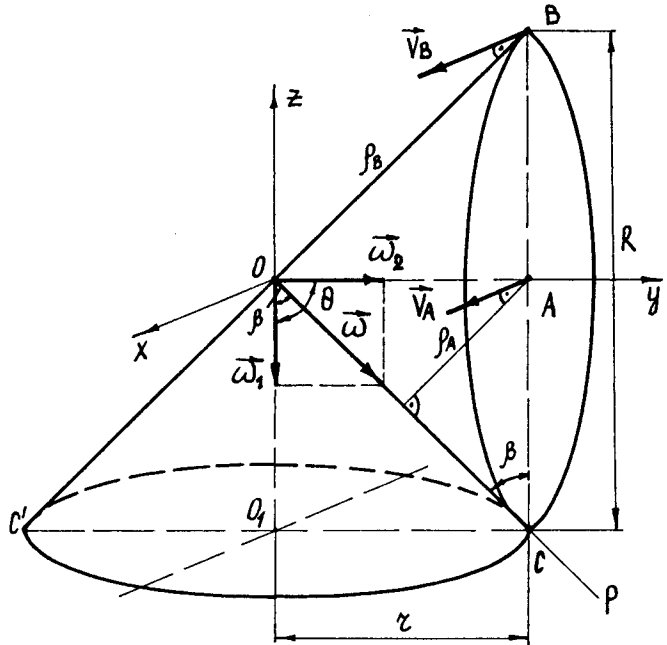


Рис. 12.78

Напрямок векторів \vec{V}_A і \vec{V}_B зображено на рис. 12.78.

Визначаємо кутове прискорення руху. Кутове прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2,$$

де $\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}$ показує зміну кутової швидкості за величиною.

Оскільки ми маємо регулярну прецесію, то $\vec{\omega} = \text{const}$, і отже, $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{0}$. Тоді

$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$. Звідси випливає, що вектор $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2$ має напрям, перпендикулярний до площі векторів $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}$ у той бік, звідки найкоротший оберн вектора $\vec{\omega}_1$ до вектора $\vec{\omega}$ видно проти руху стрілки годинника. Вектор $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2$ зображено на рис. 12.79.

Величина вектора $\vec{\varepsilon}$

$$\varepsilon = \omega_1 \omega \sin(\widehat{\vec{\omega}_1, \vec{\omega}}) = 1 \cdot 1,414 \cdot 0,707 = 1 \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Визначаємо прискорення точок A і B . Прискорення точки A

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{\text{об}} + \vec{W}_A^{\text{дооc}},$$

де

$$W_A^{\text{об}} = \varepsilon h_A = \varepsilon r = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \quad (\text{м} / \text{c}^2);$$

$$W_A^{\text{дооc}} = \omega^2 d_A = 1,414^2 \cdot \frac{R \sin \beta}{2} = \frac{1,414^2 \cdot 1 \cdot 0,707}{2} = 0,707 \quad (\text{м} / \text{c}^2),$$

h_A — найкоротша відстань від точки A до вектора $\vec{\varepsilon}$ (рис. 12.79);

d_A — найкоротша відстань від точки A до миттєвої осі (рис. 12.79).

Вектор $\vec{W}_A^{\text{об}}$ перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і \vec{OA} . Напрямок вектора зображено на рис. 12.79 (по AB від A до B). Вектор $\vec{W}_A^{\text{дооc}}$ має напрям уздовж перпендикуляра d_A від точки A до осі Op .

Величина вектора \vec{W}_A

$$\begin{aligned} W_A &= \sqrt{(W_A^{\text{дооc}})^2 + (W_A^{\text{об}})^2 - 2W_A^{\text{дооc}} W_A^{\text{об}} \cos(\widehat{\vec{W}_A^{\text{дооc}}, \vec{W}_A^{\text{об}}})} = \\ &= \sqrt{0,707^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 0,707 \cdot 0,5 \cdot 0,707} = 0,5 \quad (\text{м} / \text{c}^2). \end{aligned}$$

Вектор \vec{W}_A розміщений у площині трикутника $\triangle OBC$.

Прискорення точки B

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^{\text{об}} + \vec{W}_B^{\text{дооc}},$$

де

$$W_B^{\text{об}} = \varepsilon h_B = \varepsilon R \sin 45^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0,707 = 0,707 \quad (\text{м} / \text{c}^2);$$

$$W_B^{\text{дооc}} = \omega^2 d_B = 1,414^2 \cdot R \sin 45^\circ = 1,414^2 \cdot 1 \cdot 0,707 = 1,414 \quad (\text{м} / \text{c}^2),$$

h_B — найкоротша відстань від точки B до вектора $\vec{\epsilon}$ (рис. 12.79);

d_B — найкоротша відстань від точки B до миттєвої осі.

Вектор \vec{W}_A^{ob} перпендикулярний до площини векторів $\vec{\epsilon}$ і \vec{OB} . Напрямок вектора зображено на рис. 12.79 (перпендикулярний до OB). Вектор $\vec{W}_B^{дооc}$ має напрям уздовж OB від B до O .

Величина вектора \vec{W}_B така:

$$\begin{aligned} W_B &= \sqrt{(W_B^{ob})^2 + (W_B^{дооc})^2} = \\ &= \sqrt{0,707^2 + 1,414^2} = \\ &= 1,58 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Вектор \vec{W}_B розміщений у площині трикутника $\triangle OBC$ (рис. 12.79).

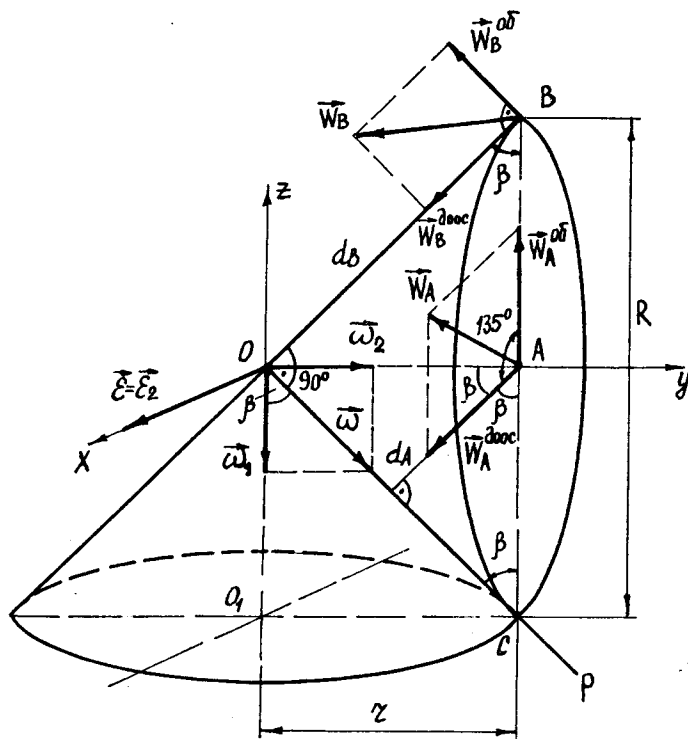


Рис. 12.79

Запитання для самоперевірки

1. Щоб встановити положення вільного твердого тіла відносно обраної системи відліку, чи обов'язково задавати в кожний момент часу положення усіх його точок?
2. Яку кількість незалежних параметрів необхідно вибрати, щоб однозначно визначити положення вільного твердого тіла відносно обраної системи відліку?
3. Яким чином можна задати параметри, що однозначно визначають положення вільного твердого тіла відносно системи відліку?
4. Як записуються кінематичні рівняння руху вільного твердого тіла?
5. Яку кількість ступенів вільності має вільне тверде тіло?
6. У чому полягають основні завдання кінематики твердого тіла?
7. Який рух твердого тіла називається поступальним і які властивості він має?
8. Який рух твердого тіла називається обертальним навколо нерухомої осі?
9. Яку кількість ступенів вільності має тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі?
10. Як записується кінематичне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі?

11. За якими формулами визначаються величини кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
12. Який напрям мають вектори кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі?
13. Як записується закон рівномірного обертання твердого тіла навколо нерухомої осі?
14. Як записується закон зміни кутової швидкості і закон рівнозмінного руху твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі?
15. Як визначається вектор швидкості довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
16. Як визначається вектор прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
17. Як визначити величину і напрям обертального прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
18. Як визначити величину і напрям доосьового прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
19. Яким є обертання тіла, якщо обертальне прискорення точок тіла дорівнює нулю?
20. Що таке передаточне число і як воно визначається?
21. Який рух твердого тіла називається плоскопаралельним?
22. До вивчення руху якої фігури зводиться кінематика плоскопаралельного руху?
23. Як записуються кінематичні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла?
24. Яку кількість ступенів вільності має тверде тіло, що рухається плоскопаралельно?
25. Чи можна розглядати плоскопаралельний рух тіла як складний рух?
26. Чи залежить обертальна частина плоскопаралельного руху твердого тіла від вибору полюса?
27. Як визначити швидкість довільної точки тіла при плоскопаралельному русі?
28. Чому дорівнюють проекції швидкостей кінців незмінного відрізка на його напрям?
29. Що таке миттєвий центр швидкостей при плоскопаралельному русі твердого тіла?
30. За якою формулою визначається величина швидкості точки тіла при застосуванні поняття миттєвого центра швидкостей?
31. Які є способи визначення положення миттєвого центра швидкостей?
32. Як визначити аналітично швидкість довільної точки тіла, що здійснює плоскопаралельний рух?
33. Як визначити прискорення довільної точки тіла при плоскопаралельному русі?
34. Яку точку твердого тіла при плоскопаралельному русі називають миттєвим центром прискорень?

35. Як визначити положення миттєвого центра прискорень при плоскопаралельному русі твердого тіла?
36. За якою формулою визначається величина прискорення довільної точки твердого тіла при застосуванні поняття миттєвого центра прискорень?
37. Назвіть окремі випадки визначення миттєвого центра прискорень.
38. Як визначити аналітично прискорення довільної точки тіла, що рухається плоскопаралельно?
39. Який рух твердого тіла називається обертальним навколо нерухомої точки?
40. Якими параметрами визначається положення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
41. Що таке кути Ейлера і як за їх допомогою визначити положення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, відносно нерухомої системи відліку?
42. Як записуються кінематичні рівняння руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
43. Запишіть формули, що встановлюють зв'язок між напрямними косинусами осей рухомої і нерухомої систем координат і кутами Ейлера.
44. Як формулюється теорема Ейлера — Д'Аламбера про довільне переміщення тіла, що має нерухому точку?
45. Що таке миттєва вісь обертання, миттєва кутова швидкість і миттєве кутове прискорення?
46. За якими формулами визначаються величина і напрям миттєвої кутової швидкості твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
47. За якими формулами визначаються величина і напрям миттєвого кутового прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
48. Як визначаються величина і напрям миттєвої кутової швидкості і миттєвого кутового прискорення у випадку регулярної прецесії власної осі тіла, що здійснює рух навколо нерухомої точки?
49. Як визначається швидкість довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
50. Як визначити графічно положення миттєвої осі обертання твердого тіла, що має нерухому точку?
51. Як записуються рівняння миттєвої осі обертання в рухомій і нерухомій системах координат?
52. Що таке рухомий і нерухомий аксоїд?
53. Якою є наочна геометрична картина руху твердого тіла навколо нерухомої точки?
54. Як визначити прискорення довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
55. Як, беручи до уваги кути Ейлера, записати кінематичні рівняння руху вільного твердого тіла?
56. За якою формулою визначається швидкість довільної точки вільного твердого тіла?
57. За якою формулою визначається прискорення довільної точки вільного твердого тіла?

Глава 13

СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

13.1. Поняття про складний рух точки

У главі 11 ми визначали основні кінематичні характеристики руху точки відносно заданої нерухомої системи відліку. В практиці при розв'язанні задач кінематики виникає необхідність розглядати рух точки одночасно відносно двох систем відліку, одна з яких здійснює заданий рух відносно другої, що приймається за нерухому.

Розглянемо дві системи відліку. Перша система відліку визначається декартовою системою координат $Oxyz$ і розглядається як нерухома. Друга система відліку визначається декартовою системою координат $O_1x_1y_1z_1$ і здійснює довільний рух відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$ (рис. 13.1).

Зазначимо, що під довільним рухом рухомої системи відліку відносно нерухомої системи відліку розуміють довільний рух твердого тіла або іншого суцільного середовища, з яким зв'язується рухома система відліку (див. параграф 12.14).

Розглянемо тепер рух точки, визначеної в рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$,

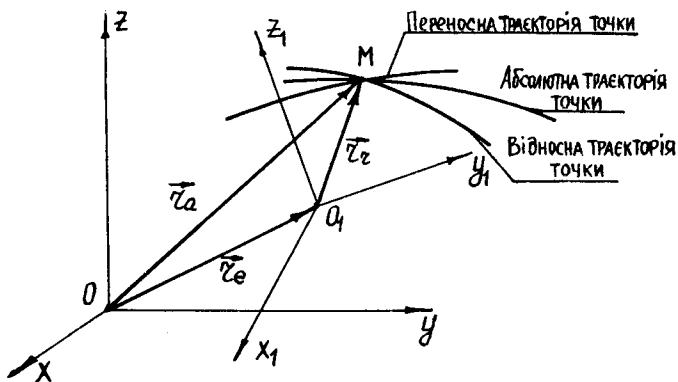


Рис. 13.1

одночасно відносно рухомої $O_1x_1y_1z_1$ і нерухомої Oxy систем координат. *Рух точки відносно нерухомої системи координат називається абсолютним рухом точки. Абсолютною траєкторією, швидкістю і прискоренням точки називаються відповідно траєкторія, швидкість і прискорення точки в її абсолютному русі.* Абсолютний рух точки бачить спостерігач, зв'язаний з нерухомою системою координат.

Рух точки відносно рухомої системи координат називається відносним рухом точки. Відносний рух точки фіксується спостерігачем, який незмінно зв'язаний з рухомою системою координат, разом з якою він рухається. *Відотною траєкторією точки називається крива, яку описує точка в своєму русі відносно рухомої системи координат* (рис. 13.1). *Відотною швидкістю і прискоренням точки відповідно називаються швидкість і прискорення точки в її відносному русі.*

Рух рухомої системи координат та всіх незмінно зв'язаних з нею точок відносно нерухомої системи називається *переносним рухом. Переносним рухом точки називається рух відносно нерухомої системи координат тієї точки рухомої системи координат, з якою в даний момент збігається точка, що рухається. Переносна траєкторія точки — це траєкторія тієї точки рухомої системи координат при її русі відносно нерухомої системи координат, з якою в даний момент збігається точка, що рухається. Відповідно переносною швидкістю і переносним прискоренням точки називаються швидкість і прискорення точки в її переносному русі.*

Найпростішим прикладом складного руху точки є рух пасажирів метро, який іде сходами ескалатора. Рухомою системою відліку — це система координат, зв'язана зі сходами ескалатора. Нерухомою системою відліку — це система координат, зв'язана зі стіною похилого тунелю. Абсолютним рухом людини буде її рух відносно стіни тунелю. Відносним рухом людини — це її рух відносно сходів. Переносним рухом людини буде рух тієї сходинки, на якій він перебуває в даний момент.

Розглянемо інший приклад, а саме рух робочого середовища в каналі між лопатками ротора відцентрового насоса (рис. 13.2). Під час роботи насоса робоче середовище рухається вздовж лопаток насоса і одночасно здійснює обертальний рух разом з ротором насоса. Зв'яжемо незмінно з ротором систему координат Ox_1y_1 . При обертанні ротора система Ox_1y_1 також обертається і, таким чином, буде визначати рухому систему відліку. Розглянемо частку робочого середовища M . Рух частки M по поверхні профілю лопатки ротора буде відносним рухом. Нерухому систему відліку буде визначати система координат Oxy , що зв'язана з нерухомим центром у точці O та з нерухомими осями, напрямленими вздовж діаметра ротора. Тому абсолютним рухом частки M буде її рух відносно системи координат Oxy .

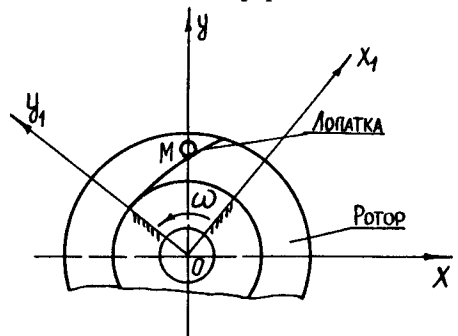


Рис. 13.2

Переносним рухом частки M буде її обертальний рух разом з тією точкою лопатки ротора, з якою в даний момент вона збігається.

Зазначимо, що всі кінематичні характеристики складного руху точки позначаються символами з нижніми індексами, які відповідають першим літерам французьких слів: *absolument* (абсолютно); *entrainement* (захват); *relativement* (відносно). Див., наприклад, рис. 13.1, де \vec{r}_e — радіус-вектор точки O_1 в її переносному русі; \vec{r}_r — радіус-вектор точки M в її відносному русі; \vec{r}_a — радіус-вектор точки M в її абсолютному русі.

Основними завданнями кінематики складного руху точки є:

1) визначення абсолютного руху точки (траєкторії, швидкості та прискорення) за відомими відносним та переносним її рухами;

2) визначення відносного та переносного рухів точки за відомим абсолютним. Ця задача постає у випадках, коли при відповідному виборі рухомої системи відліку відносний та переносний рух точки виявляються більш простими порівняно з її абсолютним рухом.

13.2. Теорема про додавання швидкостей у складному русі точки

Теорема про додавання швидкостей точки в складному русі встановлює зв'язок між векторами швидкості точки у відносному, переносному і абсолютному рухах.

Нехай точка M здійснює рух відносно системи відліку, що визначається системою координат $O_1x_1y_1z_1$. Система координат $O_1x_1y_1z_1$ рухається довільно відносно системи відліку, що визначається системою координат $Oxyz$ і яку візьмемо за нерухому (рис. 13.3).

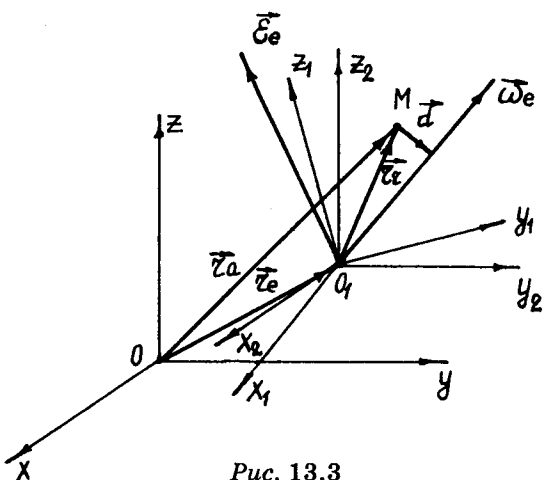


Рис. 13.3

Положення точки M відносно системи координат $O_1x_1y_1z_1$ будемо визначати радіусом-вектором \vec{r}_r . Положення точки O_1 (початок рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$) відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ будемо визначати за допомогою радіуса-вектора \vec{r}_e . Положення точки M відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ будемо визначати за допомогою радіуса-вектора \vec{r}_a (рис. 13.3).

З рис. 13.3 випливає очевидна рівність

$$\vec{r}_a = \vec{r}_e + \vec{r}_r. \quad (13.1)$$

Диференціюючи рівність (13.1) за часом, здобудемо

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_e}{dt} + \frac{d\vec{r}_r}{dt}. \quad (13.2)$$

Оскільки радіус-вектор \vec{r}_r визначає положення точки M у рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$, то при його диференціюванні необхідно скористатися формулою (11.30):

$$\frac{d\vec{r}_r}{dt} = \frac{\bar{d}\vec{r}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_r. \quad (13.3)$$

З урахуванням виразу (13.3) формула (13.2) набирає вигляду

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_e}{dt} + \frac{\bar{d}\vec{r}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_r. \quad (13.4)$$

Проведемо аналіз формули (13.4). Похідна $\frac{d\vec{r}_a}{dt}$ визначає вектор абсолютної швидкості точки M :

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt}.$$

Похідна $\frac{d\vec{r}_e}{dt}$ визначає вектор швидкості початку (точка O_1) рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ при її русі відносно нерухомої системи $Oxyz$:

$$\vec{V}_{O_1} = \frac{d\vec{r}_e}{dt}.$$

Векторний добуток $\vec{\omega} \times \vec{r}_r$ визначає швидкість точки M при обертанні системи координат $O_1x_1y_1z_1$ відносно миттєвої осі, яка проходить через її початок (точка O_1) з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (рис. 13.3).

Геометрична сума векторів $\vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{r}_r$ визначає вектор переносної швидкості точки M , оскільки характеризує її переносний рух. Дійсно, побудуємо допоміжну систему координат $O_1x_2y_2z_2$ з початком у точці O_1 так, що в будь-який момент часу її осі залишаються паралельними осям нерухомої системи $Oxyz$ (рис. 13.3). Очевидно, положення системи $O_1x_2y_2z_2$ відносно нерухомої системи $Oxyz$ буде визначатися радіусом-вектором \vec{r}_e . Тоді переносний рух точки M можна розглядати як спільний рух разом з системою координат $O_1x_2y_2z_2$ зі швидкістю \vec{V}_{O_1} і обертання навколо миттєвої осі, яка проходить через точку O_1 разом з системою $O_1x_1y_1z_1$ із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (див. параграф 12.14).

Нагадаємо, що рух рухомої системи відліку відносно нерухомої, за якого осі координат, що визначають рухому систему відліку, залишаються протягом усього руху паралельними осям системи координат, що визначає нерухому систему відліку, називається поступальним рухом (див. параграф 12.2).

Таким чином, точка M у переносному русі здійснює рух разом із початком координат рухомої системи $O_1x_1y_1z_1$ і обертається разом з цією системою відносно миттєвої осі, яка проходить через її початок (точка O_1).

Оскільки вектор $\vec{\omega}$ характеризує переносний рух, то $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e$.

Таким чином,

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega}_e \times \vec{r}_r. \quad (13.5)$$

Похідна $\frac{d\vec{r}_r}{dt}$ визначається за припущенням, що переносний рух рухомої системи координат відсутній, тобто система $O_1x_1y_1z_1$ нерухома.

Ця похідна визначає вектор відносної швидкості точки:

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{r}_r}{dt}.$$

На підставі розглянутого формула (13.4) набирає вигляду

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (13.6)$$

З формули (13.6) випливає така теорема: *вектор абсолютної швидкості точки \vec{V}_a при складному русі дорівнює векторній сумі векторів відносної \vec{V}_r і переносної \vec{V}_e швидкостей точки.*

Формула (13.6) встановлює правило паралелограма додавання швидкостей точки при її складному русі.

Величина абсолютної швидкості точки визначається за теоремою косинусів:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e \cos(\widehat{\vec{V}_r, \vec{V}_e})}. \quad (13.7)$$

У деяких випадках при визначенні абсолютної швидкості точки доцільно застосовувати формулу (13.6) в проекціях на нерухомі координатні осі $Oxyz$:

$$V_{ax} = V_{rx} + V_{ex}; \quad V_{ay} = V_{ry} + V_{ey}; \quad V_{az} = V_{rz} + V_{ez}. \quad (13.8)$$

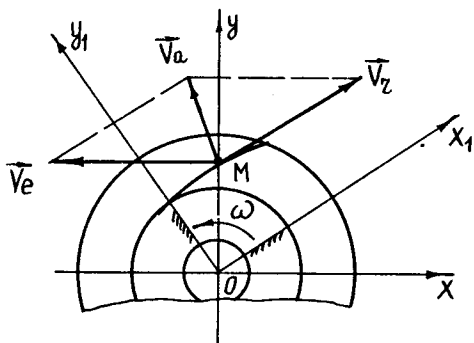


Рис. 13.4

З урахуванням виразів (13.8) величина абсолютної швидкості точки визначається за формулою

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2}, \quad (13.9)$$

а напрям вектора \vec{V}_a — за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{V}_a, x}) = \frac{V_{ax}}{V_a}; \quad \cos(\widehat{\vec{V}_a, y}) = \frac{V_{ay}}{V_a}; \quad \cos(\widehat{\vec{V}_a, z}) = \frac{V_{az}}{V_a}. \quad (13.10)$$

13.3. Теорема про додавання прискорень у складному русі точки (теорема Коріоліса)

Залежність між прискореннями точки при абсолютному, відносному і переносному рухах визначається за теоремою про додавання прискорень. Ця теорема називається *теоремою Коріоліса*¹.

Теорема Коріоліса формулюється так: *вектор абсолютного прискорення точки в складному русі дорівнює геометричній сумі векторів переносного, відносного і коріолісового прискорень точки:*

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c. \quad (13.11)$$

Дійсно, абсолютне прискорення точки

$$\vec{W}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt}. \quad (13.12)$$

З урахуванням виразів (13.5) і (13.6) формула (13.12) набирає вигляду

$$\vec{W}_a = \frac{d}{dt}(\vec{V}_r + \vec{V}_{O_1} + \omega_e \times \vec{r}_r) = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r}_r + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{r}_r}{dt}. \quad (13.13)$$

Оскільки вектори \vec{V}_r і \vec{r}_r визначені в рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$ (див. рис. 13.3), то при їх диференціюванні необхідно скористатися формулою (11.30):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_r}{dt} &= \frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r; \\ \frac{d\vec{r}_r}{dt} &= \frac{\tilde{d}\vec{r}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{r}_r = \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}_r. \end{aligned} \quad (13.14)$$

¹ Гюстав Гаспар Коріоліс (1792—1843) — французький математик та механік, член Паризької академії наук.

Вирази (13.14) підставляємо у формулу (13.13):

$$\begin{aligned}\vec{W}_a &= \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r + \frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r}_r + \vec{\omega}_e \times (\vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}_r) = \\ &= \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \left[\frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r}_r + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}_r) \right] + 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r).\end{aligned}\quad (13.15)$$

Проведемо аналіз формули (13.15). Похідна $\frac{d\vec{V}_r}{dt}$ визначається за припущенням, що переносний рух рухомої системи координат відсутній, тобто система $O_1x_1y_1z_1$ нерухома. Ця похідна визначає вектор відносного прискорення точки:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{W}_r.$$

Розглянемо вектори у квадратних дужках. Вектор $\frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt}$ визначає прискорення точки O_1 (початок рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$). Як ми вже зазначали, переносний рух рухомої системи координат складається з поступального руху разом зі своїм початком і обертання відносно миттєвої осі, яка проходить через її початок. Отже, похідна $\frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt}$ визначає прискорення точки при поступальному русі рухомої системи координат:

$$\frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} = \vec{W}_{O_1}.$$

Вектор $\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\epsilon}_e$ характеризує зміну вектора кутової швидкості з часом і, як відомо, називається вектором кутового прискорення. Векторний добуток $\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r}_r = \vec{\epsilon}_e \times \vec{r}_r$ визначає вектор обертального прискорення точки M при обертанні системи координат $O_1x_1y_1z_1$ відносно миттєвої осі, яка проходить через її початок (точка O_1) з кутовим прискоренням $\vec{\epsilon}_e$.

Подвійний векторний добуток $\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}_r) = \omega_e^2 \vec{d}$ [див. формулу (12.118)] визначає вектор доосьового прискорення точки M при обертанні системи координат $O_1x_1y_1z_1$ відносно миттєвої осі, яка проходить через її початок (точка O_1) з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$.

Геометрична сума векторів $\vec{W}_{O_1} + \vec{\epsilon}_e \times \vec{r}_r + \omega_e^2 \vec{d}$ визначає вектор переносного прискорення точки M , оскільки характеризує переносний рух точки M .

Дійсно, побудуємо допоміжну систему координат $O_1x_2y_2z_2$ з початком у точці O_1 так, що в будь-який момент часу її осі залишаються паралельними осям нерухомої системи $Oxyz$ (див. рис. 13.3). Очевидно, положення системи $O_1x_2y_2z_2$ відносно нерухомої $Oxyz$ буде визначатися радіусом-вектором \vec{r}_e . Тоді переносний рух точки M можна розглядати як спільний рух разом із системою координат $O_1x_2y_2z_2$ з прискоренням \vec{W}_{O_1} і обертання навколо миттєвої осі, яка проходить через точку O_1 разом із системою $O_1x_1y_1z_1$ з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$ і кутовим прискоренням $\vec{\epsilon}_e$ (див. параграф 12.14).

Таким чином,

$$\vec{W}_e = \vec{W}_{O_1} + \vec{\epsilon}_e \times \vec{r}_e + \omega^2 \vec{d}.$$

Векторний добуток $2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$ визначає прискорення Коріоліса

$$\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r, \quad (13.16)$$

де $\vec{\omega}_e$ — вектор кутової швидкості переносного руху; \vec{V}_r — вектор швидкості точки.

Величина прискорення Коріоліса

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}). \quad (13.16a)$$

Напрямок прискорення Коріоліса знаходять за правилом визначення напрямку векторного добутку; прискорення Коріоліса \vec{W}_c напрямлене перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}_e$ і \vec{V}_r , в той бік, з якого спостерігач бачить поворот від вектора $\vec{\omega}_e$ до вектора \vec{V}_r на найменший кут проти стрілки годинника.

Напрямок вектора \vec{W}_c можна визначити іншим способом. Проведемо через точку M площину, перпендикулярну до вектора $\vec{\omega}_e$, і спроеціюємо відносно швидкості \vec{V}_r на цю площину. Якщо проекцію $\vec{V}_r \sin \alpha$ повернемо в площині на 90° навколо точки M у напрямі переносного обертання (рис. 13.5), то дістанемо напрям вектора \vec{W}_c . Описаний спосіб називається *правилом Жуковського*.

Прискорення Коріоліса перетворюється в нуль у трьох випадках:

- 1) якщо переносний рух поступальний ($\vec{\omega}_e = \vec{0}$);
- 2) якщо швидкість відносного руху дорівнює нулю ($\vec{V}_r = \vec{0}$);

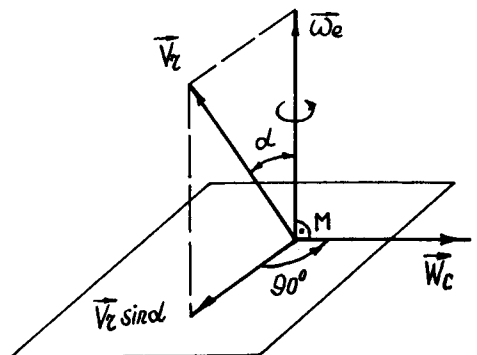


Рис. 13.5

3) якщо вектори кутової швидкості переносного руху і відносної швидкості паралельні $\left[\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 0 \right]$.

Застосовуючи теорему про додавання прискорень, можна при визначенні абсолютного прискорення точки скористатися методом проєкцій. Для цього необхідно спроекцювати векторну рівність (13.11) на осі нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} W_{ax} &= W_{ex} + W_{rx} + W_{cx}; \\ W_{ay} &= W_{ey} + W_{ry} + W_{cy}; \\ W_{az} &= W_{ez} + W_{rz} + W_{cz}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Величину абсолютного прискорення можна визначити за формулою

$$W_a = \sqrt{(W_{ax})^2 + (W_{ay})^2 + (W_{az})^2}. \quad (13.18)$$

Напрямок вектора \vec{W}_a визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{W}_a, x}) &= \frac{W_{ax}}{W_a}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}_a, y}) &= \frac{W_{ay}}{W_a}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}_a, z}) &= \frac{W_{az}}{W_a}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

У випадку, коли переносний рух — поступальний, кутова швидкість $\omega_e = 0$ і прискорення Коріоліса згідно з формулою (13.15) дорівнює нулю. У цьому випадку теорема про додавання прискорень має вигляд

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r. \quad (13.20)$$

13.4. Поняття про складний рух твердого тіла

Якщо тверде тіло D рухається визначеним чином відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 13.6), яка, у свою чергу, рухається визначеним чином відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$, то результуючий рух твердого тіла буде складатися з кількох складових рухів. Такий рух твердого тіла, за аналогією зі складним рухом точки, називається *складним рухом*.

Завдання вивчення складного руху твердого тіла полягає у встановленні залежностей між основними характеристиками складових рухів і складного руху тіла. Отже, при вивченні складного руху тіла береться до уваги те, що складний рух утворюється з найпростіших рухів, а потім проводиться до-

слідження утвореного складного руху. Побудова складного руху з найпростіших називається *синтезом рухів* або *додаванням рухів*.

Аналогічно до складного руху точки при складному русі твердого тіла розрізняють відносний, переносний і абсолютний рух. *Рух твердого тіла відносно системи відліку, яка прийнята за нерухому, називається абсолютним рухом*. *Рух твердого тіла відносно рухомої системи відліку називається відносним рухом*. *Рух рухомої системи відліку відносно нерухомої системи відліку називається переносним*. Відповідно до цих понять розрізняють абсолютні,

відносні і переносні лінійні швидкості та прискорення точок тіла, а також абсолютні, відносні і переносні кутові швидкості та кутові прискорення тіла.

Залежно від того, якими будуть відносний рух тіла і переносний рух рухомої системи відліку, постають задачі про додавання рухів. Розв'язанню цих задач присвячено наступні параграфи.

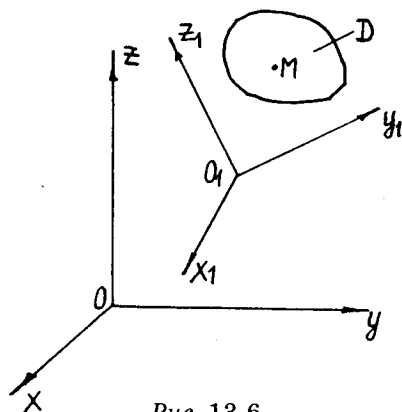


Рис. 13.6

13.5. Додавання поступальних рухів твердого тіла

Нехай тверде тіло D (рис. 13.6) рухається поступально відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ зі швидкістю \vec{V}_1 і прискоренням \vec{W}_1 , а система відліку $O_1x_1y_1z_1$, в свою чергу, рухається поступально зі швидкістю \vec{V}_2 і прискоренням \vec{W}_2 відносно системи відліку $Oxyz$, що прийнята за нерухому. Потрібно визначити абсолютний рух тіла відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$.

Абсолютна швидкість довільної точки M на підставі теореми про складання швидкостей дорівнює геометричній сумі швидкостей відносного і переносного рухів:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (13.21)$$

У нашому випадку для всіх точок твердого тіла маємо $\vec{V}_r = \vec{V}_1$ і $\vec{V}_e = \vec{V}_2$, оскільки відносний і переносний рухи є поступальними. Тому рівність (13.21) набуває вигляду

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \quad (13.22)$$

Аналогічно на підставі теореми про додавання прискорень [див. рівність (13.20)] здобудемо абсолютне прискорення точок тіла:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_1 + \vec{W}_2, \quad (13.23)$$

де $\vec{W}_1 = \vec{W}_r$ — прискорення точок тіла у відносному русі; $\vec{W}_2 = \vec{W}_e$ — прискорення точок тіла у переносному русі.

З розглянутого випливає, що у випадку, коли відносний і переносний рухи є поступальними, абсолютний рух твердого тіла є також поступальним; при цьому швидкість і прискорення поступального руху дорівнюють геометричній сумі векторів швидкостей і прискорень відносного і переносного рухів.

Рівності (13.22) і (13.23) можна узагальнити на випадок n поступальних рухів. Для цього достатньо послідовно розкласти складний переносний рух на складові рухи:

$$\vec{V}_a = \sum_{k=1}^n \vec{V}_k; \quad \vec{W}_a = \sum_{k=1}^n \vec{W}_k. \quad (13.24)$$

13.6. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються в одній точці

Розглянемо складний рух твердого тіла, який складається із сукупності двох обертань тіла навколо осей, що перетинаються в одній точці.

Нехай тіло D обертається відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ навколо осі Oz_1 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$, а система відліку $O_1x_1y_1z_1$ обертається навколо осі Oz відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$ з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ (рис. 13.7). Обертання тіла разом з віссю Oz_1 навколо осі Oz є переносним обертанням, а обертання тіла навколо осі Oz_1 — відносним обертанням, тобто $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_r$; $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_e$. Оскільки точка O нерухома, то результуючий рух буде обертальним навколо нерухомої точки (сферичний рух). Визначимо кутову швидкість $\vec{\omega}_a$ цього руху за відомими кутовими швидкостями складових рухів.

У параграфі 12.11 було показано, що для кожного елементарного проміжку часу обертання тіла навколо нерухомої точки є елементарним поворотом навколо миттєвої осі Op , що проходить через точку O , з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_a$ (рис. 13.7).

Визначимо абсолютну швидкість довільної точки M тіла D . У відносному русі навколо осі Oz_1 точка M має швидкість $\vec{V}_r = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$ [див. формулу (12.23)], а в переносному обертанні навколо осі Oz точка M має швидкість $\vec{V}_e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}$. Абсолютна швидкість точки M на підставі теореми про складання швидкостей

$$\begin{aligned} \vec{V}_a &= \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{\omega}_2 \times \vec{r} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r} = \\ &= (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1) \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

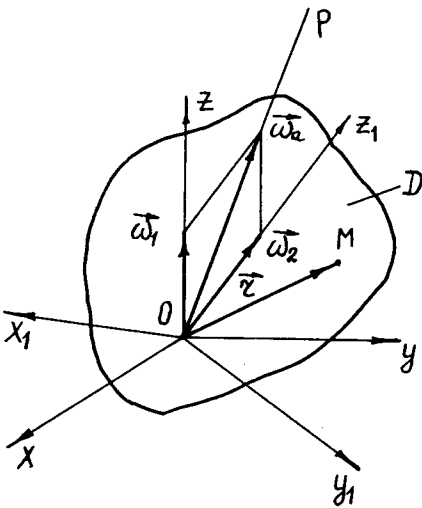


Рис. 13.7

Оскільки складний рух є миттєвим обертанням з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_a$, то абсолютна швидкість точки M може бути визначена також за формулою

$$\vec{V}_a = \vec{\omega}_a \times \vec{r}. \quad (13.26)$$

Порівнюючи рівності (13.25) і (13.26), матимемо

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \quad (13.27)$$

З формули (13.27) випливає, що сукупність двох обертань твердого тіла навколо осей, що перетинаються в одній точці, зводиться до одного обертання тіла навколо миттєвої осі, що проходить через точку перетину осей; при цьому абсолютна миттєва кутова швидкість обертання тіла дорівнює за модулем і за напрямом діагоналі паралелограма, побудованого на векторах відносної і переносної кутових швидкостей, або, що те саме, дорівнює геометричній сумі векторів відносної і переносної кутових швидкостей (рис. 13.7).

Рівність (13.27) можна узагальнити на випадок n обертань навколо осей, що перетинаються в одній точці:

$$\vec{\omega}_a = \sum_{k=1}^n \vec{\omega}_k, \quad (13.28)$$

де $\vec{\omega}_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) — вектори кутових швидкостей складових обертань.

Тепер розглянемо визначення абсолютного кутового прискорення при нерівномірному обертанні твердого тіла навколо двох осей, що перетинаються в одній точці.

Надамо рівності (13.27) вигляду

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + (\omega_{rx_1} \vec{i}_1 + \omega_{ry_1} \vec{j}_1 + \omega_{rz_1} \vec{k}_1), \quad (13.29)$$

де $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ — одиничні вектори осей рухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$; $\omega_{rx_1}, \omega_{ry_1}, \omega_{rz_1}$ — проекції вектора відносної кутової швидкості на рухомі осі системи відліку $O_1x_1y_1z_1$.

За визначенням абсолютне кутове прискорення твердого тіла

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_a &= \frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \frac{d}{dt} (\omega_{rx_1} \vec{i}_1 + \omega_{ry_1} \vec{j}_1 + \omega_{rz_1} \vec{k}_1) = \\ &= \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \left(\frac{d\omega_{rx_1}}{dt} \vec{i}_1 + \frac{d\omega_{ry_1}}{dt} \vec{j}_1 + \frac{d\omega_{rz_1}}{dt} \vec{k}_1 \right) + \left(\omega_{rx_1} \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \omega_{ry_1} \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \omega_{rz_1} \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right), \quad (13.30) \end{aligned}$$

де $\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e$ — кутове прискорення переносного руху; $\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1$; $\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$;

$\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_1$ на підставі формул (11.25);

$$\omega_{rx_1} \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \omega_{ry_1} \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \omega_{rz_1} \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times (\omega_{rx_1} \vec{i}_1 + \omega_{ry_1} \vec{j}_1 + \omega_{rz_1} \vec{k}_1) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r;$$

$$\frac{d\omega_{rx_1}}{dt} \vec{i}_1 + \frac{d\omega_{ry_1}}{dt} \vec{j}_1 + \frac{d\omega_{rz_1}}{dt} \vec{k}_1 = \varepsilon_{rx_1} \vec{i}_1 + \varepsilon_{ry_1} \vec{j}_1 + \varepsilon_{rz_1} \vec{k}_1 = \vec{\varepsilon}_r.$$

Підставляючи ці дані в рівність (13.30), здобудемо

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r, \quad (13.31)$$

де $\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \vec{\varepsilon}_c$ — вектор, що називається *обертальним кутовим прискоренням*. Отже,

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_c. \quad (13.32)$$

З формули (13.32) випливає, що абсолютне кутове прискорення при нерівномірному обертанні твердого тіла навколо двох осей, що перетинаються в одній точці, дорівнює геометричній сумі векторів його переносного, відносного і обертального прискорень.

Оскільки $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_a - \vec{\omega}_e$, то $\vec{\varepsilon}_c = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_a - \vec{\omega}_e) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a - \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e$, звідки, оскільки $\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e = \vec{0}$, матимемо:

$$\vec{\varepsilon}_c = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a;$$

$$\vec{\varepsilon}_c = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a. \quad (13.33)$$

Таким чином, **обертальним кутовим прискоренням твердого тіла називається складова абсолютного кутового прискорення тіла при його нерівномірному обертанні навколо двох осей, що перетинаються в одній точці, яка дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості переносного обертання тіла і вектора кутової швидкості відносного обертання тіла або векторному добутку вектора кутової швидкості переносного обертання тіла і вектора кутової швидкості його абсолютного обертання.**

Прискорення $\vec{\varepsilon}_c$ характеризує зміну напряму вектора кутової швидкості відносного обертання твердого тіла внаслідок його переносного обертання.

Розглянемо визначення вектора $\vec{\varepsilon}_a$ абсолютного кутового прискорення у деяких окремих випадках.

1. *Випадок рівномірного переносного обертання:*

$$\vec{\omega}_e = \text{const}; \quad \vec{\varepsilon}_e = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{0}; \quad \vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_c. \quad (13.34)$$

2. *Випадок рівномірного відносного обертання:*

$$\vec{\omega}_r = \text{const}; \quad \vec{\varepsilon}_r = \frac{d\vec{\omega}_r}{dt} = \vec{0}; \quad \vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_c. \quad (13.35)$$

3. *Випадок рівномірного переносного і відносного обертань тіла (випадок регулярної прецесії):*

$$\bar{\epsilon}_e = \bar{0}; \bar{\epsilon}_r = \bar{0}; \bar{\epsilon}_a = \bar{\epsilon}_c = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_a. \quad (13.36)$$

На закінчення зазначимо, що з проведеного дослідження обертань навколо осей, що перетинаються в одній точці, випливає, що деякі властивості вектора кутової швидкості обертання аналогічні властивостям вектора сили. Так, кутові швидкості обертання навколо осей, що перетинаються в одній точці, замінюються однією кутовою швидкістю так само, як і збіжна система сил у статиці зводиться до однієї сили (рівнодійної). Аналогія між кутовими швидкостями обертань і силами наведеним прикладом не обмежується. Інші аналогії буде розглянуто в наступних параграфах.

13.7. Додавання обертань навколо паралельних осей

При додаванні обертань навколо паралельних осей мають місце два випадки складного руху тіла, а саме випадок поступального складного руху і випадок обертального складного руху навколо миттєвої осі обертання.

Випадок 1. Розглянемо складний рух, що складається з двох обертань відносно паралельних осей Oz і O_1z_1 нерухомої і рухомої систем відліку $Oxyz$ і $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 13.8).

Нехай вектори кутових швидкостей відносного $\bar{\omega}_2$ і переносного $\bar{\omega}_1$ рухів рівні за модулем, але мають протилежний напрям, тобто $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1$. Така сукупність рухів називається *парою обертань*. За аналогією з парою сил в статиці вектори кутових швидкостей таких обертань утворюють пару кутових швидкостей.

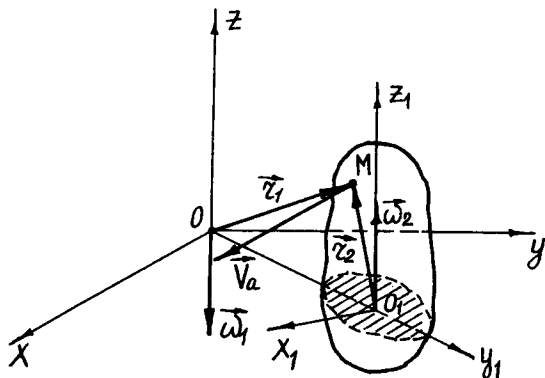


Рис. 13.8

Знайдемо абсолютну швидкість довільної точки M твердого тіла. На підставі теореми про додавання швидкостей для точки тіла M можна записати

$$\begin{aligned} \bar{V}_a &= \bar{V}_r + \bar{V}_e = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2 - \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_1 = \bar{\omega}_2 \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = \\ &= \bar{\omega}_2 \times -(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{\omega}_2 = \bar{OO}_1 \times \bar{\omega}_2. \end{aligned} \quad (13.37)$$

Оскільки вектори $\bar{\omega}_2$ і \bar{OO}_1 не залежать від положення точки M , з рівності (13.37) випливає, що швидкості всіх точок тіла однакові. Цією властивістю наділений тільки поступальний рух.

Векторний добуток $\vec{O}\vec{O}_1 \times \vec{\omega}_2$ є моментом вектора $\vec{\omega}_2$ відносно точки O , або, що те саме, моментом пари $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$. Звідси випливає, що абсолютна швидкість точки M дорівнює за модулем добутку $\omega_1 OO_1$ або $\omega_2 OO_1$, де OO_1 — плече пари $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$, і має напрям, перпендикулярний до площини пари $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$.

Таким чином, тверде тіло, що бере участь у парі обертань, рухається поступально зі швидкістю, яка дорівнює моменту пари обертань.

Сукупність n пар обертань еквівалентна одній парі. Зауважимо також, що будь-який миттєво-поступальний рух можна уявити як миттєву пару обертань.

Покажемо, що пара обертань має деякі властивості, аналогічні властивостям пари сил, а саме:

1) абсолютна швидкість твердого тіла, що бере участь у парі обертань, не залежить від положення площини, в якій лежать вектори кутових швидкостей пари обертань. Цей висновок безпосередньо випливає з рівності (13.37), тому, не змінюючи абсолютну швидкість твердого тіла, пару обертань можна переносити з початкової площини її розташування у будь-яку іншу площину, їй паралельну;

2) абсолютна швидкість твердого тіла не змінюється, якщо змінити вектори кутових швидкостей, що утворюють пару обертань $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$, і вектор $\vec{O}\vec{O}_1$, не змінюючи векторний добуток $\vec{O}\vec{O}_1 \times \vec{\omega}_2$, тобто не змінюючи момент пари. Звідси випливає, що, не змінюючи абсолютну швидкість твердого тіла, пару обертань можна розташувати у площині її початкового положення у будь-якому положенні, можна змінити числові значення кутових швидкостей, що утворюють пару, і величину її плеча, не змінюючи момент пари, що дорівнює $\vec{O}\vec{O}_1 \times \vec{\omega}_2$;

3) пари обертань, що мають однакові моменти $\vec{O}\vec{O}_1 \times \vec{\omega}_2$, є кінематично еквівалентними, тобто такі пари надають твердому тілу однакові абсолютні швидкості.

Випадок 2. Нехай тверде тіло обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$ навколо осі O_1z_1 відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$. Система відліку $O_1x_1y_1z_1$, в свою чергу, обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ навколо осі Oz відносно системи відліку $Oxyz$. Осі O_1z_1 і Oz паралельні (рис. 13.9).

На підставі теореми про додавання швидкостей знайдемо абсолютну швидкість довільної точки M твердого тіла:

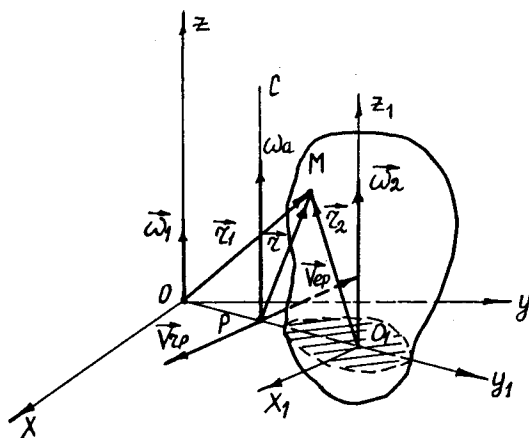


Рис. 13.9

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1. \quad (13.38)$$

Оскільки вектори швидкості \vec{V}_r і \vec{V}_e точки M і будь-яких інших точок тіла лежать у площинах, перпендикулярних до осей Oz і O_1z_1 , то і вектор абсолютної швидкості лежить в площині, перпендикулярній до цих осей. Звідси випливає, що тіло здійснює плоскопаралельний рух. Знайдемо в площині xOy миттєвий центр швидкостей у випадку, коли $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ напрямлені в один бік.

Візьмемо на прямій OO_1 точку p . Абсолютна швидкість цієї точки \vec{V}_{ap} дорівнює геометричній сумі двох швидкостей: відносної швидкості \vec{V}_{rp} точки p , тобто її швидкості при обертанні тіла навколо осі O_1z_1 , і переносної швидкості \vec{V}_{ep} цієї точки, тобто її швидкості при обертанні тіла навколо осі Oz . Вектори \vec{V}_{rp} і \vec{V}_{ep} перпендикулярні до прямої OO_1 і мають протилежні напрямки. Отже, величина абсолютної швидкості точки

$$V_{ap} = V_r - V_e = \omega_2 O_1 p - \omega_1 O p. \quad (13.39)$$

Якщо точка p — миттєвий центр швидкостей, то $V_{ap} = 0$, і з рівності (13.39) маємо

$$\omega_2 O_1 p = \omega_1 O p,$$

звідки

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O p}{O_1 p}. \quad (13.40)$$

Якщо через точку p провести пряму pC , паралельну векторам $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$, то абсолютні швидкості точок, що лежать на цій прямій, будуть також дорівнювати нулю, отже, в абсолютному русі тіла пряма pC є миттєвою віссю обертання тіла (рис. 13.9).

Визначимо миттєву кутову швидкість обертання тіла. Для точки O_1 можна записати

$$V_{O_1} = \omega_1 O O_1 = \omega_a \cdot O_1 p,$$

звідки

$$\omega_a = \frac{\omega_1 O O_1}{O_1 p} = \frac{\omega_1 (O p + O_1 p)}{O_1 p} = \frac{\omega_1 O p + \omega_1 O_1 p}{O_1 p} = \frac{\omega_2 O_1 p + \omega_1 O_1 p}{O_1 p} = \omega_1 + \omega_2, \quad (13.41)$$

де $\omega_1 O p = \omega_2 O_1 p$, оскільки точка p — миттєвий центр швидкостей.

З розглянутого випливає: при додаванні двох напрямлених в один бік обертань навколо паралельних осей абсолютний рух тіла такий, що в кожний даний момент існує миттєва вісь обертання тіла, яка розташована паралельно осям

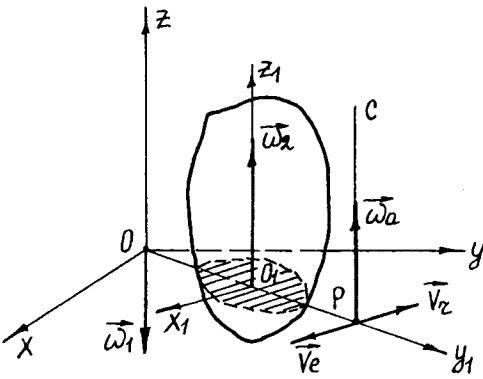


Рис. 13.10

відносного і переносного обертань і поділяє відстань між ними внутрішнім чином на частини, обернено пропорційні відносній і переносній кутовим швидкостям. Вектор миттєвої абсолютної кутової швидкості тіла паралельний векторам відносної і переносної кутових швидкостей і має той самий напрям, а його величина (модуль) дорівнює сумі величин (модулів) відносної і переносної кутових швидкостей.

Тепер перейдемо до додавання обертань, коли вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ мають протилежні напрями і нерівні. Нехай $\omega_2 > \omega_1$ (рис. 13.10).

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей тіла лежить поза відрізком OO_1 , оскільки вектори \vec{V}_r і \vec{V}_e мають протилежні напрями тільки в цих точках. Знайдемо точку p , в якій ці швидкості рівні:

$$\omega_2 O_1 p = \omega_1 O p,$$

звідки

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O p}{O_1 p}. \quad (13.42)$$

Визначимо миттєву кутову швидкість обертання тіла. Для точки O_1 можна записати

$$V_{O_1} = \omega_a O_1 p = \omega_1 O O_1,$$

звідки

$$\omega_a = \frac{\omega_1 O O_1}{O_1 p} = \frac{\omega_1 (O p - O_1 p)}{O_1 p} = \frac{\omega_1 O p - \omega_1 O_1 p}{O_1 p} = \frac{\omega_2 O_1 p - \omega_1 O_1 p}{O_1 p} = \omega_2 - \omega_1, \quad (13.43)$$

де $\omega_1 O p = \omega_2 O_1 p$, оскільки точка p — миттєвий центр швидкостей.

Таким чином, при додаванні двох напрямлених в різні сторони обертань навколо паралельних осей і таких, які не утворюють пару обертань, абсолютний рух тіла такий, що в кожний даний момент існує миттєва вісь обертання тіла, яка розташована паралельно осям відносного і переносного обертань і поділяє відстань між ними зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні відносній і переносній кутовим швидкостям. Вектор миттєвої абсолютної кутової швидкості тіла паралельний векторам відносної і переносної кутових швидкостей і має напрям у бік більшої з них, а його величина (модуль) дорівнює різниці величин (модулів) відносної і переносної кутових швидкостей.

На закінчення зазначимо, що додавання векторів кутових швидкостей при обертанні твердого тіла навколо паралельних осей виконується так само, як і додавання паралельних сил (див. розділ “Статика”).

13.8. Метод зупинки

Метод зупинки широко застосовується при дослідженні відносного руху тіл у так званих планетарних механізмах. **Планетарним механізмом** називають зчеплення двох або кількох зубчастих коліс (фрикційних дисків), одне з яких нерухоме або обертається навколо нерухомої осі, а решта — навколо осей, закріплених на кривошипі, що обертається. Колеса, з’єднані з нерухомими осями, називаються *сонячними* або *центрально-ними*, а колеса, з’єднані з кривошипом, що обертається, називаються *сателітами*.

Якщо планетарний механізм зазнає обертання від двох незалежних джерел, то такий механізм називається *диференціальним*.

Зчеплення коліс може бути зовнішнім або внутрішнім.

На рис. 13.11 зображено диференціальний планетарний механізм із зовнішнім зчепленням коліс, а на рис. 13.12 — планетарний механізм із внутрішнім зчепленням коліс.

Визначимо загальне співвідношення між кутовими швидкостями коліс і кривошипа відносно нерухомої основи планетарного механізму у випадках зовнішнього і внутрішнього зчеплень.

Розкладемо рух сателітів на два складових рухи: рух разом з кривошипом і рух відносно кривошипа. Перший рух буде переносним, а другий — відносним. Якщо припустити, що всі ланки механізму зазнають додаткового переносного обертального руху з кутовою швидкістю, яка за величиною дорівнює кутовій швидкості кривошипа (ведучої ланки), але напрямлена в протилежний бік, то кривошип зупиниться і планетарний механізм перетвориться в звичайну систему зубчастих коліс з нерухомими осями. Проте в цьому випадку колеса обертатимуться не із заданими на початку кутовими швидкостями, а швидкостями, зменшеними на величину кутової швидкості кривошипа. Так, для пар коліс, що показані на рис. 13.11 і 13.12, матимемо:

$$\omega_1 - \omega_3; \quad -\omega_3; \quad \omega_2 - \omega_3; \quad \omega_2 = \omega_3. \quad (13.44)$$

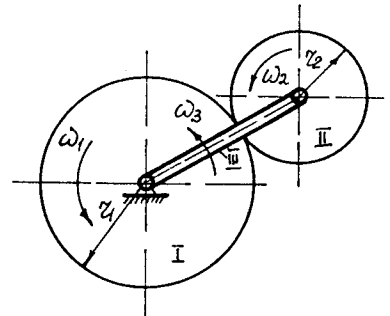


Рис. 13.11

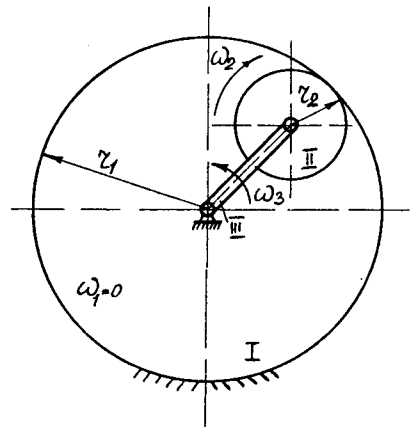


Рис. 13.12

Оскільки лінійні швидкості у точці дотику коліс однакові, то для зчеплення (рис. 13.11) дістанемо співвідношення

$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = -\frac{r_2}{r_1} = -i_{1,2}, \quad (13.45)$$

де r_1 і r_2 — радіуси коліс; $i_{1,2}$ — передаточне число (див. параграф 12.7).

Формула (13.45) застосовується для зовнішнього зчеплення коліс і знак “-” показує, що при зовнішньому зчепленні зубчастих коліс напрями обертання коліс протилежні (мається на увазі зчеплення зубчастих коліс з нерухомими осями після “зупинки”).

Для внутрішнього зчеплення коліс (рис. 13.12) маємо

$$\frac{-\omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = \frac{r_2}{r_1} = i_{1,2}, \quad (13.46)$$

оскільки ω_1 дорівнює нулю.

Формули (13.44) і (13.45) називаються *формулами Вілліса*¹.

Розглянемо конкретний приклад застосування цього ефективного методу.

Знайти кутову швидкість шестірні, кількість зубців якої z_3 , якщо кривошип OO_2 обертається навколо осі O нерухомої шестірні, що має z_0 зубців, з кутовою швидкістю, яка дорівнює ω_0 і несе на собі вісь подвійної шестірні O_1 з кількістю зубців z_1 , z_2 (рис. 13.13).

Для розв’язання задачі застосуємо метод зупинки. Надамо всій системі додаткового переносного руху навколо осі O з кутовою швидкістю, яка дорівнює $-\omega_0$ (рис. 13.13). Після цього кривошип OO_2 зупиниться, і ми дістанемо просту зубчасту передачу. Кутові швидкості коліс тепер стануть іншими.

Нова кутова швидкість першого колеса, спочатку нерухомого, дорівнюватиме $-\omega_0$, а нова кутова швидкість другого колеса буде $(\omega_2 - \omega_0)$, де ω_2 — кутова швидкість другого колеса до зупинки кривошипа. Кутова швидкість третього колеса після зупинки кривошипа дорівнюватиме $(\omega_3 - \omega_0)$.

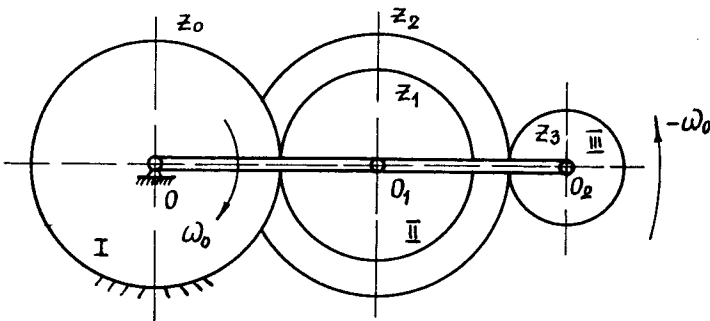


Рис. 13.13

¹ Роберт Вілліс (1800—1875) — англійський механік, член Лондонського королівського товариства.

За формулою (13.45) маємо

$$\frac{\omega_2 - \omega_0}{-\omega_0} = -\frac{z_0}{z_1}; \quad \frac{\omega_3 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{z_2}{z_3},$$

звідки

$$\frac{\omega_3 - \omega_0}{-\omega_0} = \frac{z_0 z_2}{z_1 z_3}; \quad \omega_3 = \omega_0 \left(1 - \frac{z_0 z_2}{z_1 z_3} \right).$$

13.9. Додавання поступальних і обертальних рухів

Випадок 1. Вектори швидкостей поступального і обертального рухів твердого тіла паралельні.

Нехай тверде тіло рухається поступально зі швидкістю \vec{V} відносно системи відліку $O_1 x_1 y_1 z_1$, а система відліку, в свою чергу, обертається навколо осі Oz нерухомої системи координат $Oxyz$ з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Вектори \vec{V} і $\vec{\omega}$ паралельні (рис. 13.14).

Знайдемо абсолютну швидкість точки M тіла:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{13.47}$$

де $\vec{V}_r = \vec{V}$, оскільки тіло рухається зі швидкістю \vec{V} відносно рухомої системи відліку $O_1 x_1 y_1 z_1$; $\vec{V}_e = \vec{\omega} \times \vec{r}$, оскільки тіло обертається навколо осі Oz відносно нерухомої системи $Oxyz$.

З рівності (13.47) випливає, що будь-яка точка тіла в абсолютному русі рухається по бічній поверхні колового циліндра з віссю Oz . Такий рух називається *гвинтовим рухом* або *кінематичним гвинтом*.

Якщо вектори $\vec{\omega}$ і \vec{V} мають напрям в один бік за напрямом осі Oz , то кінематичний гвинт називається *правим кінематичним гвинтом*,

а у протилежному разі — *лівим кінематичним гвинтом*. Відношення модуля швидкості поступального руху тіла до модуля кутової швидкості його обертання

$$p = \frac{V}{\omega} \tag{13.48}$$

називається *параметром кінематичного гвинта*.

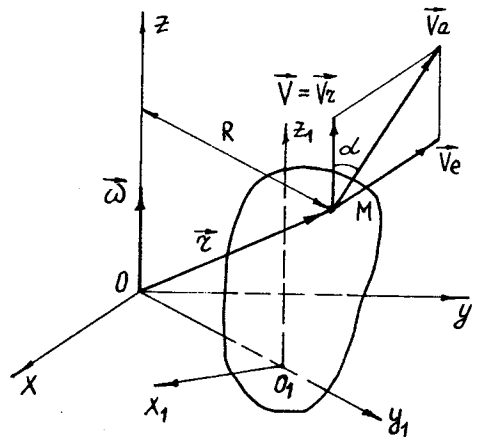


Рис. 13.14

Позначимо кут повороту тіла навколо осі Oz через φ , а величину поступального переміщення тіла вздовж осі Oz — через h . Тоді матимемо:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad V = \frac{dh}{dt},$$

звідки, враховуючи рівність (13.48), здобудемо

$$p = \frac{dh}{d\varphi}. \quad (13.49)$$

Якщо параметр гвинта — стала величина, то, інтегруючи рівняння $dh = pd\varphi$ у межах від 0 до h і від 0 до φ , матимемо

$$h = p\varphi. \quad (13.50)$$

Якщо взяти $\varphi = 2\pi$, то з рівності (13.50) здобудемо:

$$h = 2\pi p; \quad p = \frac{h}{2\pi}. \quad (13.51)$$

Величина h , тобто відстань, на яку переміщується тіло уздовж осі Oz при одному повному оберті навколо цієї осі, називається *кроком гвинта*.

Оскільки при гвинтовому русі твердого тіла відстань точок тіла від нерухомої осі Oz не змінюється, то траєкторії точок тіла розташовуються на поверхнях колових циліндрів радіусів R_i (рис. 13.14).

Визначимо величину абсолютної швидкості точки M тіла. На підставі формули (13.47) і рис. 13.14 маємо

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}.$$

Підставляючи в цю рівність $V_r = p\omega$ і $V_e = R\omega$, здобудемо

$$V_a = \sqrt{p^2\omega^2 + R^2\omega^2} = \omega\sqrt{p^2 + R^2}. \quad (13.52)$$

Кут α , тобто кут, що утворює вектор абсолютної швидкості точки M з твірною циліндра, визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_e}{V_r} = \frac{R\omega}{p\omega} = \frac{R}{p}. \quad (13.53)$$

Отже, з рівності (13.53) випливає, що при $p = \text{const}$ кут $\alpha = \text{const}$, тобто траєкторія точки тіла, що називається *гвинтовою лінією*, перетинає усі твірні циліндра під одним кутом. Якщо розрізати циліндр вздовж твірної і розгорнути його на площині, то гвинтова лінія на цій площині буде зображатися прямою лінією (рис. 13.15).

З рис. 13.15 випливає, що крок гвинта

$$h = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha. \quad (13.54)$$

Випадок 2. Вектор швидкості поступального руху твердого тіла перпендикулярний до вектора кутової швидкості обертального руху.

Нехай тверде тіло обертається навколо осі O_1z_1 відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$, а система відліку $O_1x_1y_1z_1$, в свою чергу, рухається поступально зі швидкістю \vec{V} відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$ (рис. 13.16). Визначимо абсолютний рух тіла.

На підставі розглянутих в параграфі 13.7 понять поступальний рух тіла зі швидкістю \vec{V} можна замінити парою обертань $(\bar{\omega}', \bar{\omega}'')$. При цьому момент пари обертань дорівнює швидкості поступального руху тіла, а площина пари перпендикулярна до вектора \vec{V} (рис. 13.16). Візьмемо, що $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$, а $\bar{\omega}'' = -\bar{\omega}$. Плече пари знайдемо за формулою

$$d = O_1O_3 = \frac{V}{\omega}. \tag{13.55}$$

Отже, сукупність поступального й обертального рухів зведена до трьох обертань з кутовими швидкостями $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$, $\bar{\omega}''$; при цьому обертання тіла з кутовими швидкостями $\bar{\omega}$ і $\bar{\omega}''$ еквівалентне спокою, оскільки вектори кутових швидкостей $\bar{\omega}$ і $\bar{\omega}''$ рівні за модулем і напрямлені по одній прямій у протилежні боки. Отже, **абсолютний рух тіла** — це обертання навколо миттєвої осі, що проходить через точку O_3 , паралельно осі O_1z_1 з кутовою швидкістю заданого обертання.

Випадок 3. Вектор швидкості поступального руху твердого тіла напрямлений під кутом φ до вектора кутової швидкості обертального руху тіла.

Нехай тверде тіло обертається навколо осі O_1z_1 відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$, а система відліку $O_1x_1y_1z_1$, в свою чергу, рухається поступально зі швидкістю \vec{V} відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$. При цьому кут між векторами $\bar{\omega}$ і \vec{V} дорівнює φ (рис. 13.17). Розкладаючи век-

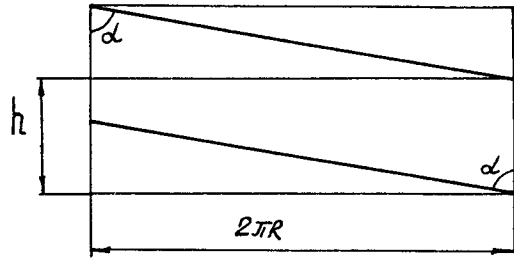


Рис. 13.15

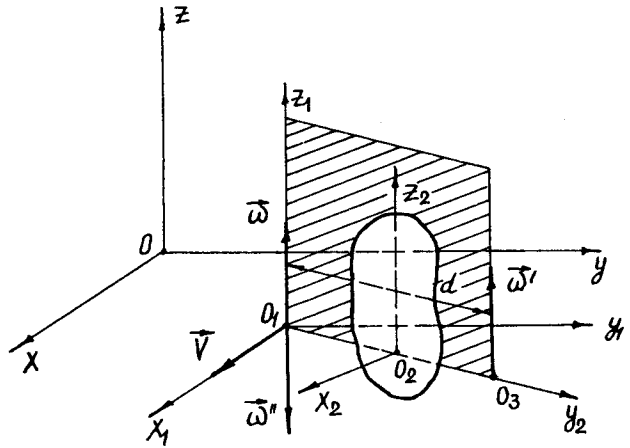


Рис. 13.16

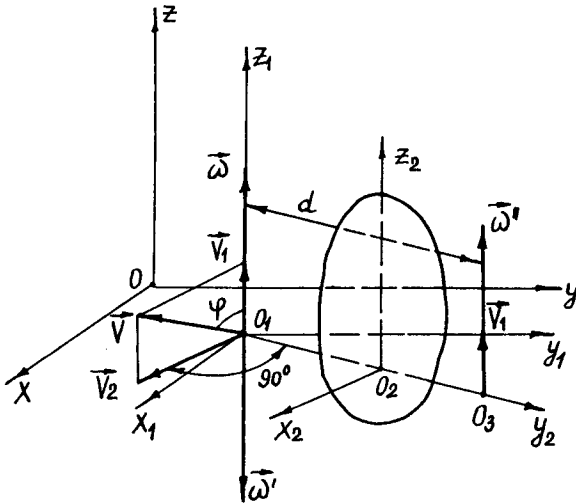


Рис. 13.17

тор \vec{V} на складові, подамо поступальний рух твердого тіла як сукупність двох поступальних рухів зі швидкостями \vec{V}_1 і \vec{V}_2 . При цьому вектор \vec{V}_1 паралельний вектору $\vec{\omega}$, а вектор \vec{V}_2 перпендикулярний до вектора $\vec{\omega}$.

Поступальний рух тіла зі швидкістю \vec{V}_2 можна замінити парою обертання ($\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}''$). Отже, маємо складний рух, що складається з чотирьох рухів: поступального зі швидкістю \vec{V}_1 і обертальних з кутовими швидкостями $\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}''$ і $\vec{\omega}$.

Оскільки обертальні рухи з кутовими швидкостями $\vec{\omega}'$ і $\vec{\omega}$ еквівалентні сполою (вектори $\vec{\omega}'$ і $\vec{\omega}$ рівні за модулем і напрямлені по одній прямій у протилежні боки), то з чотирьох рухів залишається тільки два, тобто поступальний рух зі швидкістю \vec{V}_1 і обертальний рух з кутовою швидкістю $\vec{\omega}''$. Як впливає з розгляду першого випадку, такий рух тіла зводиться до кінематичного гвинта. При цьому вісь гвинта лежить на відстані від осі O_1z_1 , що визначається за формулою

$$d = \frac{V_2}{\omega} = \frac{V \sin \varphi}{\omega}. \quad (13.56)$$

Крок гвинта

$$h = \frac{2\pi V \sin \varphi}{\omega}. \quad (13.57)$$

13.10. Методика та приклади розв'язання задач з кінематики складного руху точки і твердого тіла

При розв'язанні задач про складний рух точки слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) розкласти абсолютний рух точки на два складових рухи: переносний і відносний;

2) вибрати дві системи координат, одну з яких прийняти за нерухому, а другу — за рухому, яка здійснює заданий рух відносно нерухомої. Рухому систему координат зв'язуємо з рухомим твердим тілом або іншим суцільним середовищем;

3) уявно зупиняючи переносний рух, знайти швидкість і прискорення відносного руху точки за правилами кінематики точки;

4) уявно зупиняючи відносний рух, знайти швидкість і прискорення переносного руху точки як швидкість і прискорення тієї точки рухомої системи координат, незмінно зв'язаної з рухомим середовищем, з якою в даний момент часу збігається точка;

5) застосовуючи теорему про додавання швидкостей, визначити абсолютну швидкість точки;

6) за формулами (13.16) і (13.16а) визначити прискорення Кориоліса;

7) на підставі теореми про додавання прискорень визначити абсолютне прискорення точки. Абсолютне прискорення точки можна знайти геометрично як замикальну сторону багатокутника, побудованого на векторах відносного, переносного і кориолісового прискорень, або застосовувати для його визначення метод проєкцій.

Приклад 13.1. Робоче колесо повітродувки калорифера для досушування цукру має прямолінійні канали і обертається навколо осі Oz , перпендикулярної до площини рисунка (рис. 13.18). Повітря проходить каналами зі сталою відносною швидкістю \vec{V}_r .

Знайти проєкції абсолютної швидкості і прискорення на осі координат Ox і Oy для частинки повітря, яка міститься в точці C каналу AB , якщо канал AB утворює з радіусом OC кут 45° , $OC = 0,5$ м, кутова швидкість колеса

повітродувки $\omega = 4\pi \frac{1}{c}$, $V_r = 2$ м/с.

Розв'язання. З'ясуємо спочатку характер руху частинки повітря, яка міститься в точці C . Рух частинки повітря відносно нерухомої системи координат Oxy є абсолютним, рух частинки повітря вздовж каналу відносно колеса повітродувки, що обертається, — відносним, а рух точки C каналу колеса повітродувки — переносним.

Щоб знайти абсолютну швидкість частинки повітря, треба знайти її переносну швидкість. Оскільки переносний рух є обертальним навколо осі Oz , то вектор переносної швидкості \vec{V}_e буде перпендикулярним до радіуса обертання OC і напрямленим у бік обертання колеса. Величина переносної швидкості

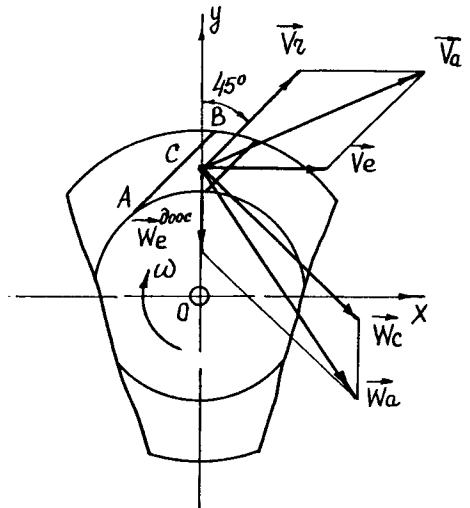


Рис. 13.18

$$V_e = \omega OC = 2\pi = 6,28 \text{ (м/с)}.$$

З рис. 13.18 безпосередньо знаходимо проекції абсолютної швидкості на осі координат:

$$V_{ax} = V_r \cos 45^\circ + V_e = 2 \cdot 0,707 + 6,28 = 7,7 \text{ (м/с)};$$

$$V_{ay} = V_r \sin 45^\circ = 2 \cdot 0,707 = 1,4 \text{ (м/с)}.$$

Застосовуючи теорему Коріоліса, знайдемо абсолютне прискорення.

Переносним прискоренням частинки повітря, яка міститься в точці C , буде прискорення точки C каналу. Оскільки точка C каналу колеса належить тілу, що обертається навколо нерухомої осі Oz , то переносне прискорення частинки повітря дорівнює сумі двох прискорень: обертального $\vec{W}_e^{об}$ і доосьового $\vec{W}_e^{доос}$. Через те що обертання колеса повітродувки рівномірне ($\omega = \text{const}$), обертальне прискорення дорівнює нулю.

Переносне прискорення точки C дорівнює доосьовому прискоренню:

$$W_e = W_e^{доос} = \omega^2 OC = (4\pi)^2 \cdot 0,5 = 78,9 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\vec{W}_e^{доос}$ показано на рис. 13.18.

Прискорення Коріоліса визначається за формулою (13.16 а). Модуль прискорення Коріоліса

$$W_c = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 4\pi \cdot 2 = 50,2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Визначимо напрям прискорення Коріоліса. Оскільки вектор \vec{V}_r перпендикулярний до $\vec{\omega}_e$ (\vec{V}_r лежить у площині xOy , а $\vec{\omega}_e$ перпендикулярний до цієї площини), то для визначення напрямку прискорення Коріоліса потрібно вектор \vec{V}_r повернути на кут 90° у площині xOy в напрямі переносного руху. Вектор \vec{W}_c лежатиме в площині xOy і буде напрямленим перпендикулярно до каналу AB .

Відносне прискорення W_r дорівнює нулю, тому що повітря проходить каналом із сталою швидкістю. Тепер знайдемо проекції абсолютного прискорення на осі Ox і Oy . Матимемо:

$$W_{ax} = W_c \cos 45^\circ = 50,2 \cdot 0,707 = 35,5 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{ay} = -W_e - W_c \sin 45^\circ = -78,9 - 50,2 \cdot 0,707 = -114,5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Приклад 13.2. Барабан 2 тістоподільної машини (рис. 13.19) від його завантажування до його розвантажування здійснює обертальний рух навколо нерухомої горизонтальної осі за законом $\varphi_e = t^2 - 0,96t$, де φ_e — в радіанах;

t — у секундах. Закон руху поршня 1 описується рівнянням $S_r = 18,25 \sin \frac{t}{4}$, де S_r — у сантиметрах; t — у секундах.

Визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M поршня 1 у момент часу $t = 1,5$ с, якщо $l_0 = 10$ см.

Розв'язання. З'ясуємо спочатку характер руху точки M . Рух точки M відносно нерухомої системи координат Oxy є абсолютним, рух точки M разом з поршнем відносно барабана, що обертається, — відносним, а рух точки M разом з барабаном — переносним.

Визначаємо положення точки M у момент часу $t = 1,5$ с на барабані:

$$\begin{aligned} S_r &= 18,25 \sin \frac{t}{4} = \\ &= 18,25 \sin \frac{1,5}{4} = \\ &= 18,25 \cdot 0,366 = 6,68 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Положення точки M зображено на рис. 13.20.

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму відносної та переносної швидкостей:

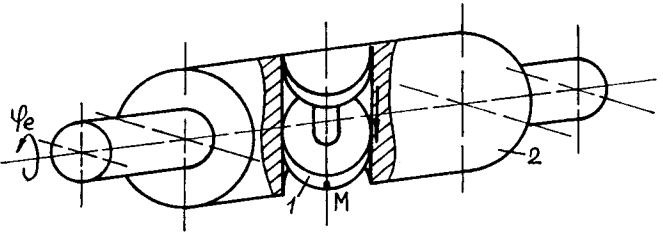
$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Оскільки відносний рух точки M є прямолінійним, то величину відносної швидкості точки визначаємо за формулою

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = \frac{d}{dt} \left(18,25 \sin \frac{t}{4} \right) = \frac{18,25}{4} \cos \frac{t}{4}.$$

У момент часу $t = 1,5$ с відносна швидкість точки M

$$V_r = \frac{18,25}{4} \cos \frac{1,5}{4} = 4,56 \cdot 0,93 = 4,24 \text{ (см/с)}.$$



a

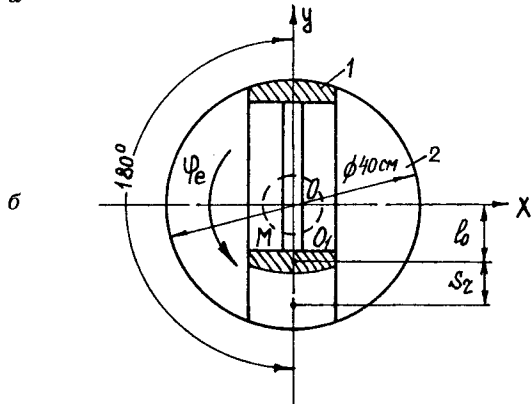


Рис. 13.19

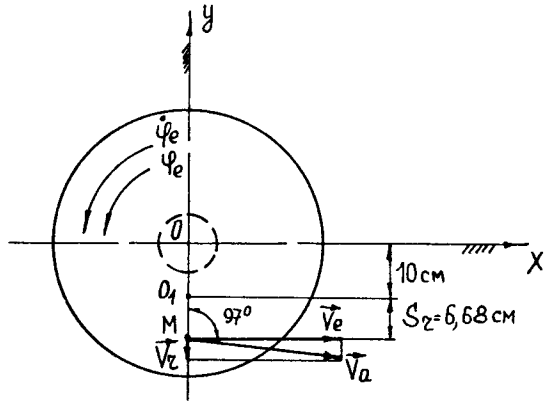


Рис. 13.20

Додатний знак V_r показує, що вектор \vec{V}_r напрямлений у бік зростання S_r (рис. 13.20).

Оскільки переносний рух є обертальним навколо осі Oz , то вектор переносної швидкості точки M буде перпендикулярним до радіуса обертання OM і напрямлений у бік обертання барабана.

Величина переносної швидкості точки M

$$V_e = \dot{\varphi}_e OM = (2t - 0,96) OM = 16,68(2t - 0,96),$$

де

$$\dot{\varphi}_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 0,96t) = 2t - 0,96 \left(\frac{1}{c}\right); \quad OM = 16,68 \text{ см.}$$

При $t = 1,5$ с маємо

$$V_e = 16,68(2t - 0,96) = 16,68(3 - 0,96) = 34,27 \text{ (см/с)}.$$

Оскільки вектори \vec{V}_r і \vec{V}_e взаємно перпендикулярні, то величина абсолютної швидкості визначається за формулою

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{4,24^2 + 34,27^2} = 34,53 \text{ (см/с)}.$$

Визначимо напрямні косинуси вектора \vec{V}_a (рис. 13.20):

$$\cos(\widehat{\vec{V}_a, x}) = \frac{V_{ax}}{V_a} = \frac{V_e}{V_a} = \frac{34,27}{34,53} = 0,9925; \quad (\widehat{\vec{V}_a, x}) = 7^\circ;$$

$$\cos(\widehat{\vec{V}_a, y}) = -\frac{V_{ay}}{V_a} = -\frac{V_r}{V_a} = -\frac{4,24}{34,53} = -0,1228; \quad (\widehat{\vec{V}_a, y}) = 97^\circ.$$

Застосовуючи теорему Коріоліса, знайдемо абсолютне прискорення точки M .

Величина відносного прискорення визначається за формулою

$$W_r = \frac{d^2 S_r}{dt^2} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4,56 \cos \frac{t}{4}\right) = -1,14 \sin \frac{t}{4}.$$

У момент часу $t = 1,5$ с відносне прискорення точки M

$$W_r = -1,14 \sin \frac{1,5}{4} = -0,418 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Від'ємний знак W_r показує, що вектор \vec{W}_r напрямлений протилежно вектору \vec{V}_r (див. рис. 13.20 і рис. 13.21), тобто рух точки M відносно барабана сповільнений.

Визначимо переносне прискорення точки M . Оскільки точку M при визначенні переносного прискорення розглядаємо як точку, що належить барабану, який обертається навколо нерухомої осі Oz , то переносне прискорення точки M дорівнює сумі двох прискорень: обертального $\vec{W}_e^{об}$ і доосьового $\vec{W}_e^{доос}$.

Величина переносного обертального прискорення визначається за формулою

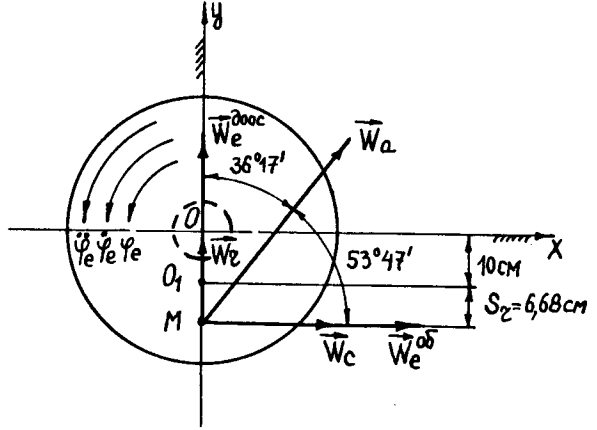


Рис. 13.21

$$W_e^{об} = \varepsilon_e \rho = \ddot{\varphi}_e OM = 2 \cdot 16,68 = 33,36 \text{ (см / с}^2\text{)},$$

де

$$\varepsilon_e = \ddot{\varphi}_e = \frac{d\dot{\varphi}_e}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 0,96) = 2 \left(\frac{1}{c^2} \right); OM = 16,68 \text{ (см)}.$$

Переносне обертальне прискорення точки M не залежить від часу t і напрямлене перпендикулярно до радіуса обертання OM у бік обертання (рис. 13.21).

Переносне доосьове прискорення визначається за формулою

$$W_e^{доос} = \omega_e^2 \rho = \dot{\varphi}_e^2 OM = (2t - 0,96)^2 OM.$$

При $t = 1,5$ с маємо

$$W_e^{доос} = (2t - 0,96)^2 16,68 = 69,4 \text{ (см / с}^2\text{)}.$$

Вектор $\vec{W}_e^{доос}$ має напрям до осі обертання барабана (рис. 13.21). Прискорення Кориоліса визначається за формулою

$$W_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r.$$

Величина прискорення Кориоліса

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 2\dot{\varphi}_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 2(2t - 0,96) 4,56 \cos \frac{t}{4},$$

де

$$\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 1.$$

При $t = 1,5$ с маємо

$$W_c = 2(3 - 0,96)4,56 \cos \frac{1,5}{4} = 17,3 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Визначимо напрям прискорення Кориоліса. Оскільки вектор \vec{V}_r перпендикулярний до $\vec{\omega}_e$ (\vec{V}_r лежить у площині xOy , а $\vec{\omega}_e$ перпендикулярний до \vec{V}_r), то для визначення напрямку прискорення Кориоліса потрібно вектор \vec{V}_r повернути на кут 90° у площині xOy в напрямі переносного руху. Вектор \vec{W}_c лежатиме в площині xOy і буде напрямлений перпендикулярно до радіуса OM (рис. 13.21).

Тепер знайдемо проекції абсолютного прискорення на осі Ox і Oy (рис. 13.21). Матимемо:

$$W_{ax} = W_c + W_e^{ob} = 17,3 + 33,36 = 50,66 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$W_{ay} = W_r + W_e^{доос} = 0,418 + 69,4 = 69,82 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Величина абсолютного прискорення точки M визначається за формулою

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{50,66^2 + 69,82^2} = 385,6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Напрявні косинуси вектора абсолютного прискорення точки такі:

$$\cos(\widehat{W_a, x}) = \frac{W_{ax}}{W_a} = \frac{50,66}{385,6} = 0,5918; \quad (\widehat{W_a, x}) = 53^\circ 43';$$

$$\cos(\widehat{W_a, y}) = \frac{W_{ay}}{W_a} = \frac{69,82}{385,6} = 0,8061; \quad (\widehat{W_a, y}) = 36^\circ 17'.$$

Вектор \vec{W}_a зображено на рис. 13.21.

Розглянемо приклади розв'язання задач про додавання рухів твердого тіла. При цьому обмежуємося тільки випадками додавання обертальних рухів навколо осей, що перетинаються в одній точці, і паралельних осей.

При розв'язанні задач про додавання обертань навколо осей, що перетинаються в одній точці, можна застосувати два способи.

Спосіб I. За відомими кутовими швидкостями переносного і відносного обертань необхідно визначити абсолютну кутову швидкість тіла і далі дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) визначити положення миттєвої осі;
- 2) знайти миттєве кутове прискорення тіла;
- 3) визначити шукані швидкості точок тіла за величиною і за напрямом;
- 4) знайти обертальне і доосьове прискорення довільної точки тіла;
- 5) визначити шукані прискорення точок тіла за величиною і за напрямом.

Приклад розв'язання задачі про додавання обертань навколо осей, що перетинаються в одній точці, способом I наведений в параграфі 12.15 (приклад 12.10).

Спосіб II. Рекомендується така послідовність дій:

1) вибрати нерухому систему відліку так, щоб її вісь Oz збіглася з вектором переносної кутової швидкості $\vec{\omega}_e$, а рухому систему відліку — так, щоб вісь O_1z_1 збіглася з вектором відносної кутової швидкості $\vec{\omega}_r$;

2) за відомими кутовими швидкостями відносного і переносного рухів визначити абсолютну кутову швидкість тіла;

3) визначити шукані швидкості точок тіла у відносному і переносному обертаннях і далі — шукані абсолютні швидкості;

4) знайти переносне, відносне і прискорення Кориоліса і далі — шукані абсолютні прискорення точок твердого тіла шляхом векторного додавання або додавання за допомогою методу проекцій.

Приклад 13.3. Кран обертається навколо вертикальної осі зі ста-

люю кутовою швидкістю $\omega_1 = 1 \frac{1}{c}$

(рис. 13.22). Стріла крана піднімається зі сталою кутовою

швидкістю $\omega_2 = 1 \frac{1}{c}$. Знайти

швидкість і прискорення кінця

стріли в момент, коли стріла нахи-

лена до горизонту під кутом

$\alpha = 30^\circ$, якщо довжина стріли

$OA = 8$ м.

Розв'язання. Стріла крана бере

участь одночасно у двох обертаннях.

Обертання навколо нерухомої осі

Oz буде переносним. Кутова

швидкість переносного обертання

$$\omega_e = \omega_1.$$

Зв'яжемо з краном рухому систему відліку $Ox_1y_1z_1$. Підйом стріли, тобто її обертання навколо осі Ox_1 , буде відносним рухом стріли. Кутова швидкість відносно обертання

$$\omega_r = \omega_2.$$

Знаходимо абсолютну кутову швидкість стріли:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

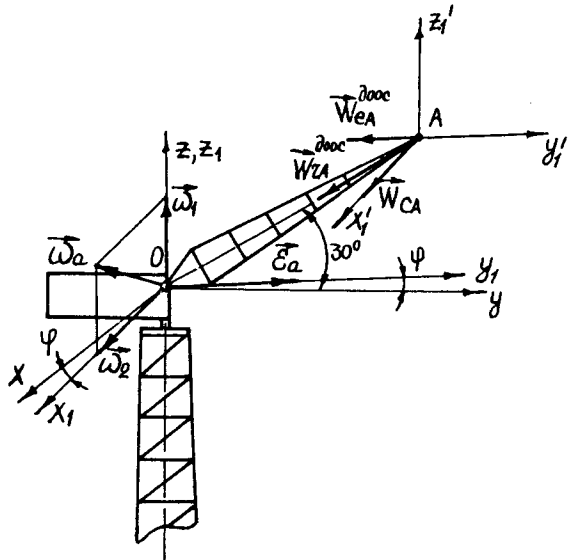


Рис. 13.22

Оскільки вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ взаємно перпендикулярні, то маємо

$$\omega_a = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{c} \right).$$

Визначаємо абсолютне кутове прискорення стріли. На підставі формули (13.36) маємо

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a.$$

З векторного добутку випливає, що вектор $\vec{\varepsilon}_a$ напрямлений так, як показано на рис. 13.22.

Величина абсолютного кутового прискорення

$$\varepsilon_a = \omega_e \omega_a \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{\omega}_a}) = \omega_1 \omega_a \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1 \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Визначаємо абсолютну швидкість точки А стріли. На підставі теореми про додавання швидкостей маємо

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{\omega}_2 \times \vec{O\bar{A}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{O\bar{A}} = \vec{\omega}_a \times \vec{O\bar{A}}.$$

Розкладемо векторний добуток $\vec{\omega}_a \times \vec{O\bar{A}}$ по осях рухомої системи відліку $Ox_1y_1z_1$:

$$\begin{aligned} \vec{V}_a = \vec{\omega}_a \times \vec{O\bar{A}} &= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \omega_{ax_1} & \omega_{ay_1} & \omega_{az_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (\omega_{ay_1} z_1 - \omega_{az_1} y_1) \vec{i}_1 + \\ &+ (\omega_{az_1} x_1 - \omega_{ax_1} z_1) \vec{j}_1 + (\omega_{ax_1} y_1 - \omega_{ay_1} x_1) \vec{k}_1. \end{aligned}$$

З рис. 13.22 випливає, що проекції векторів $\vec{\omega}_a$ і $\vec{O\bar{A}}$ на осі рухомої системи відліку такі:

$$\begin{aligned} \omega_{ax_1} &= \omega_2 = 1; \quad \omega_{ay_1} = 0; \quad \omega_{az_1} = \omega_1 = 1; \\ x_1 &= 0; \quad y_1 = 8 \cos 30^\circ = 6,93; \quad z_1 = 8 \sin 30^\circ = 4. \end{aligned}$$

Підставляючи ці значення в останню формулу, здобудемо

$$\vec{V}_a = -6,93 \vec{i}_1 - 4 \vec{j}_1 + 6,93 \vec{k}_1.$$

Величина вектора \vec{V}_a

$$V_a = \sqrt{(-6,93)^2 + (-4)^2 + 6,93^2} = 10,58 \text{ (м/с)}.$$

Визначаємо абсолютне прискорення точки A стріли. На підставі теореми про додавання прискорень маємо

$$\vec{W}_a = \vec{W}_{rA} + \vec{W}_{eA} + \vec{W}_{cA}.$$

Вектор відносного прискорення точки A

$$\vec{W}_{rA} = \vec{W}_{rA}^{\text{дооc}} + \vec{W}_{rA}^{\text{об}}.$$

Оскільки $\vec{\varepsilon}_r = \frac{d\vec{\omega}_r}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{0}$, то

$$\vec{W}_{rA} = \vec{W}_{rA}^{\text{дооc}}.$$

Вектор $\vec{W}_{rA}^{\text{дооc}}$ зображено на рис. 13.22.

Величина вектора $\vec{W}_{rA}^{\text{дооc}}$

$$W_{rA}^{\text{дооc}} = \omega_2^2 OA = 1^2 \cdot 8 = 8 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор переносного прискорення точки A

$$\vec{W}_{eA} = \vec{W}_{eA}^{\text{дооc}} + \vec{W}_{eA}^{\text{об}}.$$

Оскільки $\vec{\varepsilon}_e = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} = \vec{0}$, то

$$\vec{W}_{eA} = \vec{W}_{eA}^{\text{дооc}}.$$

Вектор $\vec{W}_{eA}^{\text{дооc}}$ показано на рис. 13.22.

Величина вектора $\vec{W}_{eA}^{\text{дооc}}$

$$W_{eA}^{\text{дооc}} = \omega_1^2 OA \sin 60^\circ = 1^2 \cdot 8 \cdot 0,866 = 6,93 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор прискорення Коріоліса точки A

$$\vec{W}_{cA} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_{rA}$$

і напрямлений так, як зображено на рис. 13.22.

Величина вектора \vec{W}_{cA}

$$W_{cA} = 2\omega_e V_{rA} \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_{rA}) = 2\omega_1 \omega_2 OA \sin 30^\circ = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 0,5 = 8 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Абсолютне прискорення точки A знайдемо за формулою

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{W_{ax_1}^2 + W_{ay_1}^2 + W_{az_1}^2} = \sqrt{W_{cA}^2 + (W_{rA}^{\text{дооc}} \cos 30^\circ + W_{eA}^{\text{дооc}})^2 + (-W_{rA}^{\text{дооc}} \sin 30^\circ)^2} = \\ &= \sqrt{8^2 + (8 \cdot 0,866 + 6,93)^2 + 4^2} = 16,5 \text{ (м/с}^2\text{)}, \end{aligned}$$

де W_{ax_1} , W_{ay_1} , W_{az_1} — проєкції вектора \vec{W}_a на осі системи координат $Ax'_1y'_1z'_1$. Система координат $Ax'_1y'_1z'_1$ паралельна системі $Ox_1y_1z_1$.

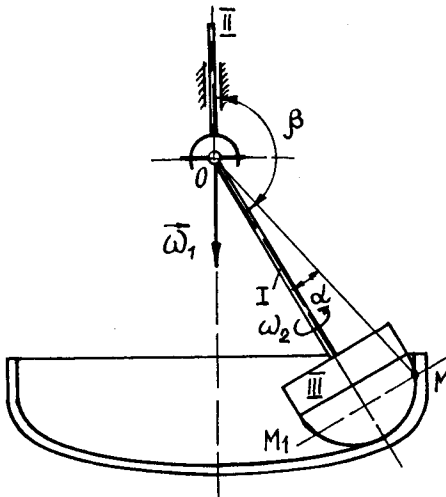


Рис. 13.23

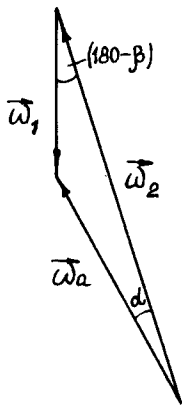


Рис. 13.24

Приклад 13.4. У механізмі маятникового млина вал I з'єднаний з ведучим валом II за допомогою шарніра Гука (рис. 13.23). На кінці вала I жорстко закріплений бігун III. При достатній кількості обертів ведучого вала II бігун притискується до стінки циліндричної чашки так, що котиться по чашці без ковзання. Кут між валом I і валом II дорівнює β .

Знайти кутову швидкість $\bar{\omega}_2$ обертання бігуна III навколо його осі симетрії, якщо відома кутова швидкість вала II $\bar{\omega}_1$.

Розв'язання. Розглядаємо рух бігуна як складний рух. Він складається з обертання навколо вертикальної осі й обертання навколо осі симетрії. Обертання бігуна навколо вертикальної осі приймаємо за переносне: $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_e$, а обертання навколо осі симетрії — за відносне: $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_r$. Визначаємо положення миттєвої осі обертання — це лінія, що сполучає дві нерухомі точки O і M . Уздовж лінії OM напрямлений вектор абсолютної миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}_a$. Вектор переносної кутової швидкості $\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_1$ має напрям уздовж осі вала II.

Вектор відносної кутової швидкості $\bar{\omega}_r = \bar{\omega}_2$ має напрям уздовж осі вала I.

На підставі рівності (13.27) ($\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$) побудуємо трикутник кутових швидкостей (рис. 13.24).

З трикутника на підставі теореми синусів матимемо

$$\frac{\omega_1}{\sin \alpha} = \frac{\omega_2}{\sin [180^\circ - \alpha - (180 - \beta)]},$$

або

$$\frac{\omega_1}{\sin \alpha} = \frac{\omega_2}{\sin (\beta - \alpha)},$$

звідки

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Розв'язання задач про додавання обертальних рухів навколо паралельних осей ґрунтується на положеннях, що були розглянуті в параграфах 13.7 і 13.8. При цьому доцільно застосовувати або метод миттєвих осей, або метод зупинки. Приклад застосування методу зупинки розглянуто в параграфі 13.8. Застосування методу миттєвих осей проілюструємо таким прикладом.

Приклад 13.5. У редукторі швидкостей (рис. 13.25) кривошип OC обертається з кутовою швидкістю $n = 720$ об/хв, рухомі шестерні 2 і 3 обертаються навколо власних осей відносно кривошипа у тому самому напрямі з кутовою швидкістю $n_2 = n_3 = 240$ об/хв.

Визначити радіус r_1 нерухомого колеса 1 і кутову швидкість обертання вала II, якщо $OC = 240$ мм, $r_4 = 40$ мм.

Розв'язання. Рухомі шестерні 2 і 3 здійснюють складний рух. Вони обертаються навколо осі MN відносно кривошипа OC і разом з ним обертаються навколо осі I.

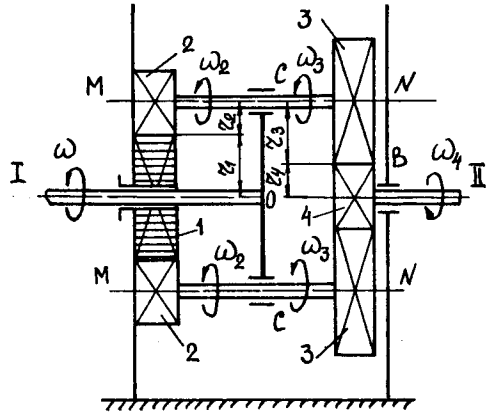


Рис. 13.25

Радіус r_1 нерухомого колеса 1 знайдемо з умови, що миттєва вісь абсолютного обертання шестерень 2 і 3 проходить через точку дотику шестерень 1 і 2, паралельно осі MN .

На підставі співвідношення (13.40) маємо

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Оскільки $r_2 = OC - r_1$, то з цього співвідношення матимемо

$$r_1 = \frac{OC\omega_2}{\omega + \omega_2}.$$

Оскільки між кутовою швидкістю ω і кутовою швидкістю n існує залежність $\omega = \frac{\pi n}{30}$, з останньої рівності знайдемо

$$r_1 = \frac{OC\omega_2}{\omega + \omega_2} = \frac{OCn_2}{n + n_2} = \frac{240 \cdot 240}{720 + 240} = 60 \text{ (мм)}.$$

Абсолютна кутова швидкість ω_a шестерень 2 і 3 при обертанні навколо миттєвої осі на підставі формули (13.4)

$$\omega_a = \omega + \omega_2.$$

Замінюючи ω_1 на n_1 , здобудемо

$$n_a = n + n_2 = 720 + 240 = 960 \text{ (об / хв)}.$$

Визначаємо кутову швидкість шестірні 4. Оскільки абсолютні швидкості точки дотику шестерень 3 і 4, тобто точки B , рівні, то матимемо

$$\omega_a d = \omega_4 r_4,$$

де $d = r_1 - r_4$.

Замінюючи в цій рівності ω_1 на n_1 і розв'язуючи її відносно n_4 , здобудемо

$$n_4 = \frac{n_a (r_1 - r_4)}{r_4} = \frac{960 (60 - 40)}{40} = 480 \text{ (об / хв)}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що таке складний рух точки?
2. Який рух точки називається абсолютним?
3. Який рух точки називається відносним?
4. Який рух точки називається переносним?
5. Які застосовуються системи координат для дослідження складного руху точки?
6. Як визначити відносну і переносну швидкість точки в складному русі?
7. Як формулюється теорема про додавання швидкостей у складному русі точки?
8. Як формулюється теорема про додавання прискорень у складному русі точки?
9. Як визначити прискорення точок, що здійснюють складний рух, у тому випадку, коли переносний рух є поступальним?
10. Як визначити прискорення точки у тому випадку, коли переносний рух є обертальним?
11. Як визначити за величиною і напрямом прискорення Коріоліса?
12. В яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
13. Як можна визначити напрям прискорення Коріоліса, коли вектор $\vec{\omega}_e$ перпендикулярний до вектора \vec{V}_r ?
14. Що таке складний рух твердого тіла?
15. Яким буде абсолютний рух твердого тіла, якщо воно бере участь у кількох поступальних рухах?
16. Яким буде абсолютний рух твердого тіла, якщо воно обертається навколо осей, що перетинаються в одній точці?
17. Як визначити абсолютну кутову швидкість обертання твердого тіла, якщо воно обертається навколо кількох осей, що перетинаються в одній точці?

18. За якою формулою визначається абсолютне кутове прискорення твердого тіла при його обертанні навколо двох осей, що перетинаються в одній точці?

19. Що таке обертальне кутове прискорення і як його визначити?

20. Який абсолютний рух буде мати тверде тіло при додаванні обертань навколо паралельних осей у тому випадку, коли кутові швидкості обертань не рівні, а їх вектори напрямлені в один бік?

21. Що таке пара обертань і якого руху вона надає тілу?

22. Який абсолютний рух буде мати тверде тіло при додаванні обертань навколо паралельних осей у тому випадку, коли кутові швидкості обертань не рівні, а їх вектори мають протилежний напрям?

23. У чому сутність методу зупинки?

24. Який рух твердого тіла називається гвинтовим?

25. Який абсолютний рух буде мати тверде тіло при додаванні поступального і обертального рухів тіла у тому випадку, коли вектори поступальної швидкості тіла \vec{V} і кутової швидкості $\vec{\omega}$ взаємно перпендикулярні?

26. Який абсолютний рух буде мати тверде тіло при додаванні поступального й обертального рухів тіла у тому випадку, коли вектор швидкості поступального руху тіла напрямлений під кутом до вектора кутової швидкості обертального руху тіла?

27. Які аналогії є між статикою і кінематикою?

Глава 14

ТИПОВІ ЗАДАЧІ КІНЕМАТИКИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ ПРОРОБКИ ТА САМОКОНТРОЛЮ¹

14.1. Кінематика точки

Задача 14.1. Дано рівняння руху точки $x = 3t - 5$ см, $y = 4 - 2t$ см. Знайти траєкторію в координатній формі й указати на рисунку напрям руху.

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху час t (з першого рівняння визначаємо значення t і підставляємо в друге рівняння), дістанемо

$$2x + 3y - 2 = 0.$$

Отже, траєкторія руху точки — півпряма (рис. 14.1).

Задача 14.2. Дано рівняння руху точки $x = 5 \sin 10t$ см, $y = 3 \cos 10t$ см. Знайти траєкторію в координатній формі й указати на рисунку напрям руху.

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху час t (визначаємо $\sin 10t$ та $\cos 10t$ і підставляємо в рівність $\sin^2 10t + \cos^2 10t = 1$), дістанемо

$$\frac{x^2}{5^2} = \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Отже, траєкторія руху точки — еліпс (рис. 14.2).

Задача 14.3. Дано рівняння руху точки $x = a \cos^2 t$ см, $y = a \sin^2 t$ см. Знайти рівняння її траєкторії, а також указати закон руху точки по траєкторії, відраховуючи відстань від початкового положення точки.

¹ Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986. — 448 с.

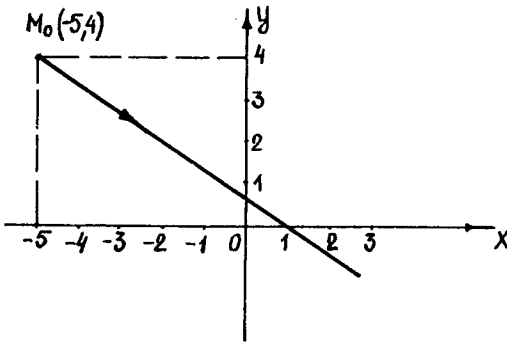


Рис. 14.1

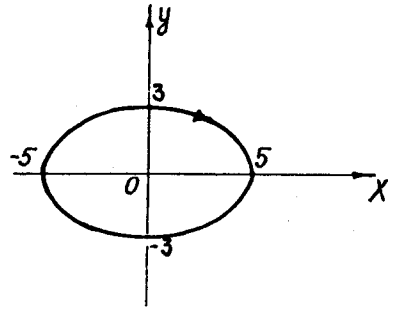


Рис. 14.2

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху час t (визначаємо $\cos^2 t$ та $\sin^2 t$ і підставляємо в рівність $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$), дістанемо

$$x + y - a = 0.$$

Отже, траєкторія руху точки — відрізок прямої (рис. 14.3). Закон руху точки по траєкторії знаходимо за формулою

$$S = \int_0^t \sqrt{x^2 + y^2} dt = a\sqrt{2} \int_0^t \sin 2t dt = a\sqrt{2} \sin^2 t \text{ (см)}.$$

Задача 14.4. Дано рівняння руху точки $x = 3 \sin t$ см, $y = 3 \cos t$ см. Знайти рівняння її траєкторії, а також указати закон руху точки по траєкторії, відраховуючи відстань від початкового положення точки.

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху час t (визначаємо $\sin^2 t$ та $\cos^2 t$ і підставляємо в рівність $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$), дістанемо

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

Отже, траєкторія руху точки — коло радіуса $R = 3$ см (рис. 14.4).

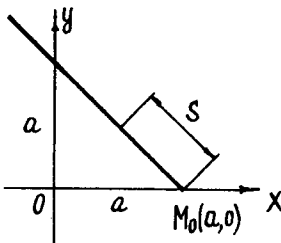


Рис. 14.3

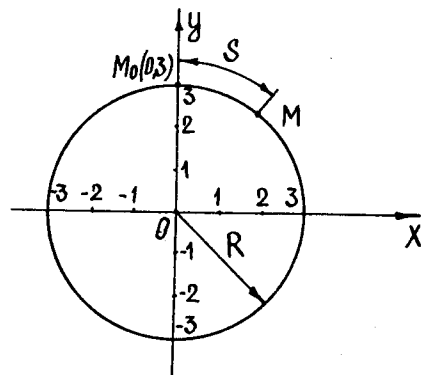


Рис. 14.4

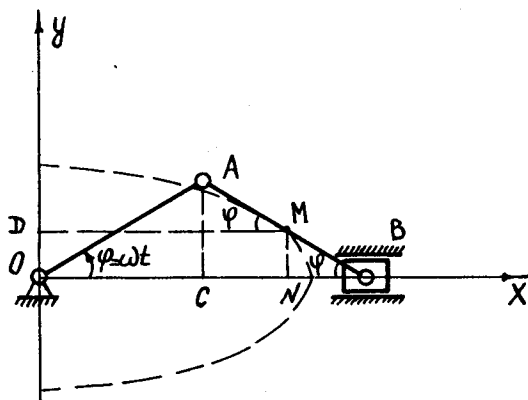


Рис. 14.5

Закон руху точки по траєкторії знаходимо за формулою

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 3t \text{ (см)}.$$

Задача 14.5. Кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с. Довжина $OA = AB = 80$ см (рис. 14.5).

Знайти рівняння руху і траєкторію середньої точки M шатуна.

Розв'язання. У довільному положенні механізму визначаємо координати точки M як функції часу:

$$x_M = 120 \cos \omega t \text{ см};$$

$$y_M = 40 \sin \omega t \text{ см}.$$

Виключаючи з рівнянь руху точки M час t (визначаємо $\cos^2 \omega t$ та $\sin^2 \omega t$ і підставляємо в рівність $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$), дістанемо

$$\frac{x_M^2}{120^2} + \frac{y_M^2}{40^2} = 1.$$

Отже, траєкторія руху точки M — еліпс.

Задача 14.6. Кінці лінійки AB рухаються по двох взаємно перпендикулярних прямих NL і KM , при цьому $\varphi = \omega t$ (рис. 14.6).

Знайти рівняння руху точки C , якщо $AC = a$ і $CB = b$, а також її траєкторію.

Розв'язання. У довільному положенні механізму визначаємо координати точки C як функції часу:

$$x_C = a \cos \omega t \text{ см};$$

$$y_C = b \sin \omega t \text{ см}.$$

Виключаємо з рівнянь руху точки C час t (визначаємо $\cos^2 \omega t$ та $\sin^2 \omega t$ і підставляємо в рівність $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$), дістанемо

$$\frac{x_C^2}{a^2} + \frac{y_C^2}{b^2} = 1.$$

Отже, траєкторія руху точки — еліпс.

Задача 14.7. Визначити рівняння руху і траєкторію точки обода автомобільного колеса з радіусом $R = 1$ м, якщо автомобіль рухається по прямолі-

нійному шляху зі сталою швидкістю 20 м/с. Припустити, що колесо котиться без ковзання; за початок координат взяти початкове положення точки на шляху, який прийняти за вісь Ox .

Розв'язання. У довільному положенні колеса (рис. 14.7) визначаємо координати точки M як функції часу:

$$x_M = OB - AB = \overset{\smile}{MB} - AB = R\varphi - R \sin \varphi = 20t - \sin 20t \text{ (м)};$$

$$y_M = R - O_1C = R - R \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi) = 1 - \cos 20t \text{ (м)},$$

де $\varphi = \frac{Vt}{R} = Vt = 20t$ (рад).

Отже, траєкторія руху точки обода колеса — циклоїда.

Задача 14.8. Дано рівняння руху точки $x = 2a \cos^2\left(\frac{kt}{2}\right)$ см, $y = a \sin kt$ см, де a і k — додатні сталі. Визначити траєкторію і закон руху точки по траєкторії, відраховуючи відстань від початкового положення точки.

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху час t (визначаємо $\sin^2 kt$ та $\cos^2 kt$ і підставляємо в рівність $\sin^2 kt + \cos^2 kt = 1$), дістанемо

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Отже, траєкторія руху точки — коло, що має радіус a (рис. 14.8).

Закон руху точки по траєкторії знаходимо за формулою

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^t \sqrt{(-ak \sin kt)^2 + (ak \cos kt)^2} dt = akt \text{ (см)}.$$

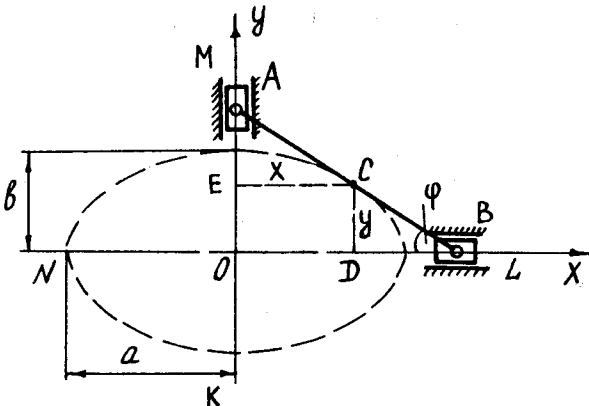


Рис. 14.6

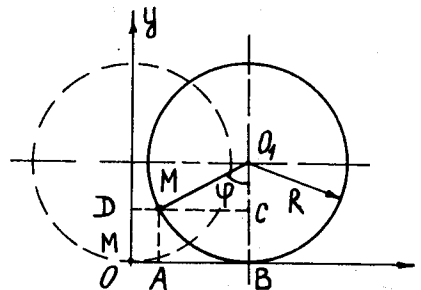


Рис. 14.7

Задача 14.9. За умовою задачі 14.8 визначити рівняння руху точки в полярних координатах.

Розв'язання. Зв'язок між декартовими та полярними координатами (рис. 14.9) має вигляд:

$$x = r \cos \varphi;$$

$$y = r \sin \varphi,$$

звідки дістанемо

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(2a \cos^2 \left(\frac{kt}{2}\right)\right)^2 + (a \sin kt)^2} = 2a \cos \left(\frac{kt}{2}\right).$$

Оскільки $x = r \cos \varphi$, то

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{2a \cos^2 \left(\frac{kt}{2}\right)}{2a \cos \left(\frac{kt}{2}\right)} = \cos \left(\frac{kt}{2}\right) \text{ і } \varphi = \frac{kt}{2}.$$

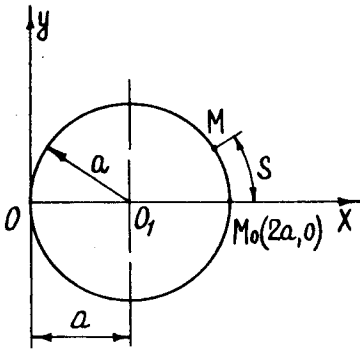


Рис. 14.8

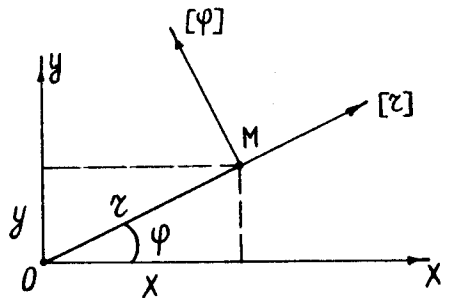


Рис. 14.9

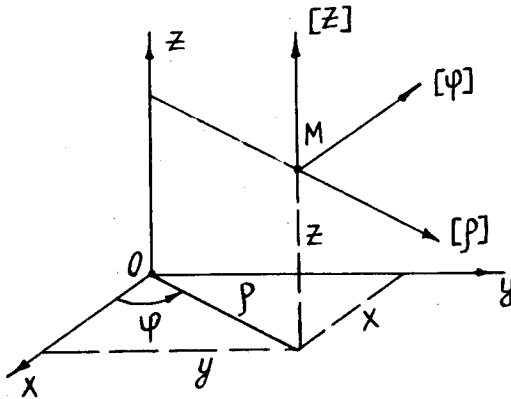


Рис. 14.10

Задача 14.10. Точка рухається по гвинтовій лінії $x = a \cos kt$, $y = a \sin kt$, $z = vt$. Визначити рівняння руху точки в циліндричній системі координат.

Розв'язання. Зв'язок між декартовими та циліндричними координатами (рис. 14.10) має вигляд:

$$x = \rho \cos \varphi;$$

$$y = \rho \sin \varphi;$$

$$z = z,$$

звідки дістанемо

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} = a.$$

Оскільки $x = \rho \cos \varphi$, то

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{a \cos kt}{a} = \cos kt \text{ і } \varphi = kt; \quad z = vt.$$

Задача 14.11. Дано рівняння руху точки у декартовій системі координат

$$x = R \cos^2 \left(\frac{kt}{2} \right), \quad y = \left(\frac{R}{2} \right) \sin kt, \quad z = R \sin \left(\frac{kt}{2} \right).$$

Знайти траєкторію руху точки і рівняння її руху в сферичній системі координат.

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху час t (піднесемо рівняння руху до квадрата і додамо їх), дістанемо

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{R^2}{4} (1 + \cos kt)^2 + \frac{R^2}{4} \sin^2 kt + R^2 \left(\frac{1 - \cos kt}{2} \right) = R^2.$$

Виключаючи з рівнянь $x = R \cos^2 \left(\frac{kt}{2} \right)$ і $y = \frac{R}{2} \sin kt$ час t (визначаємо $\cos^2 kt$ та $\sin^2 kt$ і підставляємо в рівність $\cos^2 kt + \sin^2 kt = 1$), дістанемо

$$\left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Отже, траєкторія руху точки — лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і циліндра

$$\left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Зв'язок між декартовими та сферичними координатами має вигляд (рис. 14.11):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi;$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi;$$

$$z = r \cos \theta,$$

звідки дістанемо

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = r^2.$$

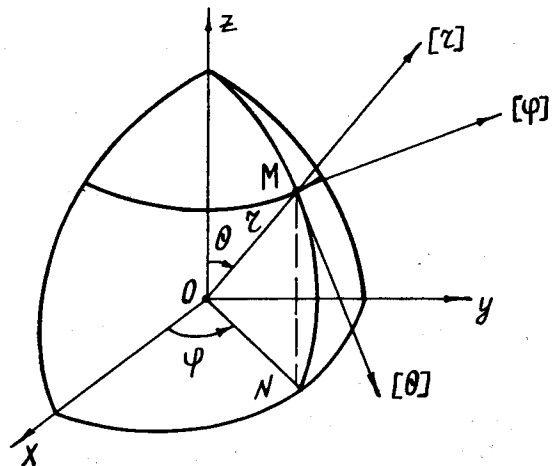


Рис. 14.11

Оскільки $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то $r = R$.

Оскільки

$$z = R \cos \theta = R \sin (90^\circ - \theta),$$

або

$$R \sin \frac{kt}{2} = R \sin (90^\circ - \theta),$$

то $\theta = 90^\circ - \frac{kt}{2}$.

Оскільки

$$x = R \sin \left(90^\circ - \frac{kt}{2} \right) \cos \varphi = R \cos \frac{kt}{2} \cos \varphi,$$

або

$$R \cos^2 \left(\frac{kt}{2} \right) = R \cos \left(\frac{kt}{2} \right) \cos \varphi,$$

то $\varphi = \frac{kt}{2}$.

Задача 14.12. Дано рівняння руху точки $x = 3 \sin t$, $y = 2 \cos 2t$ (t — у секундах). Знайти траєкторію в координатній формі й указати напрям руху точки в різні моменти часу. Вказати також найближчий після початку руху момент часу t_1 , коли траєкторія перетинає вісь Ox .

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху час t (визначаємо $\sin^2 t$ та $\cos^2 t$ і підставляємо в рівність $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$), дістанемо

$$4x^2 + 9y = 18.$$

Отже, траєкторія руху точки — частина параболи (рис. 14.12).

Визначаємо t_1 . З рис. 14.12 випливає, що при $y = 0$ $x = \sqrt{\frac{18}{4}} = 2,12$. Тоді

з рівняння $x = 3 \sin t_1$ здобудемо $\sin t_1 = \frac{x}{3} = 0,707$, звідки $t_1 = \frac{\pi}{4}$ с.

Задача 14.13. Камінь рухається у площині xOy (рис. 14.13). Рівняння

руху каменя мають вигляд $x = V_0 \cos \alpha_0 \cdot t$, $y = V_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, де V_0 — величина початкової швидкості каменя; α_0 — кут нахилу вектора початкової швидкості каменя \vec{V}_0 до горизонту.

Визначити траєкторію руху каменя і кут кидання каменя, за якого дальність польоту каменя буде максимальною. Знайти також висоту і час польоту.

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху каменя час t (з першого рівняння визначаємо значення t і підставляємо в друге рівняння), дістанемо

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{x^2 g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0}.$$

Отже, траєкторія руху каменя — парабола (рис. 14.13).

Час польоту каменя визначаємо з умови, що $y = 0$:

$$V_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

звідки $t = \frac{2V_0 \sin \alpha_0}{g}$.

Дальність польоту визначаємо за формулою

$$x = V_0 \cos \alpha_0 \cdot t = V_0 \cos \alpha_0 \cdot \frac{2V_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

Максимальна дальність польоту каменя при $\alpha = 45^\circ$, тобто

$$x_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Висота підйому каменя визначається з умови, що $y = y_{\max}$:

$$\frac{d}{dx} \left(x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{x^2 g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0} \right) = 0,$$

звідки

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g}.$$

Тоді при $\alpha_0 = 45^\circ$ з рівняння $y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{x^2 g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0}$ дістанемо

$$y_{\max} = \frac{V_0^2}{4g}.$$

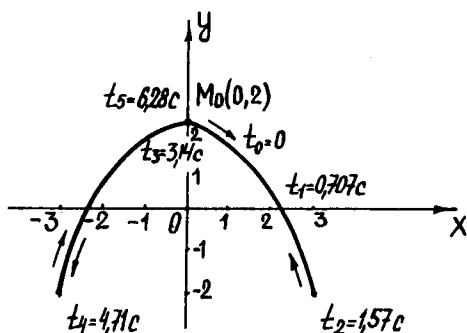


Рис. 14.12

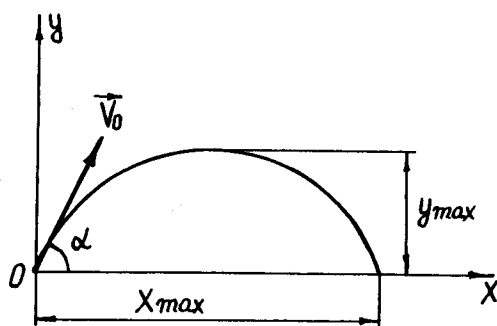


Рис. 14.13

Задача 14.14. Дано рівняння руху точки $x = V_0 t \cos \alpha_0$, $y = V_0 t \sin \alpha_0 - \frac{gt^2}{2}$, при цьому $V_0 = 20$ м/с, $\alpha_0 = 60^\circ$, $g = 9,81$ м/с².

Знайти, з якою швидкістю \vec{V}_1 має вийти з початку координат у момент часу $t = 0$ друга точка, щоб, рухаючись рівномірно вздовж осі Ox , зустрівся з першою точкою. Визначити також відстань до місця зустрічі (рис. 14.14).

Розв'язання. Виключаючи з рівнянь руху точки час t (з першого рівняння визначаємо значення t і підставляємо в друге рівняння), дістанемо

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{x^2 g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0}.$$

Отже, траєкторія руху точки — парабола.

За умовою, що $y = 0$, визначаємо час руху точки:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{x^2 g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0} = 0,$$

звідки

$$t = \frac{2V_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \sin 60^\circ}{9,81} = 3,53 \text{ (с)}.$$

На підставі рівності $x = V_0 t \cos \alpha_0$ визначаємо відстань x_1 :

$$x_1 = V_0 t \cos \alpha_0 = 20 \cdot 3,53 \cdot 0,5 = 35,3 \text{ (м)}.$$

Оскільки друга точка рухається рівномірно, то

$$V_1 = \frac{x_1}{t} = \frac{35,3}{3,53} = 10 \text{ (м/с)}.$$

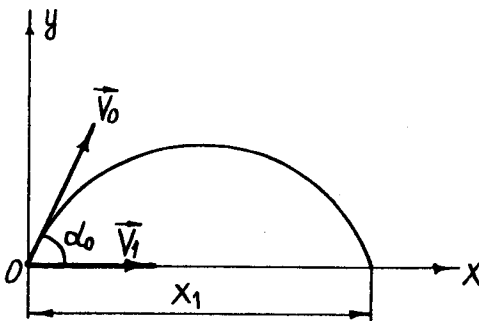


Рис. 14.14

Задача 14.15. Дано рівняння руху точки $x = \cos \pi t$, $y = \sin \frac{\pi t}{2}$ (x, y — в сантиметрах, t — у секундах). Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки.

Розв'язання. Виключаючи з рівняння руху точки час t (визначаємо $\sin \frac{\pi t}{2}$

та $\cos \pi t$ і підставляємо в рівність $\sin \frac{\pi t}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi t}{2}}$), дістанемо

$$x = 1 - 2y^2.$$

Отже, траєкторія руху точки — частина параболи (рис. 14.15).

Швидкість точки

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-\pi \sin \pi t)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \sqrt{16 \sin^2 \frac{\pi t}{2} + 1} \quad (\text{см/с}).$$

Напрямні косинуси вектора \vec{V} такі:

$$\cos(\widehat{\vec{V}, x}) = \frac{\dot{x}}{V} = -\frac{4 \sin \frac{\pi t}{2}}{\sqrt{16 \sin^2 \frac{\pi t}{2} + 1}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{V}, y}) = \frac{\dot{y}}{V} = \frac{1}{\sqrt{16 \sin^2 \frac{\pi t}{2} + 1}}.$$

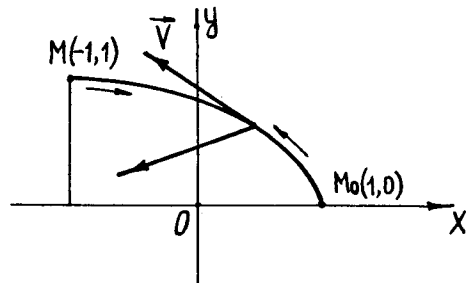


Рис. 14.15

Прискорення точки

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-\pi^2 \cos \pi t)^2 + \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi t}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{16 \cos^2 \pi t + \sin^2 \frac{\pi t}{2}} \quad (\text{см/с}^2).$$

Напрямні косинуси вектора \vec{W} такі:

$$\cos(\widehat{\vec{W}, x}) = \frac{\ddot{x}}{W} = -\frac{4 \cos \pi t}{\sqrt{16 \cos^2 \pi t + \sin^2 \frac{\pi t}{2}}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}, y}) = \frac{\ddot{y}}{W} = -\frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{\sqrt{16 \cos^2 \pi t + \sin^2 \frac{\pi t}{2}}}.$$

Задача 14.16. Колесо, що має радіус $R = 0,5$ м, котиться по прямо-лінійній рейці без ковзання рівно-мірно зі швидкістю центра колеса $V_c = 6$ м/с. Знайти рівняння руху точки M обода колеса, якщо у початковий момент руху колеса вона розміщувалась у початку координат Oxy (рис. 14.16). Визначити також швид-кість і прискорення точки M .

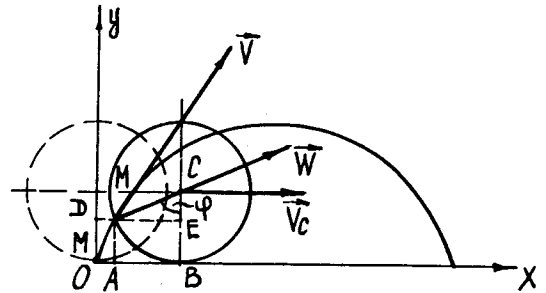


Рис. 14.16

Розв'язання. У довільному положенні колеса визначаємо координати точки M як функції часу:

$$x_M = OB - AB = \overset{\cup}{MB} - ME = R\varphi - R \sin \varphi = R(\varphi - \sin \varphi) = 0,5(12t - \sin 12t) \quad (\text{м});$$

$$y_M = R - CE = R - R \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi) = 0,5(1 - \cos 12t) \quad (\text{м}),$$

$$\text{де } \varphi = \frac{V_C}{R} t = \frac{6}{0,5} t = 12t.$$

Швидкість точки M

$$V_M = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{6^2 + (1 - \cos 12t)^2 + 6^2 \sin^2 12t} = 12 \sin 6t \quad (\text{м/с}).$$

Напрямні косинуси вектора \vec{V} такі:

$$\cos(\widehat{\vec{V}, x}) = \frac{\dot{x}}{V} = \frac{6(1 - \cos 12t)}{12 \sin 6t} = \sin 6t;$$

$$\cos(\widehat{\vec{V}, y}) = \frac{\dot{y}}{V} = \frac{6 \sin 12t}{12 \sin 6t} = \cos 6t,$$

звідки випливає, що вектор \vec{V} завжди проходить через верхню точку колеса.
Прискорення точки M

$$W_M = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{72^2 \sin^2 12t + 72^2 \cos^2 12t} = 72 \quad (\text{м/с}^2).$$

Напрямні косинуси вектора \vec{W} такі:

$$\cos(\widehat{\vec{W}, x}) = \frac{\ddot{x}}{W} = \frac{72 \sin 12t}{72} = \sin 12t;$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}, y}) = \frac{\ddot{y}}{W} = \frac{72 \cos 12t}{72} = \cos 12t,$$

звідки випливає, що вектор \vec{W} завжди проходить через центр колеса.

Задача 14.17. Дано рівняння руху точки $x = Ae^{-ht} \cos(kt + \varepsilon)$,
 $y = Ae^{-ht} \sin(kt + \varepsilon)$.

Визначити проекції швидкості точки на осі декартової і полярної системи координат. Визначити також величину швидкості точки.

Розв'язання. Проекції швидкості точки на декартові осі координат визначають за формулами:

$$V_x = \dot{x} = \frac{d}{dt} [Ae^{-ht} \cos(kt + \varepsilon)] = -Ae^{-ht} [h \cos(kt + \varepsilon) + k \sin(kt + \varepsilon)];$$

$$V_y = \dot{y} = \frac{d}{dt} [Ae^{-ht} \sin(kt + \varepsilon)] = -Ae^{-ht} [h \sin(kt + \varepsilon) - k \cos(kt + \varepsilon)].$$

Швидкість точки в декартовій системі координат

$$\begin{aligned}
 V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \\
 &= Ae^{-ht} \sqrt{[h \cos(kt + \varepsilon) + k \sin(kt + \varepsilon)]^2 + [h \sin(kt + \varepsilon) - k \cos(kt + \varepsilon)]^2} = \\
 &= Ae^{-ht} \sqrt{h^2 + k^2}.
 \end{aligned}$$

Зв'язок між декартовими та полярними координатами має такий вигляд (рис. 14.17):

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi; \\
 y &= r \sin \varphi,
 \end{aligned}$$

звідки дістанемо

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = Ae^{-ht} \sqrt{\cos^2(kt + \varepsilon) + \sin^2(kt + \varepsilon)} = Ae^{-ht}.$$

З рівності $x = r \cos \varphi$ здобудемо

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{Ae^{-ht} \cos(kt + \varepsilon)}{Ae^{-ht}} = \cos(kt + \varepsilon); \quad \varphi = kt + \varepsilon.$$

Проекції швидкості точки на полярні осі координат визначають так:

$$V_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}(Ae^{-ht}) = -Ahe^{-ht};$$

$$V_\varphi = \dot{\varphi}r = Ae^{-ht} \frac{d}{dt}(kt + \varepsilon) = Ake^{-ht}.$$

Швидкість точки в полярній системі координат

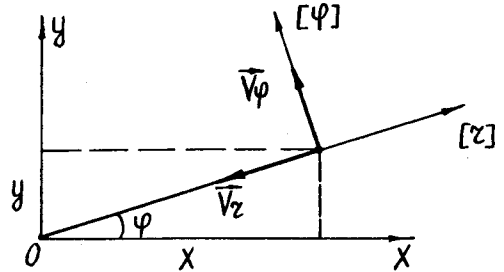


Рис. 14.17

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{(-Ahe^{-ht})^2 + (Ake^{-ht})^2} = Ae^{-ht} \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Задача 14.18. Дано рівняння руху точки M у сферичній системі координат $r = R$, $\varphi = \frac{kt}{2}$, $\theta = 90^\circ - \frac{kt}{2}$. Визначити величину і проекції швидкості точки на осі сферичної системи координат.

Розв'язання. Проекції швидкості точки M на осі сферичної системи координат такі:

$$V_r = \dot{r} = \frac{dR}{dt} = 0, \text{ оскільки } R = \text{const};$$

$$V_{\theta} = \dot{\theta}r = r \frac{d\left(90^{\circ} - \frac{kt}{2}\right)}{dt} = -\frac{kr}{2} = -\frac{Rk}{2};$$

$$V_{\varphi} = \dot{\varphi}r \sin \theta = r \sin\left(90^{\circ} - \frac{kt}{2}\right) \frac{d\left(\frac{kt}{2}\right)}{dt} = \frac{kr}{2} \cos \frac{kt}{2} = \frac{Rk}{2} \cos \frac{kt}{2}.$$

Швидкість точки M (рис. 14.18)

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_{\theta}^2 + V_{\varphi}^2} = \sqrt{\left(-\frac{Rk}{2}\right)^2 + \left(\frac{Rk}{2} \cos \frac{kt}{2}\right)^2} = \frac{Rk}{2} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{kt}{2}}.$$

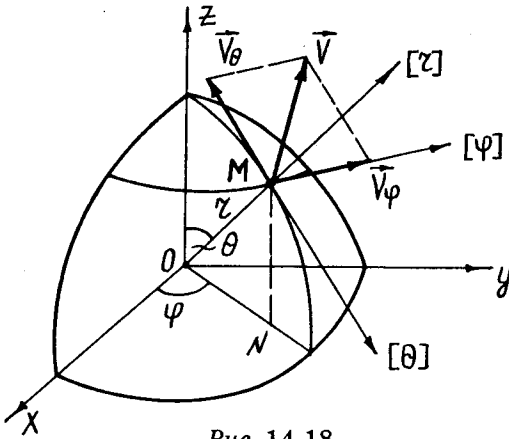


Рис. 14.18

Задача 14.19. Рівняння руху точки M у циліндричній системі координат мають вигляд:

$$\rho = a;$$

$$\varphi = kt;$$

$$z = vt.$$

Знайти проєкції швидкості точки M на осі циліндричної системи координат, рівняння руху точки M_1 , що описує годограф швидкості, і проєкції швидкості точки M .

Розв'язання. Проєкції швидкості точки M на осі циліндричної системи координат визначають так:

$$V_{\rho} = \dot{\rho} = \frac{da}{dt} = 0, \text{ оскільки } a = \text{const};$$

$$V_{\varphi} = \dot{\varphi}\rho = \frac{d(kt)}{dt}\rho = k\rho = ka;$$

$$V_z = \dot{z} = \frac{d(vt)}{dt} = v.$$

Швидкість точки M (рис. 14.19)

$$V = \sqrt{V_{\rho}^2 + V_{\varphi}^2 + V_z^2} = \sqrt{k^2 a^2 + v^2}.$$

Годограф швидкості — коло (рис. 14.20).

Рівняння руху точки M_1 (рис. 14.20) мають вигляд

$$\rho_1 = ka;$$

$$\varphi_1 = 90 + kt \text{ (при } t = 0 \text{ } \varphi_1 = 90^{\circ}); z_1 = v.$$

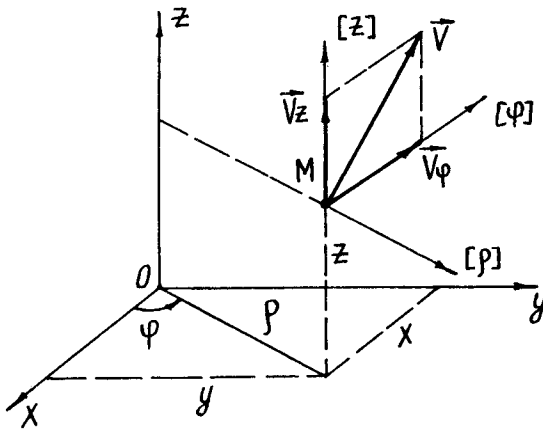


Рис. 14.19

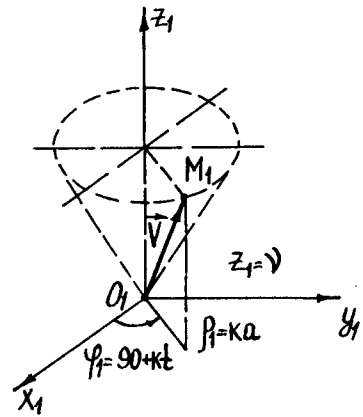


Рис. 14.20

Задача 14.20. Водяні краплі витікають з отвору вертикальної трубки через 0,1 с одна за одною і падають із прискоренням $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Визначити відстань між першою і другою краплями через 1 с після моменту витікання першої краплі.

Розв'язання. Закон руху першої краплі має вигляд

$$x_1 = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Закон руху другої краплі має вигляд

$$x_2 = \frac{gt_2^2}{2}.$$

Відстань між краплями (рис. 14.21)

$$S = x_1 - x_2 = \frac{g}{2}(t_1^2 - t_2^2) = \frac{9,81}{2}(1^2 - 0,9^2) = 0,932 \text{ (м)},$$

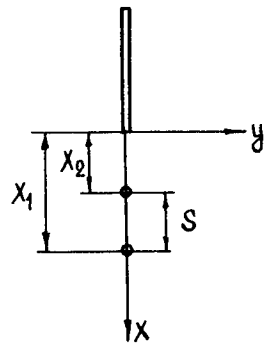


Рис. 14.21

де $t_1 = 1 \text{ с}$, $t_2 = 0,9 \text{ с}$.

Задача 14.21. Точка M рухається по дузі кола, що має радіус $R = 20 \text{ см}$. Закон її руху по траєкторії: $S = 20 \sin \pi t$ (S — у сантиметрах, t — у секундах). Знайти величину і напрям швидкості, дотичне, нормальне і повне прискорення точки в момент $t = 5 \text{ с}$.

Розв'язання. Визначаємо положення точки M у момент часу $t = 5 \text{ с}$ (рис. 14.22):

$$S = 20 \sin 5\pi = 0.$$

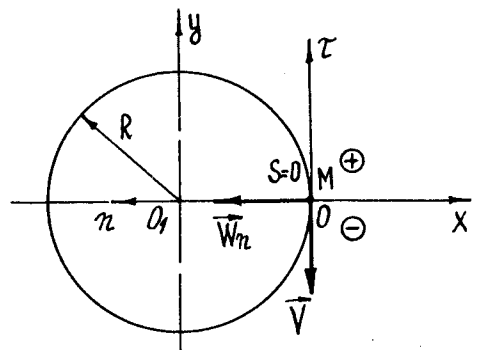


Рис. 14.22

Швидкість точки M

$$V_{\tau} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(20 \sin \pi t) = 20\pi \cos \pi t.$$

При $t = 5$ с $V_{\tau} = 20\pi \cos 5\pi = -20\pi$ (см/с).

Прискорення точки M

$$W = \sqrt{W_{\tau}^2 + W_n^2} = \sqrt{(20\pi^2)^2} = 20\pi^2 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

де $W_{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d}{dt}(20\pi \cos \pi t) = -20\pi^2 \sin \pi t.$

При $t = 5$ с $W_{\tau} = 0;$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{20^2 \pi^2 \cos^2 \pi t}{R}.$$

При $t = 5$ с $W_n = 20\pi^2 \cos^2 5\pi = 20\pi^2$ (см/с).

Задача 14.22. По дузі, що має радіус $R = 1000$ м, рівносповільнено рухається потяг. Швидкість потяга на початку руху $V_0 = 54$ км/год. Після того як потяг пройшов відстань $S = 500$ м, його швидкість зменшилася до $V_k = 36$ км/год. Визначити прискорення на початку і в кінці руху потяга.

Розв'язання. Прискорення потяга визначається за формулою (рис. 14.23)

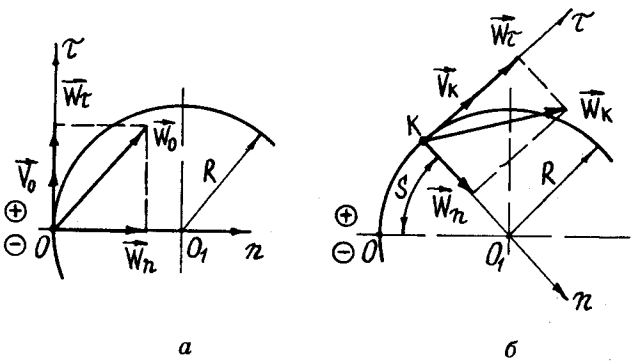


Рис. 14.23

$$W = \sqrt{W_{\tau}^2 + W_n^2}.$$

Дотичне прискорення визначається за формулою

$$W_{\tau} = \frac{4,96}{t}, \text{ оскільки}$$

$$V_k = V_0 - W_{\tau} t.$$

Час руху t потяга на шляху $S = 500$ м

$$t = \frac{500}{12,48} = 40 \text{ (с), оскільки}$$

$$S = S_0 + V_0 t - \frac{W_{\tau} t^2}{2}.$$

Тоді

$$W_{\tau} = \frac{4,96}{t} = \frac{4,96}{40} = 0,124 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Нормальні прискорення на початку і в кінці руху потяга такі:

$$W_{n_0} = \frac{V_0^2}{\rho} = \frac{14,96^2}{1000} = 0,224 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{n_k} = \frac{V_k^2}{\rho} = \frac{100}{1000} = 0,1 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Прискорення потяга на початку і в кінці руху такі:

$$W_0 = \sqrt{W_\tau^2 + W_{n_0}^2} = \sqrt{0,124^2 + 0,224^2} = 0,256 \text{ (м/с}^2\text{)} \text{ (рис. 14.23, а);}$$

$$W_k = \sqrt{W_\tau^2 + W_{n_k}^2} = \sqrt{0,124^2 + 0,1^2} = 0,159 \text{ (м/с}^2\text{)} \text{ (рис. 14.23, б).}$$

Задача 14.23. На дротовому колі, що має радіус $R = 10$ см, насаджено кільце M ; через нього проходить стрижень OA , який рівномірно обертається навколо точки O (рис. 14.24); кутова швидкість стрижня така, що він обертається на прямий кут за 5 с. Визначити швидкість і прискорення кільця.

Розв'язання. Кутова швидкість обертання стрижня OA

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\pi}{2 \cdot 5} = \frac{\pi}{10} \text{ (} \frac{1}{\text{с}} \text{)}.$$

Рівняння руху точки M мають вигляд O (рис. 14.24):

$$x_M = R \cos \varphi_2 = R \cos 2(90 - \omega t);$$

$$y_M = R \sin \varphi_2 = R \sin 2(90 - \omega t).$$

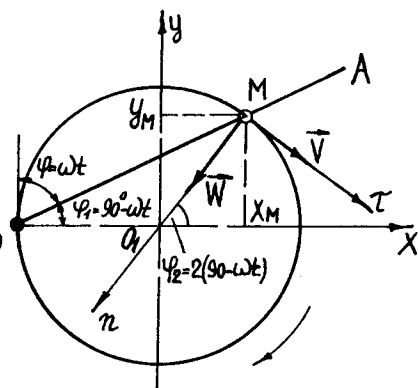


Рис. 14.24

Швидкість точки M

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{[2\omega R \sin 2(90 - \omega t)]^2 + [-2\omega R \cos 2(90 - \omega t)]^2} = 2\omega R = \\ &= \frac{2\pi}{10} \cdot 10 = 2\pi \text{ (см/с)}. \end{aligned}$$

Прискорення точки M

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = \sqrt{[-4\omega^2 R \cos 2(90 - \omega t)]^2 + [4\omega^2 R \sin 2(90 - \omega t)]^2} = 4\omega^2 R = \\ &= 4 \frac{\pi^2}{100} \cdot 10 = 0,4\pi^2 \text{ (см/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Задача 14.24. Точка рухається по гвинтовій лінії $x = 2 \cos 4t$, $y = 2 \sin 4t$, $z = 2t$ (x, y, z — у метрах).

Визначити радіус кривини траєкторії.

Розв'язання. Радіус кривини траєкторії точки визначається за формулою

$$\rho = \frac{V^2}{W_n}$$

Швидкість точки

$$V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-8 \sin 4t)^2 + (8 \cos 4t)^2 + 2^2} = 8,246 \text{ (м/с)}.$$

Нормальне прискорення точки визначається за формулою

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2},$$

де

$$W_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{V} = \frac{(-8 \sin 4t)(-32 \cos 4t) + (8 \cos 4t)(-32 \sin 4t) + 2 \cdot 0}{V} = 0.$$

Отже,

$$W_n = W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{(-32 \cos 4t)^2 + (32 \sin 4t)^2} = 32 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тоді

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{8,246}{32} = 2,125 \text{ (м)}.$$

Задача 14.25. Рух точки в полярній системі координат заданий рівнянням $r = ae^{kt}$ і $\varphi = kt$, де a і k — сталі величини. Знайти рівняння траєкторії, швидкість, прискорення і радіус кривини траєкторії точки як функцію її радіуса-вектора r .

Розв'язання. Виключаючи з рівняння руху час t (з другого рівняння визначаємо значення t і підставляємо в перше рівняння), дістанемо

$$t = \frac{\varphi}{k}, \quad r = ae^{\frac{k\varphi}{k}} = ae^\varphi.$$

Отже, траєкторія руху точки — логарифмічна спіраль.

Проекції швидкості точки на осі полярної системи координат такі:

$$V_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}(ae^{kt}) = ake^{kt} = kr;$$

$$V_\varphi = \varphi\dot{r} = r \frac{d}{dt}(kt) = kr.$$

Швидкість точки

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{k^2 r^2 + k^2 r^2} = kr\sqrt{2}.$$

Проекції прискорення точки на осі полярної системи координат визначають за формулами:

$$W_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r = \frac{d}{dt}(ake^{kt}) - \left[\frac{d(kt)}{dt} \right]^2 r = ak^2 e^{kt} - ak^2 e^{kt} = 0;$$

$$W_\varphi = \ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi}\dot{r} = 2 \frac{d}{dt}(kt) \frac{d}{dt}(ae^{kt}) = 2k^2 ae^{kt} = 2k^2 r.$$

Прискорення точки

$$W = W_\varphi = 2k^2 r.$$

Радіус кривини траєкторії точки визначається за формулою

$$\rho = \frac{V^2}{W_n}.$$

Нормальне прискорення точки визначається за формулою

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{(2k^2 r)^2 - (\sqrt{2}k^2 r)^2} = k^2 r\sqrt{2},$$

де

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{2}kae^{kt}) = \sqrt{2}k^2 ae^{kt} \sqrt{2}k^2 r.$$

Тоді

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{(kr\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}k^2 r} = \frac{2k^2 r^2}{k^2 r\sqrt{2}} = r\sqrt{2}.$$

Задача 14.26. Кривошип OA механізму (рис. 14.25) обертається навколо точки O зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 2 \frac{1}{c}$, $OA = AB = 30$ см, $AM = 10$ см. Знайти траєкторію точки M шатуна AB , її швидкість і прискорення в момент часу $t = \frac{\pi}{4}$ с, якщо у початковий момент повзун B займає крайнє праве положення.

Розв'язання. У довільному положенні механізму визначаємо координати точки M як функції часу (рис. 14.25):

$$x_M = OA \cos \varphi - AM \cos \varphi = 20 \cos 2t;$$

$$y_M = OA \sin \varphi + AM \sin \varphi = 40 \sin 2t.$$

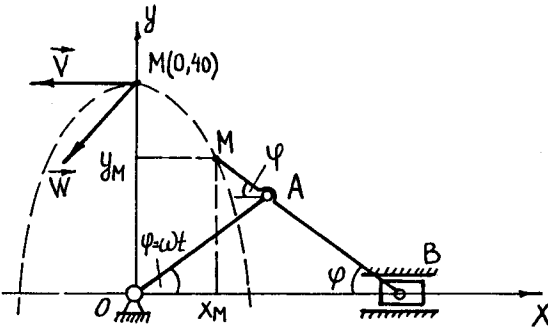


Рис. 14.25

Виключаючи з рівнянь руху час t (визначаємо $\sin^2 2t$ та $\cos^2 2t$ і підставляємо в рівність $\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$), дістанемо

$$\frac{x_M^2}{20^2} + \frac{y_M^2}{40^2} = 1.$$

Отже, траєкторія руху точки M — еліпс.

Швидкість точки M визначаємо за формулою

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-40 \sin 2t)^2 + (80 \cos 2t)^2} = 40\sqrt{1 + 3 \cos^2 2t}.$$

При $t = \frac{\pi}{4}$ с $V = 40\sqrt{1 + 3 \cos^2 2 \frac{\pi}{4}} = 40$ (см / с).

Прискорення точки M визначаємо за формулою

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-80 \cos 2t)^2 + (-160 \sin 2t)^2} = 80\sqrt{1 + 3 \sin^2 2t}.$$

При $t = \frac{\pi}{4}$ с $W = 80\sqrt{1 + 3 \sin^2 2 \frac{\pi}{4}} = 160$ (см / с²).

14.2. Кінематика обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі

Задача 14.27. Скласти рівняння руху диска повітряної турбіни при пуску в хід, якщо відомо, що кут повороту диска пропорційний кубу часу і при

$$t = 3 \text{ с} \text{ кутова швидкість диска } \omega = 27\pi \frac{1}{\text{с}}.$$

Розв'язання. За умовою задачі $\varphi = \alpha t^3$, де α — коефіцієнт пропорційності. Оскільки $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha t^3) = 3\alpha t^2$, то $\alpha = \frac{\omega}{3t^2} = \frac{27\pi}{3 \cdot 3^2} = \pi$.

Отже, $\varphi = \pi t^3$.

Задача 14.28. Тіло, яке починає обертатися рівноприскорено із стану спокою, робить 3600 обертів у перші 2 хв. Визначити кутове прискорення тіла.

Розв'язання. Кутове прискорення тіла визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 3600 \cdot 2\pi}{120^2} = \pi \left(\frac{1}{c^2} \right),$$

оскільки $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ і $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$.

Задача 14.29. Вал починає обертатися рівноприскорено із стану спокою; в перші 5 с він здійснює 12,5 оберта. Яка його кутова швидкість по закінченні цих 5 с?

Розв'язання. Кутову швидкість вала визначаємо за формулою

$$\omega = \frac{2\varphi}{t} = \frac{2 \cdot 12,5 \cdot 2\pi}{5} = 10\pi \left(\frac{1}{c} \right),$$

оскільки $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ і $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$.

Задача 14.30. Махове колесо починає обертатися зі стану спокою рівноприскорено; через 10 хв після початку руху воно має кутову швидкість, що дорівнює $4\pi \frac{1}{c}$. Скільки обертів зробило колесо за ці 10 хв?

Розв'язання. Число обертів колеса за 10 хв руху визначаємо за формулою

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t}{2 \cdot 2\pi} = \frac{4\pi \cdot 600}{4\pi} = 600 \text{ (об)},$$

оскільки $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ і $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$.

Задача 14.31. Махове колесо, що має радіус 0,5 м, рівномірно обертається навколо своєї осі; швидкість точок, що лежать на його ободі, дорівнює 2 м/с. Скільки обертів за хвилину зробить колесо?

Розв'язання. Число обертів за хвилину визначаємо за формулою

$$n = \frac{30V}{\pi r} = \frac{30 \cdot 2}{3,14 \cdot 0,5} = 38,2 \text{ (об/хв)},$$

оскільки $V = \omega r$ і $\omega = \frac{\pi n}{30}$, де n — в об/хв.

Задача 14.32. Точка A шківа, що лежить на його ободі, рухається зі швидкістю 50 см/с, а деяка точка B , яка розташована на одному радіусі з точкою A , рухається зі швидкістю 10 см/с (рис. 14.26); відстань $AB = 20$ см. Визначити кутову швидкість ω і діаметр шківа.

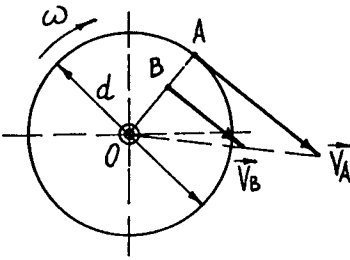


Рис. 14.26

Розв'язання. Радіус шківa визначаємо за формулою

$$R = \frac{V_A \cdot 20}{V_A - V_B} = \frac{50 \cdot 20}{50 - 10} = 25 \text{ (см)},$$

оскільки з рис. 14.26 випливає співвідношення

$$\frac{V_A}{R} = \frac{V_B}{R - 20}.$$

Кутову швидкість шківa визначаємо за формулою

$$\omega = \frac{V_A}{R} = \frac{V_B}{R - 20} = \frac{50}{25} = \frac{10}{5} = 2 \left(\frac{1}{\text{с}} \right),$$

оскільки $V = \omega r$.

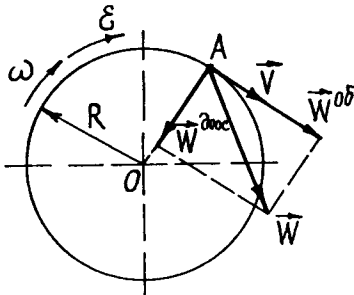


Рис. 14.27

Задача 14.33. Махове колесо, що має радіус $R = 2$ м, обертається рівноприскорено із стану спокою; через $t = 10$ с точки, що лежать на ободі, мають лінійні швидкості $V = 100$ м/с. Знайти швидкість, доосьове і обертальне прискорення точки обода колеса в момент часу $t = 15$ с.

Розв'язання. Швидкість точки обода колеса визначається за формулою

$$V = \omega_2 R = 75 \cdot 2 = 150 \text{ (м/с)},$$

де

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t_2, \quad \omega_1 = \frac{V_1}{R}, \quad \varepsilon = \frac{V_1}{R t_1}, \quad V_1 = 100 \text{ м/с}, \quad t_1 = 10 \text{ с}, \quad t_2 = 5 \text{ с}.$$

Прискорення точки обода колеса (рис. 14.27) визначаємо за формулою

$$W = \sqrt{(W^{\text{об}})^2 + (W^{\text{дос}})^2} = \sqrt{10^2 + 11250^2} = 11250 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

де

$$W^{\text{об}} = \varepsilon r = \frac{V_1 R}{R t_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W^{\text{дос}} = \omega_2^2 r = (\omega_1 + \varepsilon t_2)^2 R = \left(\frac{V_1}{R} + \frac{V_1 t_2}{R t_1} \right)^2 R = \left(\frac{100}{2} + \frac{100 \cdot 5}{2 \cdot 10} \right)^2 2 = 11250 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача 14.34. Кут між вектором повного прискорення точки обода махового колеса і його радіусом дорівнює 60° . Обертальне прискорення цієї точки у даний момент $W^{об} = 10\sqrt{3}$ м/с². Визначити доосьове прискорення точки, яка віддалена від осі обертання на відстань $r = 0,5$ м. Радіус махового колеса $R = 1$ м (рис. 14.28).

Розв'язання. Доосьове прискорення точки B (рис. 14.28) визначаємо за формулою

$$W_B^{доос} = \frac{W_A^{об} \cos 60^\circ \cdot r}{R \cos 30^\circ} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 0,5 \cdot 0,5}{0,866} = 5 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

оскільки $W_B^{доос} = \omega^2 r$; $W_A^{доос} = \omega^2 R = W \cos 60^\circ$; $W = \frac{W_A^{об}}{\cos 30^\circ}$.

Задача 14.35. Вал, що має радіус $R = 10$ см, приводиться в рух гирею P (рис. 14.29). Рівняння руху гирі $x = 100t^2$, де x — відстань у сантиметрах між гирею і місцем збігу нитки з поверхні вала, t — час у секундах. Визначити кутову швидкість ω , кутове прискорення ε вала, а також повне прискорення W точки на поверхні вала в момент t .

Розв'язання. Кутову швидкість вала визначаємо за формулою

$$\omega = \frac{V_k}{R} = \frac{\dot{x}}{R} = \frac{200t}{10} = 20t \left(\frac{1}{c} \right),$$

оскільки $V_k = V_p = \dot{x} = 200t$ см/с.

Кутове прискорення вала визначаємо за формулою

$$\varepsilon = \frac{W_k^{об}}{R} = \frac{\ddot{x}}{R} = \frac{200}{10} = 20 \left(\frac{1}{c^2} \right),$$

оскільки $W^{об} = W_p = \ddot{x} = 200$ см/с².

Повне прискорення точки A вала визначаємо за формулою

$$W = \sqrt{(W_A^{об})^2 + (W_A^{доос})^2} = \sqrt{200^2 + (400t^2)^2} = 200\sqrt{1 + 400t^2} \text{ (см/с}^2\text{)},$$

де

$$W_A^{доос} = \omega^2 R = (20t)^2 \cdot 10 = 4000t^2 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$W_A^{об} = \varepsilon R = 20 \cdot 10 = 200 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

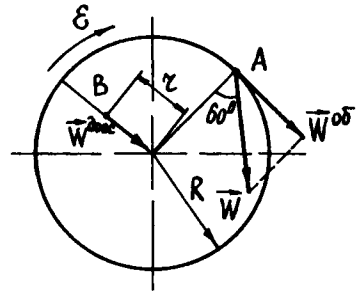


Рис. 14.28

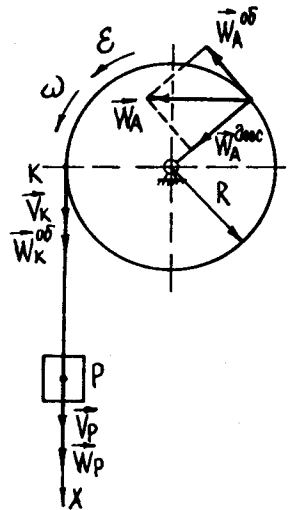


Рис. 14.29

14.3. Кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла

Задача 14.36. Шестірня, що має радіус r , котиться по нерухомій шестірні, що має радіус R (рис. 14.30). Кривошип OA обертається рівноприскорено навколо осі O з кутовим прискоренням ϵ_0 . Скласти рівняння руху рухомої шестірні, прийнявши за полюс її центр A , якщо при $t = 0$ кутова швидкість кривошипа $\omega_0 = 0$ і початковий кут повороту $\varphi_0 = 0$.

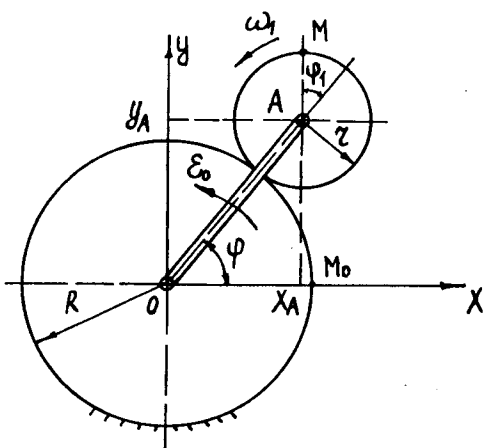


Рис. 14.30

Розв'язання. У довільному положенні механізму визначаємо координати полюса A як функції часу:

$$x_A = OA \cos \varphi = (R + r) \cos \frac{\epsilon_0 t^2}{2};$$

$$y_A = OA \sin \varphi = (R + r) \sin \frac{\epsilon_0 t^2}{2},$$

оскільки $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon_0 t^2}{2}$ і $\varphi_0 = 0$;

$$\omega_0 = 0.$$

Кут обертання φ_1 рухомої шестірні відносно полюса A визначаємо з виразу

$$\int_0^{\varphi} d\varphi_1 = \int_0^t \frac{\epsilon_0 t (R + r)}{r} dt,$$

звідки $\varphi_1 = \frac{\epsilon_0 t^2}{2r} (R + r)$, оскільки $V_A = \omega OA = \epsilon_0 t (R + r)$, $V_A = \omega_1 r$, $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$.

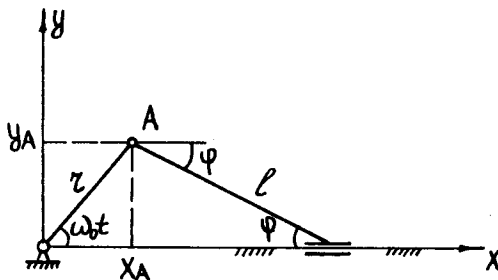


Рис. 14.31

Задача 14.37. Знайти рівняння руху шатуна, якщо кривошип обертається рівномірно; за полюс взяти точку A на осі пальця кривошипа; r — довжина кривошипа; l — довжина шатуна; ω_0 — кутова швидкість кривошипа.

При $t = 0$ кут $\varphi = 0$.

Розв'язання. У довільному положенні механізму визначаємо координати полюса A шатуна (рис. 14.31) як функції часу:

$$x_A = r \cos \omega_0 t;$$

$$y_A = r \sin \omega_0 t.$$

Кут обертання φ шатуна AB відносно полюса A визначаємо зі співвідношення

$$\frac{r}{\sin \varphi} = \frac{l}{\sin \omega_0 t},$$

звідки

$$\sin \varphi = \frac{r \sin \omega_0 t}{l}.$$

Отже, $\varphi = -\arcsin\left(\frac{r}{l} \sin \omega_0 t\right)$, оскільки шатун AB обертається за рухом годинникової стрілки.

Задача 14.38. При русі диска, що має радіус $r = 20$ см, у вертикальній площині Oxy його центр C рухається на підставі рівнянь $x_c = 10t$ м, $y_c = (100 - 4,9t^2)$ м. При цьому диск обертається навколо горизонтальної осі C , перпендикулярної до площини диска, зі сталою кутовою швидкістю $\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{c}$. Визначити в момент часу $t = 0$ швидкість точки A , що лежить на ободі диска. Положення точки A на диску визначається кутом $\varphi = \omega t$, який відраховується від вертикалі проти руху годинникової стрілки (рис. 14.32).

Розв'язання. Визначаємо положення диска і точки A в момент часу $t = 0$:

$$x_c = 10t = 0 \text{ (м);}$$

$$y_c = (100 - 4,9t^2) = 100 \text{ (м);}$$

$$\varphi = \omega t = 0.$$

Вектор швидкості точки A визначається за формулою

$$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{AC},$$

де

$$V_C = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} = \sqrt{10^2} = 10 \text{ (м/с);}$$

$$V_{AC} = \omega CA = \omega r = \frac{\pi}{2} r = \frac{\pi}{2} \cdot 0,2 = 0,314 \text{ (м/с).}$$

З рис. 14.32 випливає, що величина швидкості точки A

$$V_A = V_C + V_{AC} = 10 + 0,314 = 10,314 \text{ (м/с).}$$

Задача 14.39. Два однакових диски, які мають радіус r , з'єднані циліндричним шарніром A (рис. 14.33). Диск 1 обертається навколо нерухокої горизонтальної осі O за законом $\varphi = \varphi(t)$. Диск 2 обертається навколо горизонтальної осі A за законом $\psi = \psi(t)$. Осі O і A перпендикулярні до пло-

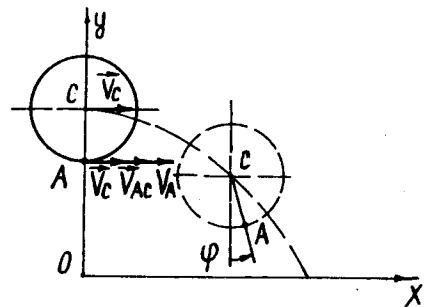


Рис. 14.32

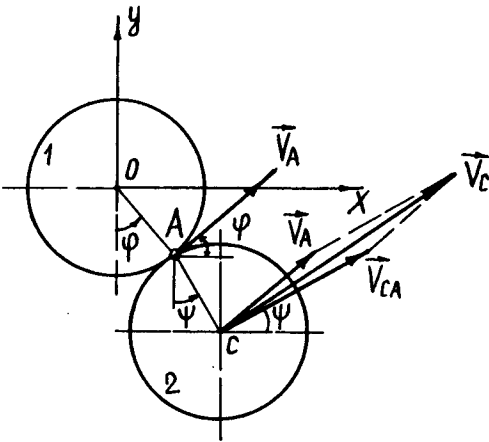


Рис. 14.33

З рис. 14.33 випливає, що проекції вектора \vec{V}_C на осі координат Oxy такі:

$$V_{Cx} = V_A \cos \varphi + V_{CA} \cos \psi = r (\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \psi);$$

$$V_{Cy} = V_A \sin \varphi + V_{CA} \sin \psi = r (\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \psi).$$

Тоді

$$V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} = r \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)}.$$

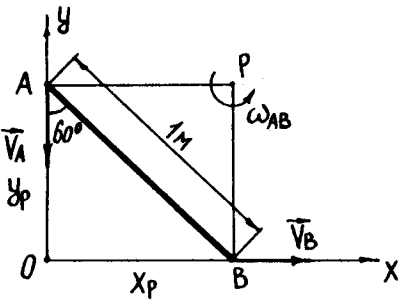


Рис. 14.34

Задача 14.40. Стрижень AB , довжина якого дорівнює 1 м, рухається, спираючись увесь час своїми кінцями на дві взаємно перпендикулярні прямі Ox і Oy . Знайти координати x і y миттєвого центра швидкостей в той час, коли кут $\angle OAB$ дорівнює 60° (рис. 14.34).

Розв'язання. З рис. 14.34 випливає, що координати точки P такі:

$$x_p = AB \sin 60^\circ = 0,866 \text{ (м)};$$

$$y_p = AB \cos 60^\circ = 0,5 \text{ (м)}.$$

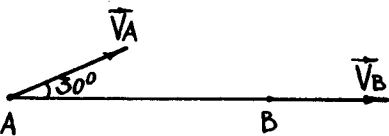


Рис. 14.35

Задача 14.41. Пряма AB рухається в площині рисунка. У деякий момент часу швидкість \vec{V}_A точки A утворює з прямою AB кут 30° і дорівнює 180 см/с, напрям швидкості точки B у цей момент збігається з напрямом AB (рис. 14.35). Визначити швидкість V_B точки B .

Розв'язання. Швидкість точки B визначаємо на підставі рівності

$$V_B = V_A \cos 30^\circ = 180 \cdot 0,866 = 155,9 \text{ (см/с)}.$$

Задача 14.42. Стрижень AB має довжину $0,5$ м і рухається в площині рисунка. Швидкість \vec{V}_A ($V_A = 2$ м/с) утворює кут 45° зі стрижнем AB . Швидкість \vec{V}_B утворює кут 60° зі стрижнем AB (рис. 14.36). Знайти модуль швидкості точки B і кутову швидкість стрижня.

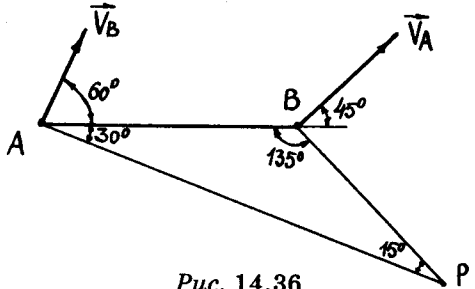


Рис. 14.36

Розв'язання. Швидкість (модуль) точки B визначаємо за формулою

$$V_B = \frac{V_A \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{2 \cdot 0,707}{0,5} = 2,83 \text{ (м/с)},$$

оскільки $V_B \cos 60^\circ = V_A \cos 45^\circ$.

Кутову швидкість стрижня AB визначаємо за формулою

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{pA} = \frac{V_A}{pB} = \frac{2,83}{1,37} = \frac{2}{0,97} = 2,06 \left(\frac{1}{\text{с}} \right),$$

де

$$pB = \frac{AB \sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,2588} = 0,97 \text{ (м)};$$

$$pA = \frac{AB \sin 135^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{0,5 \cdot 0,707}{0,2588} = 1,37 \text{ (м)}.$$

Задача 14.43. Механізм приводиться в рух кривошипом $OA = 24$ см (рис. 14.37). Кривошип коливається навколо осі O за законом $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi t}{2}$ рад (кут φ відлічується від горизонталі). Колесо K обертається навколо осі O_1 за допомогою стрижня AB . Осі O і O_1 перпендикулярні до площини рисунка. Знайти швидкість точки D , що лежить на ободі колеса K у момент часу $t = 0$, якщо $R = 2BO_1$, а OA і O_1B розташовані горизонтально.

Розв'язання. Кутову швидкість кривошипа OA визначаємо за формулою

$$\omega_{OA} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi t}{2} \right) = \frac{\pi^2}{12} \cos \frac{\pi t}{2}.$$

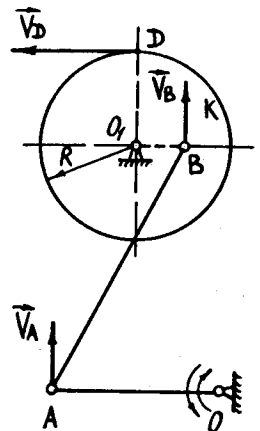


Рис. 14.37

У момент часу $t = 0$ маємо

$$\omega_{OA} = \frac{\pi^2}{12} = 0,82 \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

Швидкість точки A визначаємо за формулою

$$V_A = \omega_{OA} OA = 0,82 \cdot 24 = 19,68 \text{ (см / с)}.$$

З рис. 14.37 випливає, що

$$V_B = V_A = 19,68 \text{ (см / с)};$$

$$V_D = 2V_B = 19,68 \cdot 2 = 39,36 \text{ (см / с)}.$$

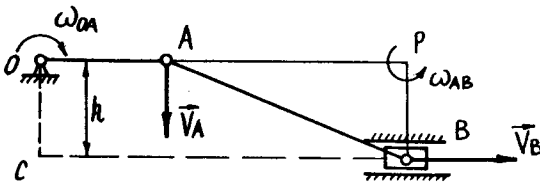


Рис. 14.38

Задача 14.44. Знайти швидкість точки B нецентрального кривошипного механізму при горизонтальному (рис. 14.38) і при вертикальному (рис. 14.39) положенні кривошипа OA . Кривошип обертається навколо осі O з

кутовою швидкістю $\omega_{OA} = 1,5 \frac{1}{\text{с}}$, якщо $OA = 40$ см, $AB = 200$ см, $OC = 20$ см.

Розв'язання. Визначаємо швидкість точки B при горизонтальному положенні кривошипа OA . З рис. 14.38 випливає:

$$V_A = \omega_{OA} OA = 1,5 \cdot 40 = 60 \text{ (см / с)};$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{pA} = \frac{V_A}{\sqrt{AB^2 - OC^2}} = \frac{60}{\sqrt{200^2 - 20^2}} = 0,3 \left(\frac{1}{\text{с}} \right);$$

$$V_B = \omega_{AB} pB = 0,3 \cdot 20 = 60 \text{ (см / с)}.$$

Визначаємо швидкість точки B при вертикальному положенні кривошипа OA . З рис. 14.39 випливає

$$V_B = V_A = 1,5 \cdot 40 = 60 \text{ (см / с)}.$$

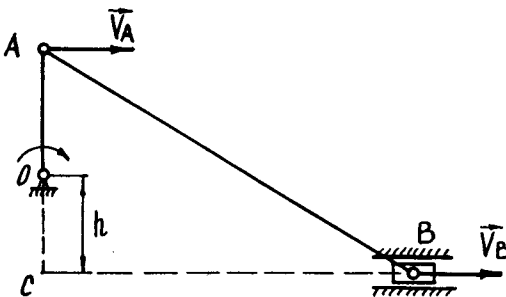


Рис. 14.39

Задача 14.45. Колесо, що має радіус $R = 0,5$ м, котиться без ковзання по прямолінійному шляху; швидкість центра колеса стала: $V_0 = 10$ м/с. Визначити швидкості кінців M_1 , M_2 , M_3 і M_4 вертикального і горизонтального діаметрів колеса. Визначити також його кутову швидкість.

Розв'язання. З рис. 14.40 випливає:

$$V_{M_1} = 0;$$

$$V_{M_2} = V_{M_4} = \frac{V_0}{R} \sqrt{R^2 + R^2} = V_0 \sqrt{2} = 14,14 \text{ (м/с)};$$

$$V_{M_3} = 2V_0 = 20 \text{ (м/с)}.$$

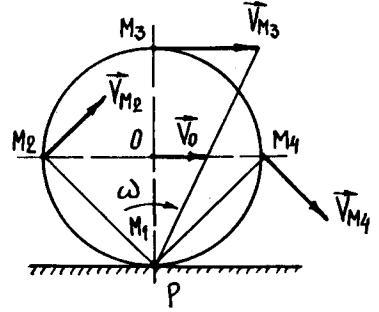


Рис. 14.40

Задача 14.46. При русі диска, що має радіус $r = 20$ см, у вертикальній площині xOy його центр C рухається на підставі рівнянь $x_c = 10t$ м, $y_c = (100 - 4,9t^2)$ м. При цьому диск обертається навколо горизонтальної осі C , перпендикулярної до площини диска, зі сталою кутовою швидкістю

$\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{c}$. Визначити в момент часу $t = 0$ прискорення точки A , що лежить на ободі диска. Положення точки A на диску визначається кутом $\varphi = \omega t$, який відлічується від вертикалі проти руху стрілки годинника (рис. 14.41).

Розв'язання. Визначаємо положення диска і точки A в момент часу $t = 0$:

$$x_c = 10t = 0 \text{ (м)};$$

$$y_c = (100 - 4,9t^2) \text{ (м)};$$

$$\varphi = \omega t = 0.$$

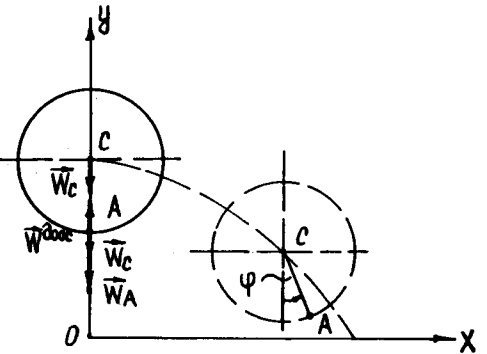


Рис. 14.41

Вектор прискорення точки A визначається за формулою

$$\vec{W}_A = \vec{W}_C + \vec{W}_{AC}^{об} + \vec{W}_{AC}^{дооc},$$

де

$$W_C = \dot{y}_c = -9,8 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{AC}^{об} = 0;$$

$$W_{AC}^{дооc} = \omega^2 r = \frac{\pi^2}{4} \cdot 0,2 = \frac{3,14 \cdot 0,2}{4} = 0,49 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

З рис. 14.41 випливає, що величина прискорення точки A

$$W_A = W_C - W_A^{дооc} = -9,8 + 0,49 = -9,31 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

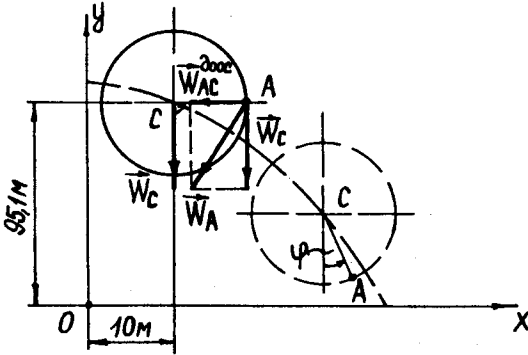


Рис. 14.42

Задача 14.47. Зберігаючи умови попередньої задачі, визначити прискорення точки A в момент часу $t = 1$ с.

Розв'язання. Визначаємо положення диска і точки A в момент часу $t = 1$ с (рис. 14.42):

$$x_c = 10t = 10 \text{ (м);}$$

$$y_c = (100 - 4,9t^2) = 95,1 \text{ (м);}$$

$$\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2}.$$

Вектор прискорення точки A визначається за формулою

$$\vec{W}_A = \vec{W}_C + \vec{W}_{AC}^{об} + \vec{W}_{AC}^{дооc},$$

де

$$W_C = \ddot{y} = -9,8 \text{ (м/с}^2\text{);}$$

$$W_{AC}^{об} = 0;$$

$$W_{AC}^{дооc} = \omega^2 r = \frac{\pi^2}{4} \cdot 0,2 = \frac{3,14 \cdot 0,2}{4} = 0,49 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

З рис. 14.42 випливає, що величина прискорення точки A

$$W_A = \sqrt{W_C^2 + (W_{AC}^{дооc})^2} = \sqrt{(-9,8)^2 + 0,49^2} = 9,81 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

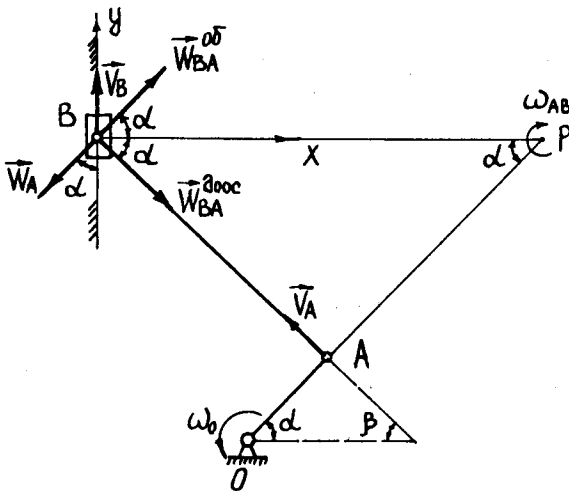


Рис. 14.43

Задача 14.48. Кривошип OA , що має довжину 20 см, обертається рівномірно з кутовою швидкістю $\omega_0 = 10$ рад/с і надає руху шатуну AB , довжина якого дорівнює 100 см; повзун B рухається по вертикалі (рис. 14.43). Знайти кутову швидкість і кутове прискорення шатуну, а також прискорення повзуна B у момент, коли кривошип і шатун взаємно перпендикулярні й утворюють з горизонталлю кути $\alpha = 45^\circ$ і $\beta = 45^\circ$.

Розв'язання. Визначаємо кутову швидкість шатуну:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{r_A} = \frac{10 \cdot 20}{100} = 2 \left(\frac{1}{c} \right).$$

Вектор прискорення точки B визначається за формулою

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{об} + \vec{W}_{BA}^{доос},$$

де

$$W_A = \omega_0^2 OA = 10^2 \cdot 20 = 2000 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$W_{BA}^{об} = \epsilon AB = 100\epsilon;$$

$$W_{BA}^{доос} = \omega_{AB}^2 AB = 4 \cdot 100 = 400 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Проекції вектора \vec{W}_B на осі координат Bxy такі:

$$W_{Bx} = -W_A \sin 45^\circ + W_{BA}^{доос} \cos 45^\circ + W_{BA}^{об} \cos 45^\circ;$$

$$W_{By} = -W_A \cos 45^\circ - W_{BA}^{доос} \sin 45^\circ + W_{BA}^{об} \sin 45^\circ,$$

звідки

$$\epsilon_{AB} = \frac{2000 \cdot 0,707 - 400 \cdot 0,707}{100 \cdot 0,707} = 16 \left(\frac{1}{\text{с}} \right);$$

$$W_B = W_{By} = -2000 \cdot 0,707 - 400 \cdot 0,707 + 16 \cdot 100 \cdot 0,707 = 565,6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Задача 14.49. Стрижень OA шарнірного чотириланковика $OABO_1$ обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_0 . Визначити кутову швидкість, кутове прискорення стрижня AB , а також прискорення шарніра B у положенні, що зображено на рис. 14.44, якщо $AB = 2OA = 2a$.

Розв'язання. Кутова швидкість стрижня AB

$$\omega_{AB} = 0, \text{ оскільки } \vec{V}_B = \vec{V}_A.$$

Вектор прискорення точки B визначається за формулою

$$\vec{W}_B^{об} + \vec{W}_B^{доос} = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{об} + \vec{W}_{BA}^{доос},$$

де

$$W_B^{об} = \epsilon_{O_1B} O_1B = 2a\epsilon_{O_1B};$$

$$W_B^{доос} = \omega_{O_1B}^2 O_1B = \frac{(\omega_0 OA)^2}{2a} = \frac{\omega_0^2 a}{2};$$

$$W_A = \omega_0^2 a;$$

$$W_{BA}^{об} = 2\epsilon_{AB} a;$$

$$W_{BA}^{доос} = 0.$$

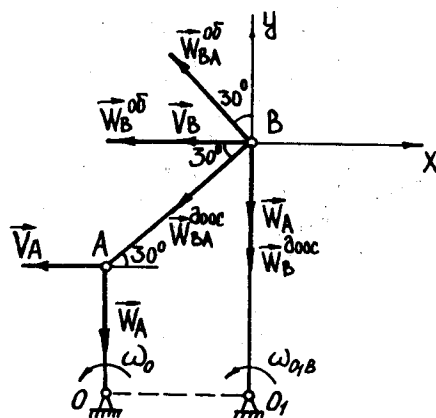


Рис. 14.44

Проекції вектора \vec{W}_B на осі координат Bxy такі:

$$-W_B^{об} = -W_{BA}^{об} \sin 30^\circ + W_{BA}^{доос} \cos 30^\circ;$$

$$-W_B^{доос} = W_A + W_{BA}^{об} \cos 30^\circ - W_{BA}^{доос} \sin 30^\circ,$$

звідки

$$\epsilon_{AB} = \frac{-W_B^{\text{доос}} + W_A}{AB \cos 30^\circ} = \frac{(-0,5\omega_0^2 a + \omega_0^2 a) 2}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \omega_0^2;$$

$$W_B^{\text{об}} = W_{BA}^{\text{об}} \sin 30^\circ \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}}{6} \omega_0^2 \cdot 0,5 \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}\omega_0^2 a}{6};$$

$$W_B^{\text{доос}} = \omega_0^2 a - \frac{\sqrt{3}}{6} \omega_0^2 \cdot 2a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\omega_0^2 a}{2}.$$

Прискорення точки B

$$W_B = \sqrt{(W_B^{\text{об}})^2 + (W_B^{\text{доос}})^2} = \sqrt{\frac{3\omega_0^4 a^2}{36} + \frac{\omega_0^4 a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \omega_0^2 a.$$

Задача 14.50. Колесо котиться без ковзання у вертикальній площині по похилому прямолінійному шляху. Знайти прискорення кінців двох взаємно перпендикулярних діаметрів колеса, з яких один паралельний рейці (рис. 14.45), якщо в момент часу, що розглядається, швидкість центра колеса $V_0 = 1$ м/с, прискорення центра колеса $W_0 = 3$ м/с², радіус колеса $R = 0,5$ м.

Розв'язання. Вектори прискорення точок M_1, M_2, M_3 і M_4 колеса визначаються за формулами:

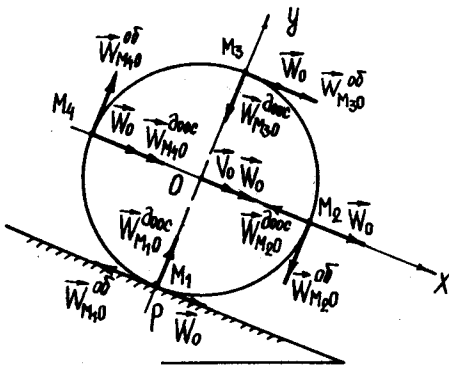


Рис. 14.45

$$\vec{W}_{M_1} = \vec{W}_0 + \vec{W}_{M_1O}^{\text{об}} + \vec{W}_{M_1O}^{\text{доос}};$$

$$\vec{W}_{M_2} = \vec{W}_0 + \vec{W}_{M_2O}^{\text{об}} + \vec{W}_{M_2O}^{\text{доос}};$$

$$\vec{W}_{M_3} = \vec{W}_0 + \vec{W}_{M_3O}^{\text{об}} + \vec{W}_{M_3O}^{\text{доос}};$$

$$\vec{W}_{M_4} = \vec{W}_0 + \vec{W}_{M_4O}^{\text{об}} + \vec{W}_{M_4O}^{\text{доос}},$$

де

$$W_{M_1O}^{\text{об}} = W_{M_2O}^{\text{об}} = W_{M_3O}^{\text{об}} = W_{M_4O}^{\text{об}} = W_0 = 3 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

оскільки

$$\epsilon = \frac{W_0}{R};$$

$$W_{M_1O}^{\text{доос}} = W_{M_2O}^{\text{доос}} = W_{M_3O}^{\text{доос}} = W_{M_4O}^{\text{доос}} = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 R = \frac{V_0^2}{R} = 2 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

тому що $\omega = \frac{V_0}{R}$.

З рис. 14.45 випливає, що прискорення точок M_1, M_2, M_3 і M_4 колеса такі:

$$W_{M_1} = \sqrt{(W_0 - W_{M_1O}^{об})^2 + (W_{M_1O}^{дооc})^2} = \sqrt{(3 - 3)^2 + 2^2} = 2 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{M_2} = \sqrt{(W_0 - W_{M_2O}^{дооc})^2 + (W_{M_2O}^{об})^2} = \sqrt{(3 - 2)^2 + 3^2} = 3,16 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{M_3} = \sqrt{(W_0 + W_{M_3O}^{об})^2 + (W_{M_3O}^{дооc})^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,32 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{M_4} = \sqrt{(W_0 + W_{M_4O}^{дооc})^2 + (W_{M_4O}^{об})^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача 14.51. Вектори прискорення кінців стрижня AB , що має довжину 10 см і який здійснює плоскопаралельний рух, напрямлені вздовж стрижня назустріч один одному (рис. 14.46), при цьому $W_A = 10 \text{ см/с}^2$, $W_B = 20 \text{ см/с}^2$. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення стрижня.

Розв'язання. Вектор прискорення точки B визначається за формулою

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{об} + \vec{W}_{BA}^{дооc},$$

де

$$W_A = 10 \text{ см/с}^2;$$

$$W_{BA}^{об} = 10\epsilon_{AB};$$

$$W_{BA}^{дооc} = 10\omega_{AB}^2.$$

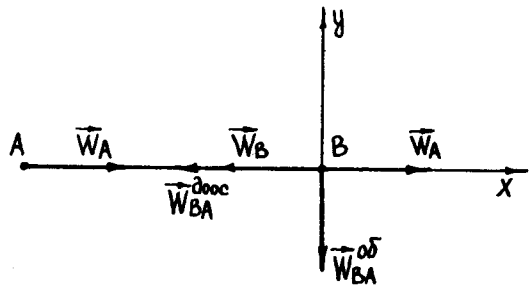


Рис. 14.46

Проекції вектора \vec{W}_B на осі координат Bx такі:

$$0 = W_{BA}^{об};$$

$$W_B = -W_A + W_{BA}^{дооc},$$

звідки $10\epsilon_{AB} = 0$ і, отже, $\epsilon_{AB} = 0$;

$$\omega_{AB} = \sqrt{\frac{W_B + W_A}{AB}} = \sqrt{\frac{20 + 10}{10}} = 1,73 \left(\frac{1}{c}\right).$$

Задача 14.52. Стрижень AB здійснює плоскопаралельний рух (рис. 14.47). Довжина $AB = 0,2 \text{ м}$. Вектори прискорення точок A і B перпендикулярні до AB , напрямлені в протилежні боки і рівні за модулем, тобто $W_A = W_B = 2 \text{ м/с}^2$. Знайти кутову швидкість, кутове прискорення стрижня і прискорення його середини C .

Проекції вектора \vec{W}_A на осі координат Axy такі:

$$W_A \cos 45^\circ = W_B \cos 60^\circ - W_{AB}^{\text{дооc}};$$

$$W_A \sin 45^\circ = W_B \sin 60^\circ - W_{AB}^{\text{об}},$$

звідки

$$\omega_{AB} = \sqrt{\frac{W_B \cos 60^\circ - W_A \cos 45^\circ}{AB}} = \sqrt{\frac{4,42 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,707}{0,2}} = 2 \left(\frac{1}{\text{с}} \right);$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_B \sin 60^\circ - W_A \sin 45^\circ}{AB} = \frac{4,42 \cdot 0,866 - 2 \cdot 0,707}{0,2} = 12,07 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right).$$

Визначаємо кут напрямку на МЦП:

$$\text{tg } \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{12,07}{4} = 3,0175;$$

$$\mu = 71,7^\circ.$$

З рис. 14.48 дістанемо

$$\frac{AQ}{\sin 11,7^\circ} = \frac{AB}{\sin 15^\circ},$$

звідки

$$AQ = \frac{AB \sin 11,7^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{0,2 \cdot 0,203}{0,259} = 0,157 \text{ (м)}.$$

Тоді з рис. 14.48 знайдемо:

$$QD = AQ \sin 26,7^\circ = 0,157 \cdot 0,4493 = 0,0705 \text{ (м)};$$

$$AD = AQ \cos 26,7^\circ = 0,157 \cdot 0,8933 = 0,14 \text{ (м)};$$

$$OC = \sqrt{CD^2 + QD^2} = \sqrt{0,24^2 + 0,0705^2} = 0,25 \text{ (м)}.$$

Отже, прискорення точки C

$$W_c = QC \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,25 \sqrt{12,07^2 + 2^4} = 3,18 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

14.4. Кінематика твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.

Задача 14.54. Вісь Oz_1 дзиги рівномірно описує навколо вертикальної осі Oz коловий конус з кутом розхилу 2θ (рис. 14.49). Кутова швидкість обертання дзиги навколо осі Oz дорівнює $\bar{\omega}_1$, а стала кутова швидкість власного обертання дзиги дорівнює $\bar{\omega}_2$. Визначити величину і напрям абсолютної кутової швидкості $\bar{\omega}$ дзиги.

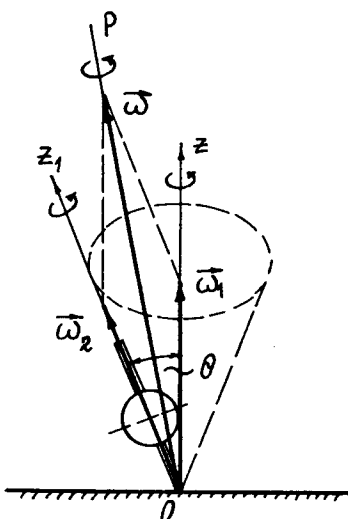


Рис. 14.49

Розв'язання. Вісь дзиги Oz_1 здійснює регулярну прецесію, тому абсолютна кутова швидкість дзиги

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,$$

або

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \theta}.$$

Напрямок вектора $\bar{\omega}$ визначаємо за напрямним косинусом:

$$\cos(\widehat{\bar{\omega}, z_1}) = \frac{\omega_{z_1}}{\omega} = \frac{\omega_2 + \omega_1 \cos \theta}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \theta}}.$$

Задача 14.55. Тіло, рухаючись в атмосфері, обертається навколо осі Cz із кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$ (рис. 14.50). Одночасно вісь тіла Cz обертається з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_2$ навколо осі Cz_1 (напрявлена по дотичній до траєкторії точки C тіла). Визначити швидкість точки M тіла при його обертальному русі, якщо $CM = r$ і відрізок CM перпендикулярний до осі Cz ; кут між осями Cz і Cz_1 дорівнює γ .

Розв'язання. Вісь Cz тіла здійснює прецесійний рух, тому абсолютна кутова швидкість тіла

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,$$

або

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \gamma}.$$

Швидкість точки M тіла

$$V_M = \omega MC \cos \varphi = \omega r \cos \varphi = (\omega_1 + \omega_2 \cos \gamma) r,$$

оскільки

$$\cos \varphi = \frac{\omega_{z_1}}{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2 \cos \gamma}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \gamma}}.$$

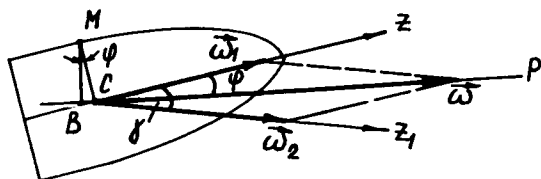


Рис. 14.50

Задача 14.56. Конус, висота якого $h = 4$ см і радіус основи $r = 3$ см, котиться по площі без ковзання, маючи нерухому вершину в точці O . Визначити кутову швидкість конуса, координати точки, що креслить годо-

граф кутової швидкості, і кутове прискорення конуса, якщо швидкість центра C конуса (рис. 14.51, а) $V_C = 48 \text{ см / с} = \text{const}$.

Розв'язання. Абсолютна кутова швидкість конуса (рис. 14.51, б)

$$\omega = \frac{V_C}{CD} = \frac{48}{2,4} = 20 \left(\frac{1}{\text{с}} \right),$$

де $CD = h \sin \alpha = h \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ (см)}$.

Визначаємо кутову швидкість ω_1 (рис. 14.51, б):

$$\omega_1 = \frac{V_C}{EC} = \frac{48}{3,2} = 15 \left(\frac{1}{\text{с}} \right),$$

де $EC = h \cos \alpha = h \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5} = 3,2 \text{ (см)}$.

Визначаємо координати точки M , що креслить годограф (рис. 14.52):

$$x_M = \omega \cos \varphi_1 = 20 \cos 15t;$$

$$y_M = \omega \sin \varphi_1 = 20 \sin 15t.$$

Оскільки $\int_0^{\varphi_1} d\varphi_1 = \int_0^t \omega_1 dt$, при $\omega_1 = \text{const}$ дістанемо $\varphi_1 = \omega_1 t = 15t$.

Абсолютне прискорення конуса

$$\varepsilon = \omega \omega_1 = 20 \cdot 15 = 300 \left(\frac{1}{\text{с}^2} \right).$$

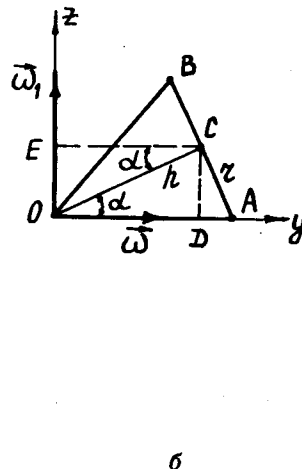
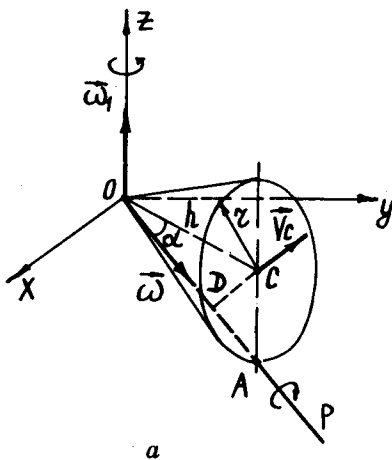


Рис. 14.51

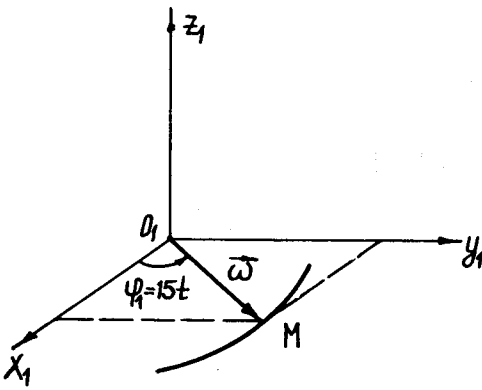


Рис. 14.52

Задача 14.57. Конус, вершина O якого нерухома, котиться по площині без ковзання (рис. 14.53). Висота конуса $CO = 18$ см, а кут при вершині $\angle AOB = 90^\circ$. Точка C , центр основи конуса, рухається рівномірно і повертається у початкове положення через 1 с. Визначити швидкість кінця B діаметра AB , кутове прискорення конуса і прискорення точок A і B .

Розв'язання. Кутова швидкість обертання конуса навколо осі Oz (за умовою задачі)

$$\omega_1 = 2\pi \frac{1}{c}$$

Швидкість точки C конуса

$$V_C = \omega_1 CE = 2\pi CO \cos 45^\circ = 2 \cdot 3,14 \cdot 18 \cdot 0,707 = 79,9 \text{ (см)}.$$

Абсолютна кутова швидкість конуса

$$\omega = \frac{V_C}{CD} = \frac{V_C}{CO \cos 45^\circ} = \frac{79,8}{18 \cdot 0,707} = 6,28 \left(\frac{1}{c} \right).$$

Швидкість точки B конуса

$$V_B = 2V_C = 2 \cdot 79,9 = 159,8 \text{ (см/с)}.$$

Абсолютне кутове прискорення конуса

$$\varepsilon = \omega \omega_1 = 6,28^2 = 39,44 \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Вектор прискорення точки A визначається за формулою

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{ob} + \vec{W}_A^{дооc},$$

де $W_A^{дооc} = \omega^2 d = 0$, оскільки $d = 0$;

$$W_A^{ob} = \varepsilon h = 39,44 \cdot 25,45 = 1003,8 \text{ (см/с}^2\text{)} \left[h = 2OD = 2 \cdot 18 \cos 45^\circ = 25,44 \text{ (см)} \right].$$

Отже,

$$W_A = W_A^{ob} = 1003,8 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

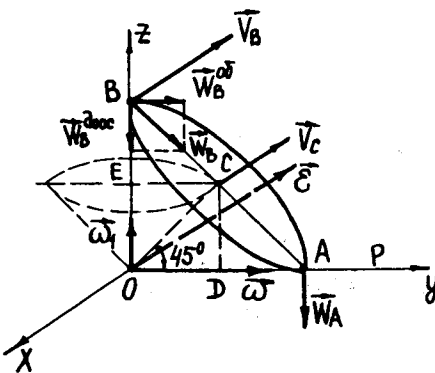


Рис. 14.53

Вектор прискорення точки B визначається за формулою

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^{o6} + \vec{W}_B^{\text{дооc}},$$

де

$$W_B^{o6} = \varepsilon h_1 = \varepsilon OB = 39,44 \cdot 25,45 = 1003,8 \text{ (см / с}^2\text{)};$$

$$W_B^{\text{дооc}} = \omega^2 OB = 6,28^2 \cdot 25,45 = 1003,8 \text{ (см / с}^2\text{)}.$$

Отже,

$$W_B = \sqrt{(W_B^{o6})^2 + (W_B^{\text{дооc}})^2} = 1003,8\sqrt{2} \text{ (см / с}^2\text{)}.$$

14.5. Кінематика складного руху точки і твердого тіла

Задача 14.58. Точка A рухається зі сталою за величиною і напрямом швидкістю \vec{V}_0 (рис. 14.54). Під яким кутом β до прямої AB необхідно почати рух точки B , щоб зустрітися з точкою A , якщо швидкість точки B стала за модулем і напрямом і дорівнює \vec{V}_1 ? Лінія AB утворює кут ψ_0 з перпендикуляром до лінії дії вектора швидкості точки A .

Розв'язання. Вектор абсолютної швидкості точки B визначається за формулою (рис. 14.54, а)

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

де $\vec{V}_r = \vec{V}_{BA}$ — швидкість точки B відносно точки A ;

$\vec{V}_e = \vec{V}_0$ — переносна швидкість точки A ;

$\vec{V}_a = \vec{V}_1$ — абсолютна швидкість точки A .

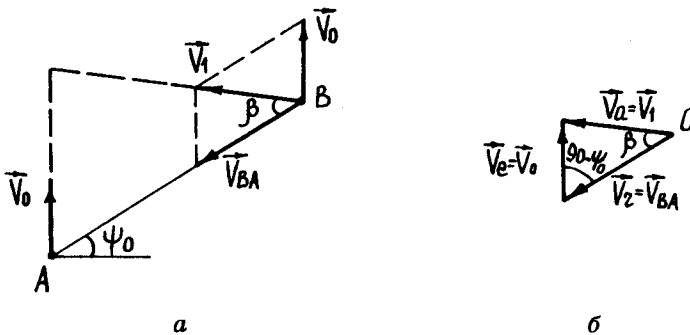


Рис. 14.54

З рис. (14.54, б) впливає співвідношення

$$\frac{V_a}{\sin(90 - \psi_0)} = \frac{V_e}{\sin \beta},$$

звідки

$$\sin \beta = \frac{V_e \sin(90 - \psi_0)}{V_a} = \frac{V_0}{V_1} \cos \psi_0.$$

Задача 14.59. Пасажир автомобіля, що рухається по горизонтальному шосе зі швидкістю 72 км/час, бачить через бокове скло kabіни траєкторії краплин дощу нахиленими до вертикалі під кутом 40° . Визначити абсолютну швидкість прямовисного падіння краплин дощу, нехтуючи тертям.

Розв'язання. Вектор абсолютної швидкості краплин дощу на склі визначається за формулою

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

де $V_e = 72$ км/год.

З рис. 14.55 впливає така залежність:

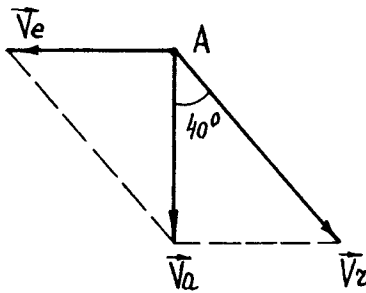


Рис. 14.55

$$V_a = \frac{V_e}{\operatorname{tg} 40^\circ} = \frac{72}{0,839} = 85,8 \text{ (км/год)} = 23,8 \text{ (м/с)}.$$

Задача 14.60. Центр ваги C однорідного стрижня, що має довжину $2l = 50$ см, падає з деякої висоти у вертикальній площині (рис. 14.56). Рівняння руху центра C мають вигляд $x_c = 15t$, $y_c = 5t^2$ (t — у секундах; x_c , y_c — у метрах). При падінні стрижень рівномірно обертається навколо центра C з кутовою швидкістю $\omega = \frac{11}{3}$ об/с. Визначити в момент $t = 2$ с швидкість точки M стрижня, якщо у початковий момент руху стрижень займав положення, що подано на рис. 14.56.

Розв'язання. Визначаємо положення стрижня і точки M у момент часу $t = 2$ с:

$$x_c = 15t = 15 \cdot 2 = 30 \text{ (м)};$$

$$y_c = 5t^2 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (м)};$$

$$\varphi = \omega t = \frac{11}{3} \cdot 2 = \frac{22}{3} \text{ (об)}.$$

Вектор абсолютної швидкості точки M у момент часу $t = 2$ с визначається за формулою

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

де

$$V_r = \omega MC = l\omega = 0,25 \cdot \frac{22}{3} \pi = 5,76 \text{ (м/с)},$$

оскільки $\omega = 2\pi n$;

$$V_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ (м/с)};$$

$$\cos \alpha = \frac{V_{cx}}{V_c} = \frac{\dot{x}}{V_c} = \frac{15}{25} = 0,6; \quad \alpha = 53,13^\circ.$$

З рис. 14.56 випливає, що величина вектора \vec{V}_a

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos 66,87^\circ} = \sqrt{5,76^2 + 25^2 + 2 \cdot 5,76 \cdot 25 \cdot 0,393} = 27,8 \text{ (м/с)}.$$

Задача 14.61. Точка M рухається вздовж півпрямой OB за законом $S = 2t^2 + t$ (S — у метрах, t — у секундах). Півпряма AB обертається навколо осі Oz , що проходить через точку O перпендикулярно до площини рисунка, зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 4 \frac{1}{c}$ (рис. 14.57). Визначити абсолютну швидкість точки M у момент часу $t = 0,5$ с.

Розв'язання. Визначаємо положення точки M на прямій OB у момент часу $t = 0,5$ с:

$$S = 2t^2 + t = 2 \cdot 0,5^2 + 0,5 = 1 \text{ (м)}.$$

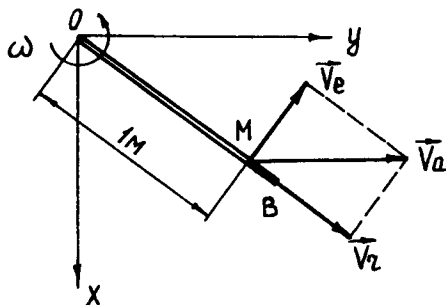


Рис. 14.57

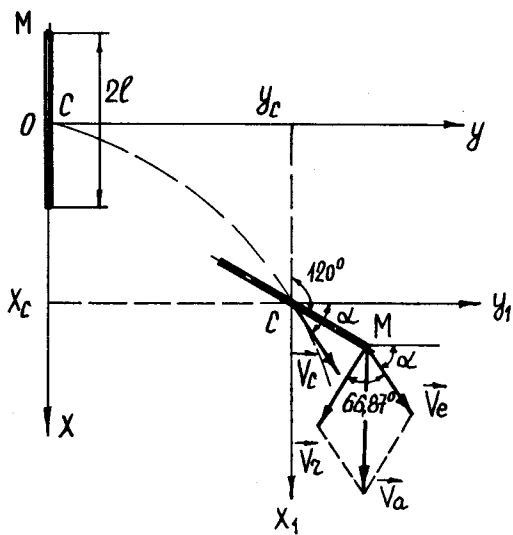


Рис. 14.56

Вектор абсолютної швидкості точки M визначається за формулою

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

де

$$V_e = \omega S = 4 \cdot 1 = 4 \text{ (м/с)};$$

$$V_r = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 + t) = 4t + 1 \text{ (м/с)}.$$

При $t = 0,5$ с відносна швидкість точки M

$$V_r = 4t + 1 = 4 \cdot 0,5 + 1 = 3 \text{ (м/с)}.$$

З рис. 14.57 випливає, що величина абсолютної швидкості точки M

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (м/с)}.$$

Задача 14.62. У гідравлічній турбіні рідина потрапляє до робочого колеса зі швидкістю $V_a = 15$ м/с під кутом 60° до радіуса робочого колеса (рис. 14.58). Радіус робочого колеса $R = 2$ м. Кутова швидкість колеса $n = 30$ об/хв. Визначити відносну швидкість частки рідини M у момент її входу до колеса.

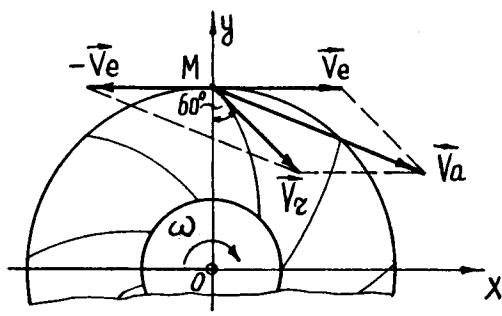


Рис. 14.58

Розв'язання. Вектор абсолютної швидкості частки M визначається за формулою

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

звідки

$$\vec{V}_r = \vec{V}_a + (-\vec{V}_e),$$

де

$$V_a = 15 \text{ (м/с)};$$

$$V_e = \omega R = \frac{\pi n}{30} \cdot R = \frac{3,14 \cdot 30}{30} \cdot 2 = 6,28 \text{ (м/с)}.$$

З рис. 14.58 випливає, що відносна швидкість частки M

$$\begin{aligned} V_r &= \sqrt{(-V_e)^2 + V_a^2 - 2(-V_e)V_a \cos 150^\circ} = \\ &= \sqrt{6,28^2 + 15^2 - 2 \cdot 6,28 \cdot 15 \cdot 0,866} = 10,1 \text{ (м/с)}. \end{aligned}$$

Задача 14.63. Точка M рухається за законом $OM = S = 5t^2$ см уздовж горизонтального стрижня, що обертається навколо осі O_1z (рис. 14.59). Кутове прискорення стрижня стає: $\varepsilon = 1 \frac{1}{c^2}$.

Визначити абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = 2$ с, якщо при $t = 0$ кутова швидкість стрижня $\omega_0 = 0$.

Розв'язання. Визначаємо положення точки M у момент часу $t = 2$ с:

$$OM = S = 5t^2 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (см)}.$$

Вектор абсолютного прискорення точки M (рис. 14.59) у момент часу $t = 2$ с визначається за формулою

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e^{o6} + \vec{W}_e^{дооc} + \vec{W}_c,$$

де

$$W_r = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(5t^2) = 10 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$W_e^{дооc} = \omega_e^2 S = (\varepsilon_e t)^2 S = 80 \text{ (см/с}^2\text{)}, \text{ оскільки } \omega_e = \omega_0 + \varepsilon t \text{ і } \omega_0 = 0;$$

$$W_e^{o6} = \varepsilon_e S = 1 \cdot 20 = 20 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 2\varepsilon t \frac{dS}{dt} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 = 80 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$\text{оскільки } \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 1 \text{ і } V_r = \frac{dS}{dt}.$$

З рис. 14.59 випливає, що величина абсолютного прискорення точки M

$$W_a = \sqrt{(W_e^{дооc} - W_r)^2 + (W_e^{o6} + W_c)^2} = \sqrt{(80 - 10)^2 + (20 + 80)^2} = 122,1 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

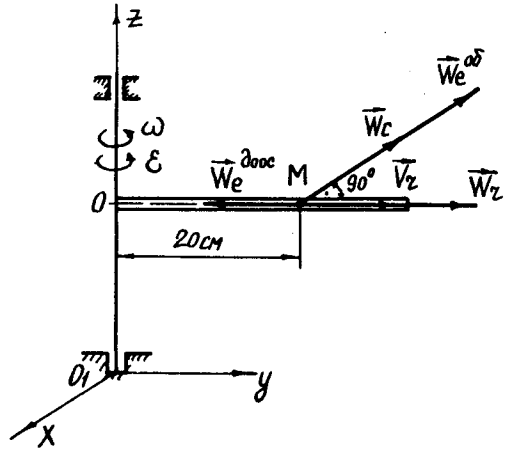


Рис. 14.59

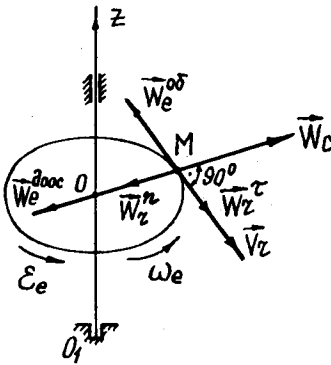


Рис. 14.60

Задача 14.64. Точка M рухається за законом $S = \frac{1}{2}t^2$ см по ободу горизонтального диска, радіус якого $R = 12$ см (рис. 14.60). Диск обертається навколо центральної вертикальної осі O_1z за законом $\varphi = \frac{1}{4}t^2$ рад у напрямі, протилежному до напрямку руху точки M . Визначити абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = 2, 4$ с.

Розв'язання. Вектор абсолютного прискорення точки M у момент часу $t = 2, 4$ с визначається за формулою

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r^\tau + \vec{W}_r^n + \vec{W}_e^{o6} + \vec{W}_e^{\text{дооc}} + \vec{W}_c,$$

де

$$W_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} = \frac{2,4^2}{12} = 0,48 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$W_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt}(t) = 1 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$W_e^{o6} = \varepsilon_e R = \frac{d(\omega_e)}{dt} R = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{4}t^2\right) R = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$W_e^{\text{дооc}} = \omega_e^2 R = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 R = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4}t^2\right) = 1,2^2 \cdot 12 = 17,3 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\omega_e, \vec{V}_r}) = 2 \cdot 1,2 \cdot 2,4 = 5,76 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

оскільки $\sin(\widehat{\omega_e, \vec{V}_r}) = 1$ і $V_r = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}t^2\right) = t = 2,4$ (см/с).

З рис. 14.60 випливає, що величина абсолютного прискорення точки M

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{(W_c - W_r^n - W_e^{\text{дооc}})^2 + (W_e^{o6} - W_r^\tau)^2} = \\ &= \sqrt{(5,76 - 0,48 - 17,3)^2 + (6 - 1)^2} = 13 \text{ (см/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Задача 14.65. Точка M рухається за законом $OM = S = 2t^2$ см уздовж твірної колового конуса, що обертається навколо осі O_1z за законом $\varphi = \frac{2}{3}t^3$ (рис. 14.61). Кут при вершині конуса дорівнює 60° . Визначити абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = 3$ с.

Розв'язання. Визначаємо положення точки M на конусі в момент часу $t = 3$ с:

$$OM = S = 2t^2 = 2 \cdot 9 = 18 \text{ (см);}$$

$$MK = OM \sin 30^\circ = 18 \cdot 0,5 = 9 \text{ (см).}$$

Вектор абсолютного прискорення точки M у момент часу $t = 3$ с визначається за формулою

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e^{o6} + \vec{W}_e^{\text{дооc}} + \vec{W}_c,$$

де

$$W_r = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(2t^2) = 4 \text{ (см/с}^2\text{);}$$

$$W_e^{o6} = \varepsilon_e MK = \frac{d^2\varphi}{dt^2} MK = 4t \cdot 9 = 12 \cdot 9 = 108 \text{ (см/с}^2\text{);}$$

$$W_e^{\text{дооc}} = \omega_e^2 MK = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 MK = (2t^2)^2 \cdot 9 = 18^2 \cdot 9 = 2916 \text{ (см/с}^2\text{);}$$

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 2 \cdot 2t^2 \cdot 4t \sin 120^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 0,866 = 374 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Проекції вектора \vec{W}_a на осі координат $Mx_1y_1z_1$ такі:

$$W_{x_1} = -W_e^{o6} - W_c = -108 - 374 = -482,1 \text{ (см/с}^2\text{);}$$

$$W_{y_1} = -W_e^{\text{дооc}} = -2916 \text{ (см/с}^2\text{);}$$

$$W_{z_1} = -W_r \cos 30^\circ = -3,46 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Величина абсолютного прискорення точки M

$$W_a = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{(-482,1)^2 + (-2916)^2 + (-3,46)^2} = 2955,6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

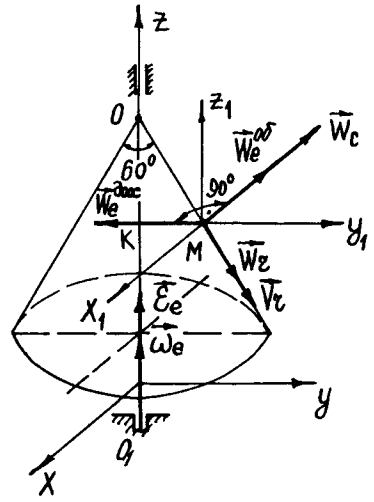


Рис. 14.61

Напрямні косинуси вектора \vec{W}_a в системі координат $Mx_1y_1z_1$ визначають за формулами:

$$\cos(\widehat{\vec{W}_a, x_1}) = \frac{W_{x_1}}{W} = -\frac{482,1}{2955,6} = -0,1631; \quad (\widehat{\vec{W}_a, x_1}) = 99,4^\circ;$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}_a, y_1}) = \frac{W_{y_1}}{W} = -\frac{2916}{2955,6} = -0,9866; \quad (\widehat{\vec{W}_a, y_1}) = 170,6^\circ;$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}_a, z_1}) = \frac{W_{z_1}}{W} = -\frac{3,46}{2955,6} = -0,0012; \quad (\widehat{\vec{W}_a, z_1}) = 90^\circ.$$

Задача 14.66. Прямокутник $ABCD$ обертається навколо осі Oz зі сталою кутовою швидкістю $\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{c}$ (рис. 14.62). Вздовж сторони AB рухається точка

M за законом $AM = z = a \sin \frac{\pi}{4} t$ см; $DA = CB = a$ см. Визначити абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = 1$ с.

Розв'язання. Вектор абсолютного прискорення точки M у момент часу $t = 1$ с визначається за формулою

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e^{o6} + \vec{W}_e^{\text{дооc}} + \vec{W}_c,$$

де

$$W_r = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(a \sin \frac{\pi}{2} t \right) = -a \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi t}{2} = -\frac{a\pi^2}{4};$$

$$W_e^{o6} = \varepsilon_e DA = 0, \text{ оскільки } \omega_e = \text{const};$$

$$W_e^{\text{дооc}} = \omega_e^2 DA = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 a = \frac{a\pi^2}{4};$$

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 0, \text{ оскільки вектори } \vec{\omega}_e \text{ і } \vec{V}_r \text{ паралельні.}$$

Отже,

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e^{\text{дооc}}.$$

З рис. 14.62 випливає, що величина абсолютного прискорення точки

$$W_a = \sqrt{W_r^2 + (W_e^{\text{дооc}})^2} = \sqrt{\left(-\frac{a\pi^2}{4} \right)^2 + \left(\frac{a\pi^2}{4} \right)^2} = \frac{a\pi^2}{4} \sqrt{2} \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

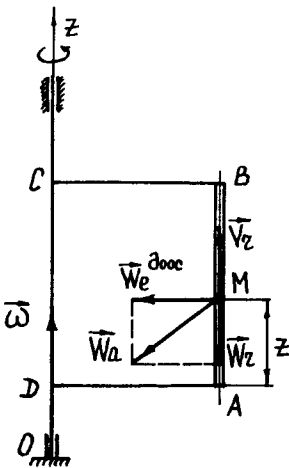


Рис. 14.62

Задача 14.67. Автомобіль на прямолінійній ділянці шляху рухається з прискоренням $W_0 = 2 \text{ м/с}^2$ (рис. 14.63). На поздовжньому валу автомобіля насаджений маховичок радіусом $R = 0,25 \text{ м}$, який має в даний момент часу

кутову швидкість $\omega = 4 \frac{1}{\text{с}}$ і кутове прискорення

$\epsilon = 4 \frac{1}{\text{с}^2}$. Визначити абсолютне прискорення точки M обода маховичка в даний момент часу.

Розв'язання. Вектор абсолютного прискорення точки M у даний момент часу

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r^{об} + \vec{W}_r^{доос} + \vec{W}_e + \vec{W}_c,$$

де

$$W_r^{об} = \epsilon R = 4 \cdot 0,25 = 1 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_r^{доос} = \omega^2 R = 16 \cdot 0,25 = 4 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_e = W_0 = 2 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 0,$$

оскільки переносний рух поступальний.

З рис. 14.63 випливає, що величина абсолютного прискорення точки

$$W_a = \sqrt{(W_r^{об})^2 + (W_r^{доос})^2 + W_e^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = 4,58 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача 14.68. В епіцентричній передачі ведуча шестірня, що має радіус R , обертається проти руху стрілки годинника з кутовою швидкістю ω_0 і кутовим прискоренням ϵ_0 (рис. 14.64); кривошип, що має довжину $3R$, обертається навколо її осі за годинниковою стрілкою з кутовою швидкістю ω_0 і кутовим прискоренням ϵ_0 . Знайти швидкість і прискорення точки M веденої шестірні, що має радіус R . Точка M лежить на кінці діаметра, перпендикулярного в даний момент часу до кривошипа.

Розв'язання. Визначаємо абсолютну кутову швидкість шестірні 2:

$$\frac{\omega_0 - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} = -\frac{R}{2R}; \quad \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{2R}{R},$$

звідки дістанемо

$$\omega_1 = \omega_0; \quad \omega_2 = \omega_0.$$

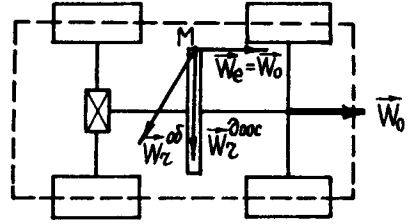


Рис. 14.63

Вектор абсолютної швидкості точки M

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA},$$

де

$$V_A = 3\omega_0 R;$$

$$V_{MA} = \omega_2 R = \omega_0 R.$$

Величина абсолютної швидкості точки M

$$V_A = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2} = \sqrt{(3\omega_0 R)^2 + (\omega_0 R)^2} = \sqrt{10} R \omega_0.$$

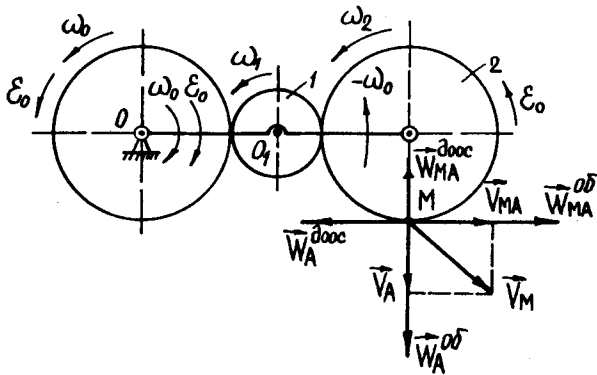
Вектор абсолютного прискорення точки M 

Рис. 14.64

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A^{об} + \vec{W}_A^{доос} + \vec{W}_{MA}^{об} + \vec{W}_{MA}^{доос},$$

де

$$W_A^{об} = 3\varepsilon_0 R;$$

$$W_A^{доос} = 3\omega_0^2 R;$$

$$W_{MA}^{об} = \varepsilon_0 R;$$

$$W_{MA}^{доос} = \omega^2 R = \omega_0^2 R,$$

оскільки кутове прискорення шестірни 2 дорівнює ε_0 .

З рис. 14.64 випливає, що величина абсолютного прискорення точки M

$$\begin{aligned} W_M &= \sqrt{(W_A^{об} - W_{MA}^{доос})^2 + (W_A^{доос} - W_{MA}^{об})^2} = \sqrt{(3\varepsilon_0 R - \omega_0^2 R)^2 + (3\omega_0^2 R - \varepsilon_0 R)^2} = \\ &= R\sqrt{10(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\omega_0^2 \varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Глава 15

ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

15.1. Визначення положення і руху суцільного середовища.

Змінні Лагранжа¹ і Ейлера

Своєрідність моделі суцільного середовища (див. розділ “Статика”, параграф 9.11) змушує застосовувати особливі способи визначення її положення і руху відносно даної системи відліку.

Розглянемо спосіб визначення положення і руху суцільного середовища, запропонований Лагранжем. Для цього скористаємося звичайним для кінематики точки прийомом задання координат окремих точок як функцій часу. Для суцільного середовища це функції координат окремих часток суцільного середовища за часом. Щоб індивідуалізувати такі рівняння для різних часток, необхідно якось відділити дану частку від інших. Лагранж запропонував як параметри, що визначають вибір частки середовища, брати її декартові або будь-які криволінійні координати q_1, q_2, q_3 (див. параграф 11.7) у початковий момент часу $t = t_0$. Тоді рівняння руху будь-якої частки середовища відносно системи відліку, що визначається декартовою системою координат, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}x &= x(t; q_1, q_2, q_3); \\y &= y(t; q_1, q_2, q_3); \\z &= z(t; q_1, q_2, q_3).\end{aligned}\tag{15.1}$$

¹ Жозеф Луї Лагранж (1736—1813) — французький математик і механік, член Берлінської і Паризької академії наук, почесний член Петербурзької академії наук.

Рівняння (15.1) визначають декартові координати частки суцільного середовища, що має початкові координати q_1, q_2, q_3 у довільний момент часу t . Радіус-вектор частки буде визначатися за формулою

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}(t; q_1, q_2, q_3), \quad (15.2)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори декартової системи координат.

Вибір координат q_1, q_2, q_3 підпорядковується умові взаємної однозначності між q_1, q_2, q_3 і x, y, z , тобто рівняння (15.1) однозначно розв'язуються відносно змінних q_1, q_2, q_3 :

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(t; x, y, z); \\ q_2 &= q_2(t; x, y, z); \\ q_3 &= q_3(t; x, y, z). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Рівняння (15.3) визначають, де розміщувалася у початковий момент часу $t = t_0$ частка середовища, декартові координати якої дорівнюють x, y і z .

Сукупність значень q_1, q_2, q_3 і t називається *змінними Лагранжа*.

Щоб визначити швидкість і прискорення частки суцільного середовища в довільний момент часу за методом Лагранжа, необхідно визначити першу і другу похідні за часом від функцій (15.1), тобто визначити проекції векторів швидкості і прискорення частки на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d[x(t; q_1, q_2, q_3)]}{dt}; \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d[y(t; q_1, q_2, q_3)]}{dt}; \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{d[z(t; q_1, q_2, q_3)]}{dt}; \end{aligned} \quad (15.4)$$

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2[x(t; q_1, q_2, q_3)]}{dt^2}; \\ W_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2[y(t; q_1, q_2, q_3)]}{dt^2}; \\ W_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2[z(t; q_1, q_2, q_3)]}{dt^2}. \end{aligned} \quad (15.4 \text{ a})$$

Знаючи проекції векторів швидкості і прискорення частки середовища на осі координат, величину швидкості і прискорення частки визначають за формулами:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \tag{15.5}$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}. \tag{15.6}$$

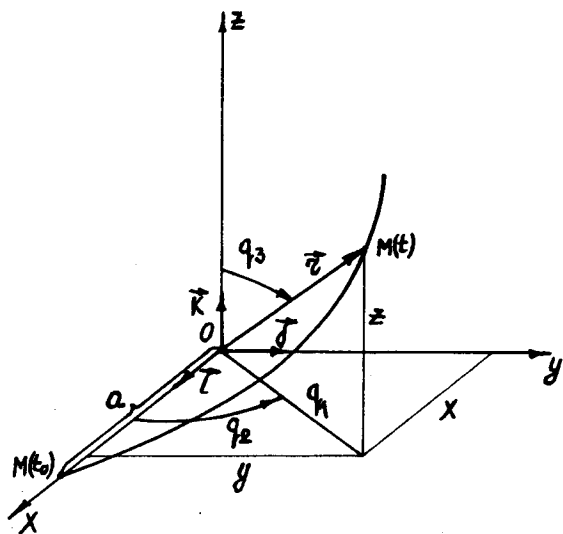


Рис. 15.1

Для пояснення викладених положень розглянемо такий приклад. Нехай частка M суцільного середовища рухається відносно системи відліку, що визначається декартовою системою координат $Oxyz$ (рис. 15.1), відповідно до рівнянь:

$$\begin{aligned} x &= q_1 \cos^2 \frac{kt}{2}; \\ y &= \frac{q_1}{2} \sin kt; \\ z &= q_1 \sin \frac{kt}{2}. \end{aligned} \tag{A}$$

Рівняння (A) аналогічні рівнянням (15.1) і визначають декартові координати частки середовища M , що має у початковий момент часу $t = t_0 = 0$ криволінійні координати (рис. 15.1):

$$q_1 = a; \quad q_2 = 0; \quad q_3 = 90^\circ. \tag{B}$$

Рівняння

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ q_2 &= \arctg \frac{y}{x}; \\ q_3 &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \tag{B}$$

аналогічні рівнянням (15.3) і виражають умову взаємної однозначності між фіксованими криволінійними координатами початкового положення частки M і її декартовими координатами у довільний момент часу.

Проекції векторів швидкості і прискорення на осі координат $Oxyz$ знайдемо на підставі рівнянь (15.4):

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(q_1 \cos^2 \frac{kt}{2} \right) = -\frac{q_1 k}{2} \sin kt;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q_1}{2} \sin kt \right) = \frac{q_1 k}{2} \cos kt;$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left(q_1 \sin \frac{kt}{2} \right) = \frac{q_1 k}{2} \cos \frac{kt}{2};$$

$$W_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{q_1 k}{2} \sin kt \right) = -\frac{q_1 k^2}{2} \cos kt; \quad (\Gamma)$$

$$W_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q_1 k}{2} \cos kt \right) = -\frac{q_1 k^2}{2} \sin kt;$$

$$W_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q_1 k}{2} \cos \frac{kt}{2} \right) = -\frac{q_1 k^2}{4} \sin \frac{kt}{2}.$$

Величину швидкості і прискорення частки M середовища у довільний момент часу визначаємо за формулами (15.5) і (15.6):

$$V = \sqrt{\left(-\frac{q_1 k}{2} \sin kt \right)^2 + \left(\frac{q_1 k}{2} \cos kt \right)^2 + \left(\frac{q_1 k}{2} \cos \frac{kt}{2} \right)^2} = \frac{q_1 k}{2} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{kt}{2}}; \quad (\Delta)$$

$$W = \sqrt{\left(-\frac{q_1 k^2}{2} \cos kt \right)^2 + \left(-\frac{q_1 k^2}{2} \sin kt \right)^2 + \left(-\frac{q_1 k^2}{4} \sin \frac{kt}{2} \right)^2} = \frac{q_1 k^2}{4} \sqrt{4 + \sin^2 \frac{kt}{2}}.$$

Рух суцільного середовища можна вивчати не тільки за рухом його окремих часток. Можна виділити у просторі, яке зайнято середовищем, що рухається, деяку область системи відліку і спостерігати за кінематичними характеристиками різних часток середовища, які неперервно прямують одна за одною через фіксовані точки області. Такий метод дослідження був запропонований Ейлером; він має велике значення для розв'язання практичних задач. За методом Ейлера в деякий момент часу фіксуються швидкості руху часток для усіх часток середовища області, що розглядається. Картина руху середовища у фіксований момент часу повністю окреслює сукупність векторів швидкостей, відкладених за величиною та напрямом у відповідних точках області. Ця система векторів, що характеризує рух середовища в певний момент часу, називається *полем швидкостей*. Якщо поле швидкостей змінюється з часом, то воно називається *нестационарним*, а рух середовища — *неусталеним*. Для усталеного руху середовища поле швидкостей є *незмінним*, або *стационарним*.

Таким чином, якщо взяти фіксовану точку системи відліку з координатами x, y, z , то швидкості різних часток середовища, які проходять через цю точку, будуть функціями координат цієї точки і часу. Отже,

$$\vec{V} = \vec{V}(t; x, y, z). \quad (15.7)$$

Рівняння (15.7) визначає поле швидкостей в даній області системи відліку в будь-який момент часу.

Сукупність значень x, y, z і t називається *змінними Ейлера*.

Розглянемо фізичну різницю між змінними Лагранжа і Ейлера. Для цього розглянемо рівняння (15.1) під двома кутами зору:

1) якщо вважати змінними x, y, z і фіксованими q_1, q_2, q_3 (метод Лагранжа), то дістанемо рівняння, що характеризують кінцеві переміщення частки відносно деякої системи відліку, початкове положення якої визначається нерухомим простором змінних Ейлера. В результаті одержуємо рівняння траєкторії частки. Щоб дістати швидкість частки, треба використати рівняння (15.5);

2) якщо вважати фіксованими x, y, z і змінними q_1, q_2, q_3 (метод Ейлера), то одержуємо рівняння, що характеризують швидкість проходження часток через фіксовану точку простору.

Дійсно, якщо спроекціювати рівняння (15.7) на осі декартової системи координат, матимемо:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = V_x(t; q_1, q_2, q_3); \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = V_y(t; q_1, q_2, q_3); \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = V_z(t; q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \quad (15.8)$$

Тому щоб з'ясувати кінематичну характеристику руху часток і траєкторію, необхідно проінтегрувати рівняння (15.8) і підставити початкові умови, які визначаються системою таких параметрів:

$$t = t_0 = 0, \quad c_1 = q_1, \quad c_2 = q_2, \quad c_3 = q_3. \quad (15.9)$$

Таким чином, одержуємо рівняння траєкторії за Лагранжем (15.1).

Зв'яжемо траєкторії руху окремих часток середовища з полем швидкостей, яке утворюється під час цього руху. Розглянемо у просторі, в якому рухається суцільне середовище, точку M , що має координати x, y, z та швидкість \vec{V} (рис. 15.2). На вектор швидкості нанесемо точку M_1 з координатами $x + dx, y + dy, z + dz$. Нехай ця точка буде точкою прикладання нового вектора \vec{V}_1 , який буде відрізнятися від вектора \vec{V} величиною та напрямом. Якщо таким чином брати точки M_2, M_3, \dots , то дістанемо у просторі, в яко-

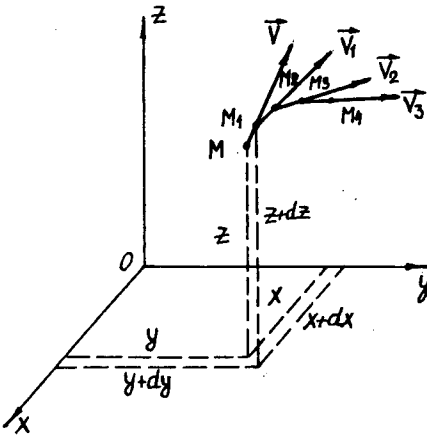


Рис. 15.2

му рухається суцільне середовище, деяку ламану лінію M, M_1, M_2, \dots . Сторони цієї ламаної лінії, побудовані для одного моменту часу, будуть збігатися з напрямом відповідних векторів швидкостей (рис. 15.2). За умови, що відстані між точками M, M_1, M_2, \dots нескінченно малі, дістанемо просторову криву, яка має таку властивість: дотична до цієї лінії у кожній її точці буде збігатися з напрямом вектора швидкості середовища, що рухається в цій точці. Побудована таким чином лінія називається *лінією течії*.

Залежності між компонентами швидкостей та довжиною відрізків dx, dy, dz (рис. 15.2)

для будь-якої точки простору можуть бути визначені так:

$$\frac{dx}{dt} = V_x; \quad \frac{dy}{dt} = V_y; \quad \frac{dz}{dt} = V_z, \quad (15.10)$$

де dt — час, що потрібний для проходження відповідною часткою середовища відрізків dx, dy, dz .

Виключаючи з рівнянь (15.10) елемент часу, дістанемо диференціальні рівняння лінії течії

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}. \quad (15.11)$$

З розглянутого випливає основна відміна між траєкторією частки і лінією течії середовища. **Траєкторія руху частки** — це її геометричний образ руху за скінченний відрізок часу. **Лінія течії** — це геометричний образ руху сукупності різних часток середовища, що проходять через дану точку простору за нескінченно малий відрізок часу.

Значимо, що тільки у випадку усталеного руху, коли в кожній точці системи відліку ні величина, ні напрям вектора швидкості руху часток середовища не змінюється з часом, лінія течії буде траєкторією руху цих часток.

15.2. Основні характеристики механічного руху суцільного середовища

Диференціальним рівнянням (15.11) можна надати такого вигляду:

$$\begin{aligned} V_x dy - V_y dx &= 0; \\ V_y dz - V_z dy &= 0; \\ V_z dx - V_x dz &= 0. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Якщо рух суцільного середовища відбувається так, що лінія течії залишається завжди в одній площині, то кількість рівнянь (15.12) зменшується. Наприклад, якщо лінія течії буде розташовуватися тільки в площині xOy , то матимемо одне рівняння (15.12):

$$V_x dy - V_y dx = 0. \tag{15.13}$$

Якщо підібрати в системі відліку функцію $\psi(x, y)$, для якої

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x, \tag{15.14}$$

то рівняння лінії течії (15.13) набирає вигляду

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0, \tag{15.15}$$

або $d\psi = 0$, звідки $\psi = \text{const}$, оскільки ліва частина рівняння (15.15) є повним диференціалом ψ . Цей окремий випадок руху суцільного середовища будемо надалі називати *плоским рухом*.

Функція $\psi(x, y)$, що характеризує лінію течії при плоскому русі середовища, була вперше впроваджена Стоксом¹. Ця функція називається *функцією Стокса* або *функцією течії*.

Отже, кожна лінія течії, що розташовується в одній площині, може бути охарактеризована певним сталим значенням функції течії ψ . При переході від одної лінії течії до іншої у площині їх розташування значення функції течії, змінюючись, залишається сталим уздовж нової лінії течії.

Розглянемо поняття про струменясту модель руху суцільного середовища, що ґрунтується на понятті про лінії течії. Проведемо в даний момент часу в суцільному середовищі деякий довільний замкнений, не перетинний себе контур C (рис. 15.3). Через кожну точку цього контуру можна провести певну лінію течії. Сукупність цих ліній течії утворює поверхню течії. Частина суцільного середовища, що виділяється поверхнею течії, називається *трубкою течії*.

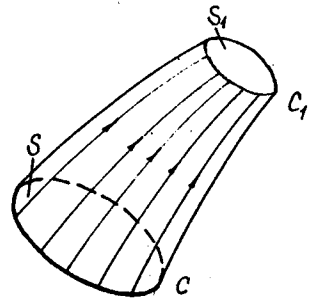


Рис. 15.3

Якщо контур C нескінченно малий, то трубка течії називається *елементарною*, в протилежному разі — *кінцевою*. Проводячи через контур C поверхню S , яка міститься у середині трубки течії і спирається на контур C , отримуємо переріз трубки течії. Якщо усі лінії течії розташовуються у середині трубки течії і на її

¹ Джордж Габріель Стокс (1819—1903) — англійський фізик і математик, член Лондонського королівського товариства.

поверхні перпендикулярно до її перерізу, то такий переріз називається *нормальним перерізом трубки течії*.

Трубка течії є простим і наочним кінематичним образом, що значно полегшує вивчення руху суцільного середовища. Якщо розбити усе середовище на достатньо вузькі трубки течії, можна на підставі основної властивості трубки — непроникності її бічної поверхні — вивчити нескінченно малі переміщення елементарного об'єму (частки) суцільного середовища вздовж трубки. Непроникність бічної поверхні трубки є наслідком того, що вектор швидкості часток середовища дотичний до поверхні трубки течії.

Струменем називається частина суцільного середовища, що обмежується поверхнею траєкторій точок замкненого контуру. У випадку усталеного руху середовища, коли лінії течії не відрізняються від траєкторій руху часток середовища, трубка течії збігається зі струменем. У цьому випадку, розбиваючи рухоме середовище на трубки течії, можна вивчити не тільки нескінченно малі переміщення часток суцільного середовища у середині трубок течії, а й їх рух за скінченний відрізок часу.

Елементарні трубки течії, яким би не було поле швидкостей, допускають проведення нормальних перерізів; при цьому з точністю до величин вищого порядку малості ці перерізи можна розглядати як плоскі. *Елементарна мала поверхня dS , що є поперечним перерізом елементарної трубки течії в площині, перпендикулярній до лінії течії, називається живим перерізом.* Очевидно, в загальному випадку розміри живих перерізів трубки течії можуть бути різними в межах довжини цієї трубки (рис. 15.3).

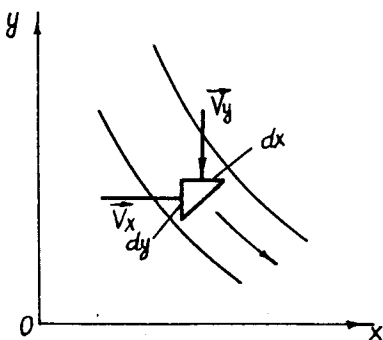


Рис. 15.4

Добуток площі живого перерізу трубки течії на швидкість часток середовища в трубці називається *елементарною витратою середовища або елементарним потоком швидкостей*. Елементарна витрата $d\dot{q} = \vec{V}dS$ — це об'єм середовища, що проходить через поперечний переріз трубки течії за одиницю часу.

Розглянемо витрату середовища, що проходить між двома нескінченно близькими лініями течії, у плоскому потоці на одиницю його ширини (рис. 15.4).

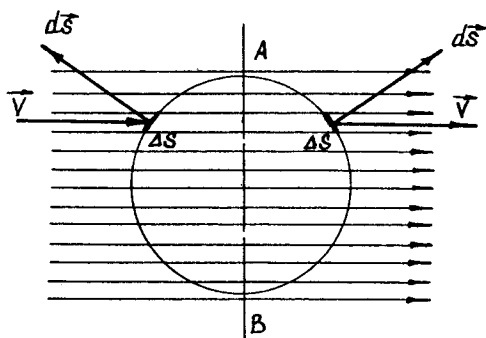


Рис. 15.5

З визначення лінії течії випливає, що надходження середовища крізь лінії течії неможливе. Отже, елементарна витрата середовища у будь-якому перерізі між лініями течії (рис. 15.5) може бути визначена за формулою

$$dq = V_x dy - V_y dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi, \quad (15.16)$$

де ψ — функція течії.

Інтегруючи вираз (15.16) у границях від ψ_1 до ψ_2 , здобудемо

$$q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1. \quad (15.17)$$

З виразу (15.17) випливає, що витрата середовища між двома довільними лініями течії в плоскому потоці дорівнює різниці значень відповідних функцій течії.

Вираз (15.17) розкриває фізичний зміст функції течії.

Значну частину реальних потоків суцільного середовища можна розглядати як усталену. Цією обставиною і пояснюється те, що в основу побудови механіки суцільного середовища покладено струменясту модель руху суцільного середовища. Відповідно до цієї моделі потік середовища розглядається як такий, що складається з ряду окремих струменів або трубок течії. Потік швидкості, або витрата середовища через поверхню перерізу потоку, у цьому випадку можна визначити за формулою

$$Q = \int_{(S)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} V_n dS = \int_{(S)} V_x dx dy + V_y dx dz + V_z dx dy, \quad (15.18)$$

де S — поверхня перерізу потоку середовища; $d\vec{S}$ — вектор напрямку, перпендикулярний до елементарної поверхні dS перерізу потоку; \vec{V} — вектор швидкості часток середовища; V_n — проекція вектора швидкості часток середовища на напрям вектора $d\vec{S}$.

Якщо поверхня перерізу потоку середовища замкнена, то за вектор напрямку $d\vec{S}$ береться зовнішня нормаль до цієї поверхні. При цьому умовно приймається, що об'єм середовища, що проходить через цю поверхню, буде додатним, а що надходить — від'ємним.

Потік швидкості, або витрата середовища, через деяку поверхню за одиницю часу є однією з найбільш істотних характеристик поля швидкостей.

У випадку одновимірного руху середовища, тобто коли потік середовища має напрям уздовж нормалі до поверхні перерізу потоку середовища, і вважаючи, що швидкість середовища однакова в усіх точках поверхні, дістанемо

$$Q = \int_{(S)} V dS \cos 90^\circ = VS, \quad (15.19)$$

де V — середня швидкість потоку середовища; S — поверхня перерізу потоку середовища.

У загальному випадку швидкості руху часток суцільного середовища в різних точках перерізу не однакові, оскільки вони залежать від координат цих точок. Тому середня швидкість — це абстрактна величина, вона являє собою уявну однакову для всіх точок перерізу швидкість часток середовища, за якої витрата середовища через переріз дорівнює фактичній її витраті при дійсних швидкостях часток середовища в різних точках перерізу.

Поняття середньої швидкості має винятково важливе значення для практики. Виокремимо в усталеному потоці ділянку, обмежену двома живими перерізами S і S_1 . Очевидно, витрата середовища через ці перерізи має дорівнювати сумі витрат середовища через елементарні трубки течії, що проходять через ці перерізи. При цьому кількість трубок, що проходять через переріз S , має дорівнювати кількості трубок, що проходять через переріз S_1 . Якщо на ділянці є кільцеві трубки, то вони не впливають на витрати середовища через перерізи S і S_1 . Тому витрата середовища через перерізи S і S_1 буде

$$Q = VS = V_1 S_1 = \text{const}, \quad (15.20)$$

де V і V_1 — середні швидкості часток середовища в перерізах S і S_1 .

Рівнянню (15.20) можна надати іншого вигляду:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{S_1}{S}. \quad (15.21)$$

З рівності (15.21) випливає, що в усталеному потоці середовища середня швидкість часток середовища у двох суміжних перерізах обернено пропорційна площинам цих перерізів.

Другою істотною характеристикою механічного руху суцільного середовища є поняття *циркуляції швидкості*. Циркуляція швидкості позначається літерою Γ і визначається як криволінійний інтеграл по замкненій кривій L із заданим напрямом обходу:

$$\Gamma = \oint_{(L)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_z V_x dx + V_y dy + V_z dz, \quad (15.22)$$

де S — поверхня, що обмежується кривою L .

Щоб з'ясувати фізичний зміст поняття циркуляції, розглянемо плоский потік середовища (рис. 15.5). Проведемо в потоці лінії течії (паралельні прями на рис. 15.5). Помістимо в площині потоку замкнений контур (коло на рис. 15.5). Кожна пара суміжних ліній течії вирізує на контурі дві симетрично розташовані малі дуги ΔS . До центра кожної із дуг перпендикулярно до неї поставимо вектор $d\vec{S}$. Модуль вектора $d\vec{S}$ дорівнює довжині дуги ΔS . Напрямок вектора $d\vec{S}$ збігається з напрямом зовнішньої нормалі до дуги ΔS . Вектор $d\vec{S}$ повністю визначає дугу ΔS . Скалярний добуток \vec{V} і $d\vec{S}$

$$\vec{V} \cdot d\vec{S} = V_n \Delta S \cos(\widehat{\vec{V}, d\vec{S}}) = V_n dS = dq, \quad (15.23)$$

де V_n — проекція вектора швидкості на напрям нормалі до елемента дуги ΔS ; q — елементарна витрата середовища через елемент дуги ΔS .

Витрата середовища по всьому замкненому контуру, тобто циркуляція швидкості,

$$\Gamma = \oint_{(L)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{(L)} dq. \quad (15.24)$$

У випадку, що розглядається, величини витрат середовища через кожен з пар дуг (рис. 15.5) будуть рівними, але будуть мати різні знаки, оскільки для дуги, що розташована ліворуч від вертикалі, $AB - \cos(\widehat{\vec{V}, d\vec{S}}) < 0$, а для дуги,

що розташована праворуч, — $\cos(\widehat{\vec{V}, d\vec{S}}) > 0$. Через симетрію розподілу швидкостей по контуру сумарні витрати через контур, що дорівнюють величині циркуляції, дорівнюють нулю, тобто $\Gamma = 0$. Якщо розподіл швидкостей по контуру асиметричний, то $\Gamma \neq 0$. Таким чином, *величина циркуляції швидкості* — це характеристика нерівномірності розподілу швидкостей по контуру тіла, що його обтікає потік середовища.

При русі суцільного середовища розрізняють суцільний, або неперервний, рух і переривчастий рух. При суцільному, або неперервному, русі середовища простір, в якому відбувається рух середовища, виявляється повністю зайнятим цим середовищем. При переривчастому русі цей простір виявляється поперемінно то зайнятим середовищем, то вільним від нього.

У випадку суцільного руху середовища справедливий закон збереження мас індивідуального об'єму суцільного середовища. Впровадимо поняття масової витрати середовища, тобто потоку маси, що проходить через замкнену поверхню:

$$M = \int_{(S)} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}. \quad (15.25)$$

На підставі закону збереження маси для будь-якої елементарної маси dm , що відповідає елементарному об'єму dv , будемо мати співвідношення

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho dv) = 0, \quad (15.26)$$

де ρ — густина середовища.

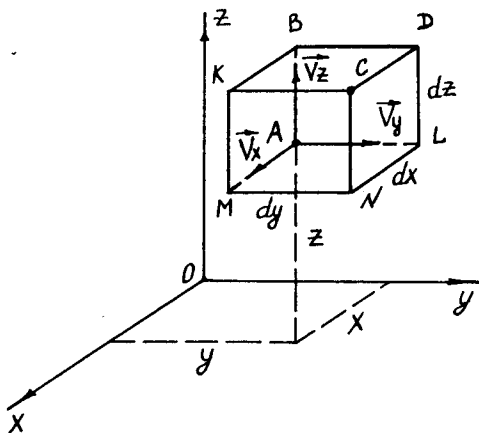


Рис. 15.6

Розглянемо в околі точки A суцільного середовища, що має декартові координати x, y, z (рис. 15.6), елементарний паралелепіпед.

Унаслідок малості розмірів паралелепіпеда можна вважати, що середні швидкості по його гранях характеризуються проєкціями вектора швидкості в точці A на осі координат V_x, V_y і V_z , що називаються *компонентами швидкості* в точці A .

Компоненти швидкості в точці C можна виразити так:

$$V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx;$$

$$V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy;$$

$$V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz.$$

Маса середовища, що надходить у середину паралелепіпеда через грань $ALDB$ за час dt , дорівнює

$$\rho V_x dy dz dt.$$

Маса середовища, що виходить з паралелепіпеда через грань $MNCK$ за час dt , дорівнює

$$\rho \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dy dz dt.$$

Перевищення витрати маси над її надходженням в паралелепіпед за напрямом осі Ox через грань $ALDB$ дорівнює

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Аналогічно знайдемо перевищення витрати маси в паралелепіпеді за напрямом осей Oy і Oz :

$$\rho \frac{\partial V_y}{\partial y} dx dy dz dt;$$

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Зміну маси паралелепіпеда за час dt за рахунок зміни густини середовища ρ можна визначити так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz.$$

Сумарна зміна масової витрати середовища за час dt

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt.$$

Враховуючи умову (15.26), перетворюємо останнє рівняння:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (15.27)$$

Рівняння (15.27) називається *диференціальним рівнянням нерозривності руху середовища*.

Якщо ввести

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (15.28)$$

тобто дивергенцію вектора швидкості \vec{V} , то рівняння (15.28) набуває вигляду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (15.29)$$

У випадку стаціонарного поля густини, тобто коли $\rho = \text{const}$, рівняння (15.29) набуває вигляду

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (15.30)$$

У випадку руху суцільного середовища змінної маси рівняння (15.29) набуває вигляду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = G, \quad (15.31)$$

де G — секундний об'ємний приріст (витрата) маси речовини.

15.3. Визначення прискорень часток суцільного середовища за методом Ейлера

Визначення прискорення окремих часток суцільного середовища за методом Лагранжа розглянуто в параграфі 15.1.

Розглянемо визначення прискорень окремих часток суцільного середовища за методом Ейлера.

Нехай у момент часу t частка середовища займає положення в системі відліку, що визначається радіусом-вектором \vec{r} , і має швидкість \vec{V} , тобто $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$.

У момент часу t_1 ця частка середовища, здійснивши рух у системі відліку, займає положення, що визначається радіусом-вектором \vec{r}_1 , і має швидкість \vec{V}_1 , тобто $\vec{V}_1 = \vec{V}(\vec{r}_1, t_1)$.

Оскільки $\vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}$, а $t_1 - t = \Delta t$, то $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$, $t_1 = t + \Delta t$.

Тоді $\vec{V}_1 = \vec{V}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t)$. Звідси приріст вектора швидкості $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ за час Δt становить: $\Delta\vec{V} = \vec{V}[(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - \vec{V}(\vec{r}, t)]$. Ділимо цю рівність на Δt і, переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, здобудемо

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - \vec{V}(\vec{r}, t)}{\Delta t},$$

або

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - \vec{V}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t) - \vec{V}(\vec{r}, t)}{\Delta t}.$$

Перша границя визначає частинну похідну від вектора швидкості частки середовища за часом:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - \vec{V}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}.$$

Друга границя визначає вектор швидкості частки середовища як складну функцію часу:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t) - \vec{V}(\vec{r}, t)}{\Delta t} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}, \end{aligned}$$

де $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ — символічний оператор.

Остаточного прискорення частки суцільного середовища за методом Ейлера визначається за формулою

$$\vec{W} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}. \quad (15.32)$$

Перший член у правій частині рівняння (15.32) називається *локальним прискоренням*, другий — *конвективним прискоренням*.

Проекціюючи векторну рівність (15.32) на осі декартової системи координат, здобудемо:

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}; \\ W_y &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}; \\ W_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (15.33)$$

15.4. Механізм руху суцільного середовища

Розглянемо рух суцільного середовища в нерухомій системі відліку, яка визначається декартовою системою координат $Oxyz$. Виокремимо в суцільному середовищі елементарний паралелепіпед, що має ребра dx , dy , dz , паралельні осям системи координат $Oxyz$ (див. рис. 15.6). Позначимо компоненти швидкості в точці A паралелепіпеда відповідно V_x , V_y , V_z .

Для спрощення вивчення механізму руху суцільного середовища будемо розглядати тільки усталений режим руху середовища при сталій її густині ($\rho = \text{const}$). У цьому випадку компоненти швидкості частки середовища в точці A паралелепіпеда є функціями тільки координат точки A :

$$\begin{aligned} V_x &= \varphi_1(x, y, z); \\ V_y &= \varphi_2(x, y, z); \\ V_z &= \varphi_3(x, y, z). \end{aligned} \quad (15.34)$$

Компоненти швидкості частки середовища в точці C паралелепіпеда (рис. 15.6), що має координати $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, будуть визначатися функціями:

$$\begin{aligned} V_{x_c} &= f_1(x + dx, y + dy, z + dz); \\ V_{y_c} &= f_2(x + dx, y + dy, z + dz); \\ V_{z_c} &= f_3(x + dx, y + dy, z + dz). \end{aligned} \quad (15.35)$$

Розкладемо вирази (15.35) у ряд Тейлора й обмежимося членами першого порядку:

$$\begin{aligned} V_{x_c} &= V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz; \\ V_{y_c} &= V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \frac{\partial V_y}{\partial z} dz; \\ V_{z_c} &= V_z + \frac{\partial V_z}{\partial x} dx + \frac{\partial V_z}{\partial y} dy + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (15.36)$$

Похідним $\frac{\partial V_x}{\partial y}$, $\frac{\partial V_x}{\partial z}$, $\frac{\partial V_y}{\partial x}$, $\frac{\partial V_y}{\partial z}$, $\frac{\partial V_z}{\partial x}$, $\frac{\partial V_z}{\partial y}$ можна надати вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial y} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right); & \frac{\partial V_x}{\partial z} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right); & \frac{\partial V_y}{\partial z} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right); & \frac{\partial V_z}{\partial y} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Беручи до уваги останні тотожності, виразам (15.36) надамо вигляду:

$$\begin{aligned} V_{x_c} &= V_x + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz - \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dy \right] + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \right]; \\ V_{y_c} &= V_y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx - \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dz \right] + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dz \right]; \\ V_{z_c} &= V_z + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy - \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dx \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (15.37)$$

Розглянемо фізичний зміст окремих додатків рівнянь (15.37). Якщо б усі частинні похідні від проекцій швидкості V_x , V_y , V_z частки середовища в рівняннях (15.37) дорівнювали б нулю, то ці рівняння набули б вигляду:

$$\begin{aligned} V_{x_c} &= V_x; \\ V_{y_c} &= V_y; \\ V_{z_c} &= V_z, \end{aligned}$$

тобто елементарний паралелепіпед можна було б розглядати як квазітвердий і такий, що здійснює поступальний рух.

Розглянемо піврізниці частинних похідних у рівняннях (15.37). Нехай частка A (рис. 15.7), яка розміщена в площині yOz , у кожний даний момент часу зазнає незалежних зміщень уздовж осей Oy і Oz , що дорівнюють ∂y і ∂z . Унаслідок цих незалежних зміщень частка A набуває відповідних швидкостей ∂V_y і ∂V_z . У випадку миттєвого повороту частки A відносно осі Ox швидкості ∂V_y і ∂V_z будуть такими:

$$\begin{aligned} \partial V_y &= -\omega_x \partial z; \\ \partial V_z &= \omega_x \partial y, \end{aligned}$$

де ω_x — миттєва кутова швидкість обертання частки A навколо осі Ox .

Підставляючи ці значення швидкостей у вираз піврізниці частинних похідних, матимемо

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} [\omega_x - (-\omega_x)] = \omega_x.$$

Аналогічно здобудемо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) &= \omega_y; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) &= \omega_z. \end{aligned}$$

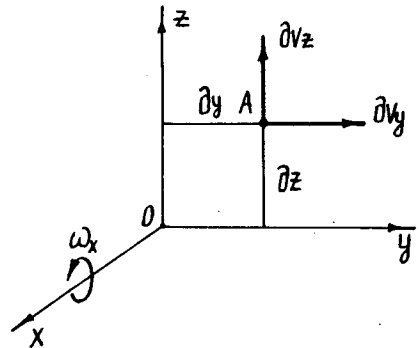


Рис. 15.7

Таким чином, піврізниці частинних похідних у рівняннях (15.37) є компонентами кутової швидкості обертання елементарного паралелепіпеда, який як абсолютно тверде тіло здійснює миттєві повороти відносно осей, що проходять через точку A паралельно осям системи координат $Oxyz$. Компоненти миттєвої кутової швидкості ω_x , ω_y , ω_z називаються *компонентами вихру швидкості* або просто компонентами вихру.

Введемо вектор, що має проекції на осі координат:

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (15.38)$$

і називається *вихром* або *ротором вектора* \vec{V} , тобто $\text{rot} \vec{V}$. Тоді різниці (15.38) набувають вигляду:

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = \text{rot}_x \vec{V}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = \text{rot}_y \vec{V}; \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = \text{rot}_z \vec{V}.$$

Враховуючи останні рівності, можна стверджувати, що вектор миттєвої кутової швидкості обертання елемента суцільного середовища

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}. \quad (15.39)$$

Члени

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \dot{\theta}_{xx}; \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} = \dot{\theta}_{yy}; \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \dot{\theta}_{zz} \quad (15.40)$$

є проекціями швидкості відносного подовження або стиснення ребер елементарного паралелепіпеда (рис. 15.8) уздовж відповідних осей координат.

Розглянемо півсуми частинних похідних у рівняннях (15.37). Ці півсуми є компонентами кутових деформацій двограних кутів елементарного паралелепіпеда відносно його ребер. Дійсно, розглянемо

грань $ABDL$ елементарного паралелепіпеда (рис. 15.8). Нехай ребрами AL і AB паралелепіпеда $ABDL$ будуть зміщення ∂y і ∂z . Тоді у вузлах B і L можна прикласти незалежні прирости швидкостей ∂V_y і ∂V_z , спричинені зміщеннями ∂y і ∂z . Унаслідок різниці швидкостей кутових точок паралелепіпеда відбувається переміщення грані AB прямокутника $ABDL$ у середину фігури в положення AB' , а грані AL — у положення AL' . Таким чином відбувається кутова деформація прямокутника $ABDL$ в паралелограм $AB'D'L'$. При цьому віднос-

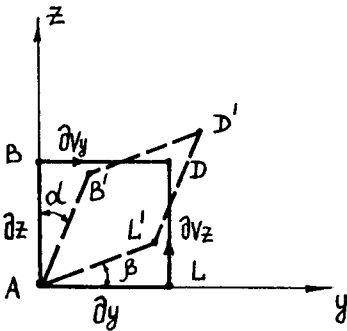


Рис. 15.8

не обертання граней AB і DL відбувається за напрямом руху годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\frac{\partial V_y}{\partial z}$, а граней BD і AL — проти руху годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\frac{\partial V_z}{\partial y}$.

Таким чином, суми кутових швидкостей

$$\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

визначають швидкості “скосу” прямих кутів елементарного паралелепіпеда частки суцільного середовища. При цьому не має значення, чи розглядається обертання грані AB відносно AL чи грані LA відносно AB . Тому надалі ці швидкості будемо позначати так:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{yz} = \dot{\theta}_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right); \\ \dot{\theta}_{xy} = \dot{\theta}_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right); \\ \dot{\theta}_{xz} = \dot{\theta}_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{15.41}$$

Сукупність дев'яти компонент відносних швидкостей деформацій $\dot{\theta}_{xx}$, $\dot{\theta}_{yy}$, $\dot{\theta}_{zz}$, $\dot{\theta}_{yz} = \dot{\theta}_{zy}$, $\dot{\theta}_{xy} = \dot{\theta}_{yx}$, $\dot{\theta}_{xz} = \dot{\theta}_{zx}$ визначають швидкість відносної деформації $\dot{\theta}$ всього елементарного паралелепіпеда (тензор відносних швидкостей деформацій). Тому можна записати:

$$\dot{\theta} = \begin{vmatrix} \dot{\theta}_{xx} & \dot{\theta}_{xy} & \dot{\theta}_{xz} \\ \dot{\theta}_{yx} & \dot{\theta}_{yy} & \dot{\theta}_{yz} \\ \dot{\theta}_{zx} & \dot{\theta}_{zy} & \dot{\theta}_{zz} \end{vmatrix}. \tag{15.42}$$

Підставляючи рівності (15.36), (15.37), (15.40), (15.41) у рівняння (15.37), здобудемо:

$$\begin{aligned} V_{x_c} &= V_x + (\omega_y dz - \omega_z dy) + (\dot{\theta}_{xx} dx + \dot{\theta}_{xy} dy + \dot{\theta}_{xz} dz); \\ V_{y_c} &= V_y + (\omega_z dx - \omega_x dz) + (\dot{\theta}_{yy} dy + \dot{\theta}_{yx} dy + \dot{\theta}_{yz} dz); \\ V_{z_c} &= V_z + (\omega_x dy - \omega_y dx) + (\dot{\theta}_{zz} dz + \dot{\theta}_{zx} dx + \dot{\theta}_{zy} dy). \end{aligned} \quad (15.43)$$

Рівняння (15.43) є відображенням теореми Коші — Гельмгольца¹: швидкість будь-якої точки елементарного об'єму суцільного середовища складається зі швидкості квазітвердого руху точок об'єму, що дорівнює сумі поступальної і обертальної швидкостей затверділого об'єму, і швидкості його деформації.

Рівнянням (15.43) можна надати іншого вигляду. Вирази $(\omega_y dz - \omega_z dy)$; $(\omega_z dx - \omega_x dz)$; $(\omega_x dy - \omega_y dx)$ є проєкціями векторного добутку $\vec{\omega} \times d\vec{r}$ на осі координат $Oxyz$, а вирази $(\dot{\theta}_{xx} dx + \dot{\theta}_{xy} dy + \dot{\theta}_{xz} dz)$; $(\dot{\theta}_{yy} dy + \dot{\theta}_{yx} dy + \dot{\theta}_{yz} dz)$; $(\dot{\theta}_{zz} dz + \dot{\theta}_{zx} dx + \dot{\theta}_{zy} dy)$ — скалярним добутком векторів $\dot{\theta} \cdot d\vec{r}$. Тоді рівняння (15.43) набирають вигляду

$$\vec{V}_c = \vec{V} + \vec{\omega} \times d\vec{r} + \dot{\theta} \cdot d\vec{r}. \quad (15.44)$$

Рівняння (15.44) є векторним відображенням теореми Коші — Гельмгольца.

15.5. Окремі випадки руху суцільного середовища

15.5.1. Незмінне середовище. Формула Ейлера

Розглянемо скінченний об'єм суцільного середовища. Нехай відстань між будь-якими двома точками цього об'єму не змінюється при його русі, тобто середовище рухається як тверде тіло.

Розіб'ємо уявно скінченний об'єм середовища на елементарні паралелепіпеди. Очевидно, за відсутності деформації об'єму всі компоненти відносної деформації елементарних паралелепіпедів, що характеризують “скіс” їх пря-

¹ Огюстен Луї Коші (1789—1857) — французький математик, член Паризької і Петербурзької академії наук.

Герман Людвіг Фердинанд Гельмгольц (1821—1894) — німецький фізик, математик, фізіолог і психолог.

мих кутів, дорівнюють нулю, тобто $\dot{\theta}_{xy} = \dot{\theta}_{yx} = \dot{\theta}_{xz} = \dot{\theta}_{zx} = \dot{\theta}_{yz} = \dot{\theta}_{zy} = 0$. Підставляючи ці значення в рівності (15.41), матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &= 0; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) &= 0; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (15.45)$$

З рівнянь (15.45) збудемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial y} &= -\frac{\partial V_y}{\partial z}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} &= -\frac{\partial V_x}{\partial y}; \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial V_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (15.46)$$

Беручи до уваги рівності (15.46), можна записати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (15.47)$$

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (15.48)$$

З рівнянь (15.48) випливає, що компоненти кутової швидкості миттєвого обертання частки суцільного середовища не залежать від координат цієї частки. Отже, вектор миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ також не залежить від координат, а є тільки функцією часу.

Оскільки в незмінному суцільному середовищі відносна швидкість деформації елементарних паралелепіпедів дорівнює нулю, тобто $\dot{\theta} = 0$, рівняння (15.44) набирає вигляду

$$\vec{V}_C = \vec{V} + \vec{\omega} \times d\vec{r},$$

або

$$d\vec{V} = \vec{\omega} \times d\vec{r}, \quad (15.49)$$

де $d\vec{V} = \vec{V}_C - \vec{V}$ — приріст швидкості часток середовища.

Інтегруючи рівняння (15.49):

$$\vec{V} - \vec{V}_0 = \int_0^{\vec{r}} \vec{\omega} \times d\vec{r} = \vec{\omega} \times \int_0^{\vec{r}} d\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

здобудемо

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (15.50)$$

Таким чином, отримано відому з кінематики твердого тіла формулу розподілу швидкостей точок твердого тіла [див. формулу (12.114)].

15.5.2. Потенціальний (безвихровий) рух суцільного середовища

Розглянемо рух суцільного середовища, для якого виконуються умови: компоненти вихру ω_x , ω_y , ω_z дорівнюють нулю. Щоб такий рух здійснювався, необхідно, щоб для усіх точок системи відліку, в якій рухається середовище, існували такі співвідношення [див. формули (15.36) і (15.37)]:

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y}. \quad (15.51)$$

За Ейлером усталений рух суцільного середовища визначається полем швидкостей, що характеризується функціями, за якими обчислюють швидкості часток суцільного середовища як функції координат точок поля. Віберемо функцію $\Phi(x, y, z)$ у системі відліку, що має такі властивості:

$$V_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad V_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad V_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (15.52)$$

Така функція буде задовольняти умову безвихрового руху середовища. Дійсно,

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x};$$

(15.53)

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z},$$

оскільки значення другої похідної від неперервної функції не залежить від порядку диференціювання.

Функція $\Phi(x, y, z)$, що задовольняє наведені умови, називається *потенціалом швидкостей*. Про швидкості безвихрового потоку середовища кажуть, що вони мають потенціал, а безвихровий потік називається потенціальним.

Для аналізу руху потенціального потоку розглянемо скалярний добуток

$$\vec{V} \cdot d\vec{r} = V_x dx + V_y dy + V_z dz. \tag{15.54}$$

Враховуючи потенціал швидкостей, формулі (15.54) надамо вигляду

$$\vec{V} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = -d\Phi. \tag{15.55}$$

Права частина виразу (15.55) є повним диференціалом, або повним приростом функції потенціалу швидкостей з від'ємним знаком при переході з одної точки системи відліку в іншу.

Виокремимо в потоці суцільного середовища поверхні, для яких в усіх їх точках функції потенціалу швидкостей мають однакові значення і які називаються *поверхнями рівного потенціалу*. Особливістю таких поверхонь є $d\Phi = 0$. Інтегруючи цю рівність, здобудемо $\Phi(x, y, z) = c = \text{const}$, тобто рівняння поверхонь рівного потенціалу.

Надаючи сталим інтегрування c різні значення $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$, можна здобути сім'ю поверхонь рівного потенціалу (рис. 15.9), які поділяють увесь простір системи відліку, зайнятий потенціальним потоком, на ряд зон, що розташовуються між поверхнями рівного потенціалу.

З'ясуємо, як розташовуються лінії течії при потенціальному русі суцільного середовища відносно поверхонь рівного потенціалу. Проведемо через точку M , що має декартові

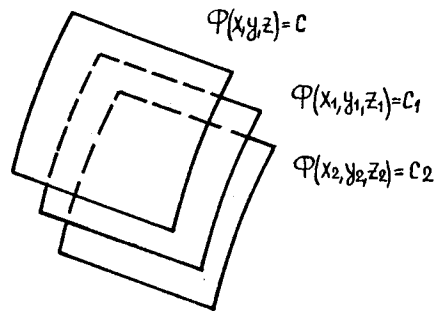


Рис. 15.9

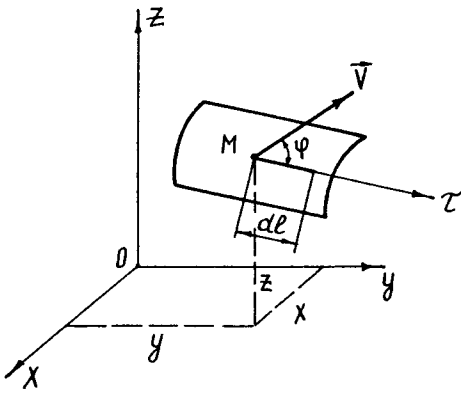


Рис. 15.10

координати x, y, z , деяку поверхню рівного потенціалу (рис. 15.10). Нехай косинуси кутів між додатним напрямком дотичної τ до цієї поверхні в точці M і осями координат $Oxyz$ такі:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dl}; \quad \cos \beta = \frac{dy}{dl}; \quad \cos \gamma = \frac{dz}{dl},$$

де dl — відрізок дотичної τ ; dx, dy, dz — проєкції dl на осі координат. Нехай також косинуси кутів між вектором швидкості частки середовища, що проходить через точку M , і осями координат $Oxyz$ такі:

$$\cos \alpha_1 = \frac{V_x}{V}; \quad \cos \beta_1 = \frac{V_y}{V}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{V_z}{V}.$$

Визначимо кут φ , що утворюється між вектором швидкості частки \vec{V} у точці M і дотичної τ (рис.15.10).

На підставі відомої формули аналітичної геометрії здобудемо

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 = \\ &= \frac{V_x}{V} \frac{dx}{dl} + \frac{V_y}{V} \frac{dy}{dl} + \frac{V_z}{V} \frac{dz}{dl} = \frac{V_x dx + V_y dy + V_z dz}{V dl}. \end{aligned} \quad (15.56)$$

Оскільки відрізок dl розташований на поверхні рівного потенціалу, то

$$V_x dx + V_y dy + V_z dz = d\varphi = 0,$$

звідки $\cos \varphi = 0$ і $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Отже, вектори швидкостей часток суцільного середовища при потенціальному русі середовища перпендикулярні до поверхонь рівного потенціалу. Оскільки ці вектори дотичні до ліній течії, то в потенціальному потоці середовища лінії течії також перпендикулярні до поверхонь рівного потенціалу швидкостей.

Таким чином, при потенціальному або безвихровому русі суцільного середовища спостерігається струменяста картина руху. Усі частки середовища рухаються по лініях течії, нормальних до поверхонь рівного потенціалу, і при цьому не зазнають ніяких обертань. Між функцією потенціалу швидкостей і функцією течії є така залежність:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (15.57)$$

Отже, уся кінематика при потенціальному русі середовища визначається потенціалом швидкостей $\Phi(x, y, z)$.

Здійснюючи відповідні математичні операції, можна визначити будь-яку кінематичну характеристику. Наприклад, найважливішою характеристикою суцільного середовища є рівняння нерозривності руху цього середовища, яке дуже просто можна виразити через функцію $\Phi(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (15.58)$$

У результаті одержано відоме у математиці рівняння Лапласа¹. Виходячи з властивостей цього рівняння, потенціал швидкостей має бути гармонічною функцією, єдиною для усіх точок середовища.

Звідси випливає, що є тільки одна форма потенціального руху суцільного середовища.

Розглянемо найпростіший випадок потенціального руху. Як приклад такого руху розглянемо потік середовища, що рухається в циліндричній трубі між перерізами S і S_1 зі швидкістю \vec{V} (рис. 15.11). Нехай вісь Ox буде віссю труби. Тоді, виходячи з моделі струменястого руху середовища, швидкості усіх часток середовища мають напрям уздовж осі Ox , тому $V_x = V$, $V_y = V_z = 0$. Тоді

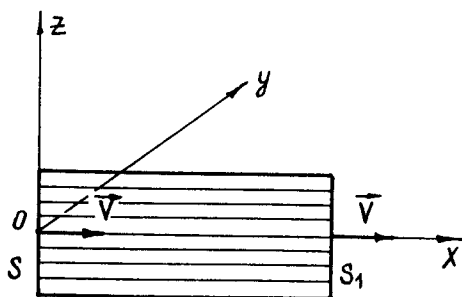


Рис. 15.11

$$V = V_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \text{const}; \quad V_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0; \quad V_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Отже, потік потенціальний, оскільки компоненти вихору ω_x , ω_y , ω_z дорівнюють нулю. Диференціальним рівнянням поверхні рівного потенціалу буде рівняння $d\Phi = Vdx = 0$, а рівняннями поверхні рівного потенціалу — $\Phi = Vx = c = \text{const}$.

¹ П'єр Сімон Лаплас (1749—1827) — французький математик, фізик і астроном, член Паризької академії наук, почесний член Петербурзької академії наук.

Поверхні рівного потенціалу, як це видно з останнього рівняння, є площинами, перпендикулярними до осі Ox . Сталі c спадають у напрямі руху. Лінії течії визначаються зі співвідношення

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

звідки $\psi = \text{const}$.

Таким чином, лінії течії — це прямі лінії, розташовані вздовж осі Ox . З рівності $dq = d\psi = 0$ маємо $q = \text{const}$, тобто витрата середовища через перерізи S і S_1 стала і $q = VS = V_1 S_1$.

15.5.3. Завихрений рух суцільного середовища

Рух суцільного середовища, який супроводжується обертанням часток середовища навколо деяких миттєвих осей обертання, називається завихреним рухом. Цей клас рухів характеризується тим, що $2\vec{\omega} = \text{rot}\vec{V} = \vec{0}$.

Розглянемо завихрений рух. Нехай точки, в яких вектор $\vec{\omega}$ відмінний від нуля, суцільно заповнюють деяку область системи відліку. У цьому випадку можна говорити про поле завихрювання, оскільки кожній точці цієї області відповідає свій вектор $\vec{\omega}$. Для наочного уявлення обертань часток суцільного середовища при завихреному русі середовища вводять векторні лінії поля кутових швидкостей, або поля вихру швидкостей: $\text{rot}\vec{V} = 2\vec{\omega}$. Ці векторні лінії називаються *вихровими лініями*.

Візьмемо в даний момент часу в околі точки M деякий елементарний об'єм, що обертається навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ (рис. 15.12). На векторі $\vec{\omega}_1$ на малій відстані від точки M візьмемо точку M_1 і побудуємо в цій точці вектор $\vec{\omega}_2$, тобто вектор миттєвої кутової швидкості обертання елементарного об'єму середовища в той самий момент часу в точці M_1 . Аналогічно візьмемо точки M_2, M_3, \dots . Якщо відстані між точками нескінченно малі, то отримана у такий спосіб крива називається *вихровою лінією*. Елементарні об'єми суцільного середовища, що розташовуються вздовж вихрової лінії, обертаються навколо осей дотичних до вихрової лінії у відповідних її точках, тобто вихрова лінія є криволінійною віссю обертання цих об'ємів. Проводячи вихрові лінії в точках системи відліку, через які проходить потік суцільного середовища, отримуємо вихрову поверхню у вигляді деякого контуру. Частина середовища, що обмежується вихровою поверхнею, проведеною через замкнений контур, називається *вихровою трубкою*. Якщо контур нескінченно малий, то вихрова трубка буде елементарною.

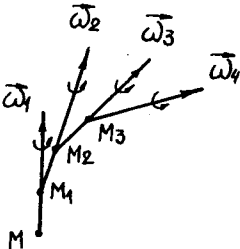


Рис. 15.12

Подамо диференціальне рівняння вихрових ліній. Проекція вектора миттєвої кутової швидкості обертання частки середовища $\vec{\omega}$ на вісь Ox $\omega_x = \omega \cos \alpha$, де α — кут між дотичною в даній точці вихрової лінії і віссю Ox . Частка середовища, що розташована на поверхні вихрової трубки в даній точці, за час dt переміщується на елементарну відстань dS уздовж дотичної до трубки в цій точці. Тоді $dx = dS \cos \alpha$ і, отже, маємо $\frac{dS}{\omega} = \frac{dx}{\omega_x}$. Аналогічно отримуємо два інших співвідношення. Остаточно матимемо

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \tag{15.59}$$

Рівняння (15.59) є диференціальними рівняннями вихрових ліній.

Охарактеризуємо вихрову трубку з кількісного боку. Для цього застосуємо характеристику механічного руху суцільного середовища — секундну об'ємну витрату середовища крізь деяку поверхню S , що у даному випадку визначається так:

$$\int_{(S)} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} \omega_n dS = J, \tag{15.60}$$

де ω_n — проекція вектора $\vec{\omega}$ на нормаль до поверхні S ; J — інтенсивність вихру.

Розглянемо трубку течії, що обмежується двома будь-якими нормальними перерізами S_1 і S_2 (рис. 15.13). Позначимо через \vec{n} вектор нормалі до цих перерізів (рис. 15.14) і через $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ — нормальні складові векторів миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ в перерізах S_1 і S_2 . Виходячи з трубчастої моделі руху суцільного середовища, витрата середовища через бічні поверхні трубок течії відсутня, тобто нормальні складові вектора $\vec{\omega}$ до поверхні трубки дорівнюють нулю. Тоді на підставі умови суцільності потоку середовища витрата середовища через переріз S_1 має дорівнювати витраті середовища через переріз S_2 . Отже,

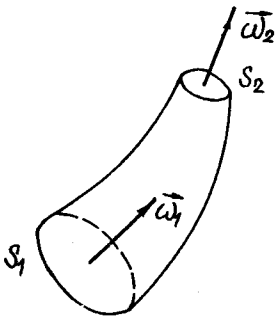


Рис. 15.13

$$J = \int_{(S)} \omega_n dS = \text{const}, \tag{15.61}$$

звідки $\omega_1 S_1 = \omega_2 S_2$.

Рівність (15.61) є відображенням теореми Гельмгольца: інтенсивність вихру залишається сталою уздовж вихрової лінії.

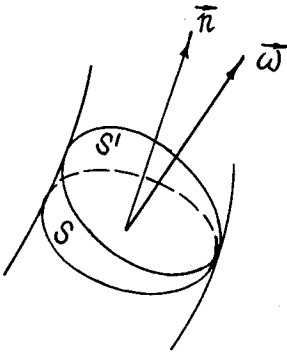


Рис. 15.14

Оскільки перерізи S_1 і S_2 вихрової трубки довільні, то з рівності (15.61) випливає, що вихрові трубки не можуть перериватися, або вихрові трубки будуть замкнені, або будуть закінчуватися на границі середовища.

При вивченні завихреного руху середовища частіше застосовують поняття *вихру швидкості*: $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V} = 2\vec{\omega}$. У цьому випадку інтенсивність вихрової трубки буде відрізнятися тільки за величиною, але не за змістом.

Вихор швидкості, кутову швидкість обертання часток середовища, а також інтенсивність вихрової трубки не можна безпосередньо виміряти.

Більш наочне визначення інтенсивності вихрової трубки можна дати на підставі поняття циркуляції швидкості. Перетворимо за теоремою Стокса криволінійний інтеграл по замкненому контуру L у поверхневий по деякій поверхні S :

$$\Gamma = \oint_{(L)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} \text{rot} \vec{V} \cdot d\vec{S}. \quad (15.62)$$

Підставляючи в рівність (15.62) значення $\text{rot} \vec{V}$, здобудемо

$$\Gamma = \int_{(S)} \text{rot} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = \Omega_n S' = \Omega S' \cos(\widehat{n, S}) = \Omega S, \quad (15.63)$$

де S' — площа перерізу вихрової трубки (рис.15.14), що обмежується контуром L ; S — площа нормального перерізу вихрової трубки.

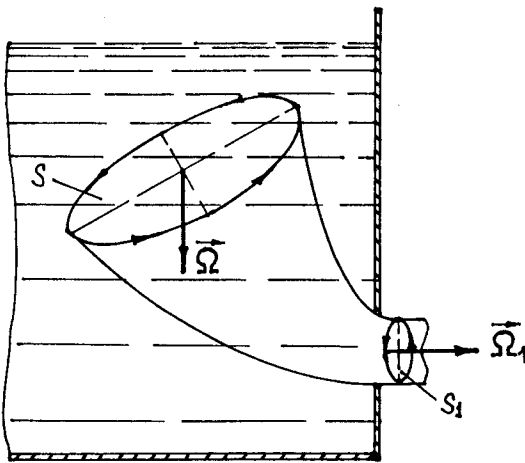


Рис. 15.15

З рівності (15.63) випливає, що інтенсивність вихрової трубки дорівнює циркуляції швидкості по будь-якому контуру, що розташовується на вихровій трубці, й охоплює вихрову трубку.

Таким чином, кількісне визначення інтенсивності вихрової трубки зводиться до визначення циркуляції швидкості. Безпосередньо вимірювання поля швидкостей нині не спричинює складностей, а додавання додатків, що входять до значень $\vec{\Omega}$ або $\vec{\omega}$ і визначають циркуляцію, є операцією достатньо точною і простою.

Одержане рівняння (15.63) дає змогу пояснити фізичний аспект деяких відомих явищ. Розглянемо як приклад процес витікання рідини з великого резервуара крізь малий отвір (рис. 15.15). У цьому випадку має виникнути слабкий обертальний рух створеного потоку в шарі рідини. Моделлю руху буде вихрова трубка з однаковою інтенсивністю як на відстані від отвору, так і у самому отворі. Маємо

$$\int_{(s)} \bar{\Omega} \cdot d\bar{S} = \int_{(s)} \bar{\Omega}_1 \cdot d\bar{S}.$$

Оскільки переріз отвору і його периметр непорівнянно малі відносно розмірів вихрової трубки на відстані від отвору, то $\bar{\Omega}_1$ має бути значно більше $\bar{\Omega}$, тобто відбудеться різке закручування витічного струменя. При цьому значення колових швидкостей тим більші, чим коротше контур інтегрування.

Практична цінність моделей вихрової лінії та вихрової трубки полягає в тому, що, поставивши відповідні фізичні умови, можна враховувати, наприклад, вплив в'язкості рухомого реального середовища, ефекти, які виникають при обтіканні тіл, і т. ін.

Таким чином, рух суцільного середовища можна поділити на два типи:

- 1) частки середовища рухаються тільки поступально. Відповідно рух називається безвихровим (потенціальним);
- 2) частки середовища рухаються як поступально, так і обертально. Такий рух називається вихровим.

15.6. Приклади розв'язання задач з кінематики суцільного середовища

Приклад 15.1. Скласти рівняння руху частки M рідини, що має початкові координати M_0 (3; 2; 4), якщо через 20 с після початку руху частка M має нові координати M_1 (4; 4; 2). Рідина рухається рівномірно і траєкторія руху рідини є прямою лінією.

Розв'язання. У напрямку вісі x рідина за одну секунду проходить відстань

$$\frac{x_1 - x_0}{20} = \frac{4 - 3}{20} = 0,05 \text{ (м)}.$$

Через t с частка буде розміщуватися від початкового положення вздовж осі x на відстані $x - 3 = 0,05t$. Рівняння руху частки M уздовж осі x буде мати вигляд

$$x = 3 + 0,05t.$$

Аналогічно знайдемо рівняння руху частки M уздовж осей y і z :

$$y = 2 + 0,1t;$$

$$z = 4 - 0,1t.$$

Приклад 15.2. Проекції швидкості частки рідини на осі декартової системи координат відповідно $V_x = x^2$; $V_y = y^2$; $V_z = z^2$. Скласти рівняння лінії течії в точці M , що має координати $x_M = 2$; $y_M = 4$; $z_M = 8$.

Розв'язання. Диференціальні рівняння ліній течії мають вигляд:

$$V_y dx = V_x dy;$$

$$V_z dy = V_y dz.$$

За умовою задачі

$$y^2 dx = x^2 dy;$$

$$z^2 dy = y^2 dz.$$

Виокремимо змінні. Матимемо:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2};$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}.$$

Після інтегрування цих рівнянь дістанемо:

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C_1;$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{z} + C_2.$$

Сталі інтегрування визначаємо за координатами точки M :

$$C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4};$$

$$C_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Остаточні рівняння лінії течії мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}; \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Приклад 15.3. Визначити прискорення частки рідини в момент часу, коли абсциса цієї частки $x = 8$ і її траєкторія визначається такими рівняннями руху:

$$x = 2 + 0,01\sqrt{t^5};$$

$$y = 2 + 0,01\sqrt{t^5};$$

$$z = 2,$$

де t — у секундах, x , y , z — у метрах.

Розв'язання. Проекції швидкості частки рідини на координатні осі такі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 0,01\sqrt{t^5}) = 0,025\sqrt{t^3};$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 0,01\sqrt{t^5}) = 0,025\sqrt{t^3};$$

$$V_z = 0.$$

Проекції прискорення частки рідини на координатні осі такі:

$$W_x = \frac{d}{dt}(0,025\sqrt{t^3}) = 0,0375\sqrt{t};$$

$$W_y = \frac{d}{dt}(0,025\sqrt{t^3}) = 0,0375\sqrt{t};$$

$$W_z = 0.$$

Визначаємо час руху частки рідини від початку руху до положення, коли абсциса частки $x = 8$:

$$t = \sqrt[5]{\left(\frac{8-2}{0,01}\right)^2} = 12,9 \text{ (с)}.$$

Прискорення частки рідини

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{(0,0375\sqrt{12,9})^2 + (0,0375\sqrt{12,9})^2} = 0,19 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Приклад 15.4. Визначити вирази проєкцій прискорення частки середовища на осі координат за методом Ейлера, якщо проєкції швидкості цієї частки на осі координат такі:

$$V_x = x^2;$$

$$V_y = y^2;$$

$$V_z = z^2.$$

Визначити також прискорення частки в точці A системи відліку, що має координати $x = 2$, $y = 2$ і $z = 2$, якщо рух середовища усталений.

Розв'язання. Проекції прискорення частки середовища на координатні осі при усталеному русі визначаються за формулами:

$$W_x = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z};$$

$$W_y = V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z};$$

$$W_z = V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Із заданих проекцій швидкостей частки маємо:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V_z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = 2z.$$

Тоді проекції прискорення частки такі:

$$W_x = 2x^3;$$

$$W_y = 2y^3;$$

$$W_z = 2z^3.$$

Повне прискорення частки визначаємо за формулою

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{(2x^3)^2 + (2y^3)^2 + (2z^3)^2} = 2\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}.$$

Прискорення частки середовища в точці A з координатами $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$

$$W_A = 2\sqrt{3 \cdot 2^6} = 27,7 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Приклад 15.5. Визначити проекцію швидкості частки середовища на вісь z , якщо проекції швидкості цієї частки на осі x і y $V_x = 5x$; $V_y = -3y$ і рух середовища усталений.

Розв'язання. З умови нерозривності потоку середовища ($\operatorname{div}\vec{V} = 0$) маємо

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

або

$$5 - 3 + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = -2.$$

Інтегруючи цей вираз, матимемо

$$V_z = -2z + c.$$

Оскільки при $z = 0$ $V_z = 0$, то $c = 0$ і $V_z = -2z$.

Приклад 15.6. Дослідити форму потенціального потоку, заданого рівнянням потенціалу швидкості $\Phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Розв'язання. Функція течії визначається за формулою

$$d\psi = V_x dy - V_y dx.$$

Визначаємо проєкції швидкості:

$$V_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$V_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Підставляючи ці вирази у вираз функції течії й інтегруючи отримане рівняння, здобудемо

$$\psi = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c.$$

Оскільки функція течії для кожної лінії течії стала, тобто $\psi = \operatorname{const}$, то рівняння лінії течії має вигляд $x^2 + y^2 = c$. Отже, потенціальний потік середовища циркуляційний.

Приклад 15.7. Скласти диференціальне рівняння вихрової лінії, якщо проекції швидкості частки середовища такі:

$$V_x = y + 2x;$$

$$V_y = z + 2x;$$

$$V_z = x + 2y.$$

Визначити також інтенсивність вихрової трубки, що має переріз S .

Розв'язання. Визначаємо компоненти вихору за формулами:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (2 - 1) = \frac{1}{2};$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (-1) = -\frac{1}{2};$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (2 - 1) = \frac{1}{2}.$$

Диференціальні рівняння вихрової лінії мають вигляд

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z},$$

або

$$2dx = -2dy = 2dz,$$

звідки після інтегрування матимемо два рівняння вихрової лінії:

$$x = -y + c;$$

$$y = -z + c.$$

Інтенсивність вихрової трубки

$$J = 2\omega S = 2S \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 2S \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = S\sqrt{3} \quad (\text{м/с}^2).$$

Запитання для самоперевірки

1. Яка відміна між методами Лагранжа та Ейлера щодо описання руху суцільного середовища?

2. Як визначається прискорення окремих часток середовища за методом Лагранжа і Ейлера?

3. Що таке лінія течії, трубка течії та функція течії?
4. Як визначити витрату суцільного середовища?
5. Що таке циркуляція швидкості та що вона характеризує?
6. Як записується диференціальне рівняння нерозривності для стаціонарного і нестаціонарного руху середовища?
7. Який механізм руху суцільного середовища?
8. Як визначається швидкість окремої частки змінного та незмінного середовища?
9. Який рух суцільного середовища називається потенціальним, а який вихровим?
10. Який фізичний зміст потенціалу швидкостей?
11. Що таке інтенсивність вихрової трубки?
12. Як записати диференціальні рівняння лінії течії та вихрової лінії?

ЛІТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А. Классическая механика. — М.: Наука, 1974. — 368 с.
2. Акінфієва Л.Ю., Юрокін Л.І., Ягодзінський В.А. Теоретична механіка. Статика. Кінематика. — К.: НМК ВО, 1990. — 222 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1984. — Т. 1. — 504 с.
4. Белоцерковская Л.С., Отческая Ю.П., Ярославцева Г.П. Из опыта преподавания курса “Теоретическая механика” // Теоретическая механика. Сб. науч.-метод. статей. Вып. 7. — М.: Высшая шк., 1976. — С. 10—13.
5. Теоретична механіка. Програма, робочий план, методичні вказівки до вивчення курсу і розв’язування задач / Н.І. Бойко, Л.П. Вржижевський, Г.А. Іздебська та ін. — К.: Вища шк., 1974. — 256 с.
6. Бородин А.И., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. — К.: Радянська шк., 1979. — 607 с.
7. Статика. Виконання розрахунково-графічних завдань дисципліни “Теоретична механіка” з використанням персональних комп’ютерів типу IBM PC / А.А. Бондаренко, О.М. Переяславцев, Є.В. Штефан та ін. — К.: НМК ВО, 1993. — 183 с.
8. Бутенин О.В., Луңц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1979. — Т. 1. — 270 с.
9. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1953. — 204 с.
10. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. — М.: Высшая шк., 1973. — 365 с.

11. *Методические указания к решению задач по разделу "Кинематика" курса "Теоретическая механика"* / О.А. Дубинин, А.А. Бондаренко, А.Н. Переяславцев и др. — К.: КТИПП, 1983. — 66 с.
12. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. — 811 с.
13. *Знаменский Г.М.* Технологическое оборудование свеклосахарных заводов. — М.: Пищепромиздат, 1955. — 452 с.
14. *Ишлинский А.Ю.* Механика: идеи, задачи, приложения. — М.: Наука, 1985. — 624 с.
15. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. — М.: Химия, 1973. — 750 с.
16. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 847 с.
17. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1982. — Ч. 1. — 368 с.
18. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986. — 448 с.
19. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. А.Н. Крылова // Собр. трудов. — М.; Л.: АН СССР, 1936. — Т.7. — 696 с.
20. *Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.* Теоретическая механика. Статика. Кинематика. — К.: Вища шк., 1989. — 351 с.
21. *Технологическое оборудование предприятий бродильной промышленности* / В.Д. Попов, Л.Л. Добросердов, В.Н. Стабников и др. — М.: Пищепромиздат, 1961. — 465 с.
22. *Савин Г.Н., Кильчевский Н.А., Пулята Т.В.* Теоретическая механика. — К.: Гостехиздат, 1963. — 610 с.
23. *Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике* / Под ред. А.А. Яблонского. — М.: Высшая шк., 1985. — 366 с.
24. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1965. — Т. 1. — 342 с. — Т. 2. — 423 с.
25. *Сиротина Г.Н., Ерлыкина Е.С.* Задачник по гидромеханике. — М.: Речной транспорт, 1956. — 133 с.
26. *Процессы и аппараты пищевых производств* / В.Н. Стабников, В.Д. Попов, В.М. Лысянский и др. — М.: Пищевая промышленность, 1976. — 663 с.
27. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. — М.: Наука, 1970. — 478 с.
28. *Тимошенко С.П., Гудьер Д.Ж.* Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
29. *Феодосьев В.И.* Соппротивление материалов. — М.: Наука, 1964. — 539 с.
30. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. — М.; Л.: ОГИЗ, 1947. — 300 с.
31. *Энгельс Ф.* Диалектика природы. — М.: Госполитиздат, 1953. — 253 с.
32. *Яблонский А.А., Никифорова Ф.М.* Курс теоретической механики. — М.: Высшая шк., 1984. — Ч. 1. — 343 с.

Навчальне видання

Серія "Вища освіта ХХІ століття"

БОНДАРЕНКО Анатолій Андрійович,

ДУБІНІН Олег Олександрович,

ПЕРЕЯСЛАВЦЕВ Олександр Миколайович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Підручник

У двох частинах

Частина 1

СТАТИКА. КІНЕМАТИКА

В Україні книгу можна придбати за адресами:

- м. Київ, вул. Л. Толстого, 11/61, маг. "Буква", тел. (044)234-75-08;
- м. Київ, вул. М. Грушевського, 4, маг. "Наукова думка", тел. (044)228-06-96;
- м. Київ, вул. Архітектора Вербицького, 30-б, маг. "Буква", тел. (044)422-57-26;
- м. Київ, Майдан Незалежності, ТЦ "Глобус", магазин "Книжковий світ", тел.: (044)238-59-41;
- м. Вінниця, вул. Гагаріна, 2, маг. "Буква-Вінниця", тел. (0432)35-90-61;
- м. Донецьк, вул. Артема, 147-а, маг. "Будинок книги", тел. (0622)55-44-76;
- м. Євпаторія, вул. Фрунзе, 42, маг. "Буква-Євпаторія", тел. (06569)3-31-44;
- м. Житомир, вул. Київська, 17, маг. "Знання", тел. (0412)37-29-02;
- м. Запоріжжя, просп. Леніна, 147, маг. "Буква-Запоріжжя", тел. (0612)49-00-08;
- м. Івано-Франківськ, Вічовий майдан, 3, маг. "Сучасна українська книга", тел. (03422)3-04-60;
- м. Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 19, маг. "Букініст", тел. (03422)2-38-28;
- м. Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 44, маг. "Книжковий дім "Буква", тел. (03422)7-58-49, 7-58-51;
- м. Кіровоград, вул. Набережна, 13, маг. "Книжковий світ", тел. (0522)24-94-64;
- м. Кривий Ріг, пл. Визволення, 1, маг. "Букініст", тел. (0564)92-37-32;
- м. Львів, просп. Шевченка, 8, книгарня ДВЦ НТШ, тел. (0322)79-85-80;
- м. Львів, просп. Шевченка, 16, маг. "Ноги", тел. (0322)72-67-96;
- м. Луганськ, вул. Радянська, 58, маг. "Глобус-книга", тел. (0642)53-62-30;
- м. Луцьк, просп. Волі, 41, маг. "Знання", тел. (03322)4-23-98;
- м. Рівне, просп. Миру, 16, маг. "Буква-Рівне", тел. (0362)62-04-65;
- м. Сімферополь, вул. Пушкіна, 6, маг. "Знання", тел. (0652)27-54-68;
- м. Сімферополь, вул. Сергєєва-Ценського, 4а, маг. "Буква-Сімферополь", тел. (0652)27-31-53;
- м. Суми, вул. Кірова, 8, маг. "Будинок книги", тел. (0542)22-51-17;
- м. Харків, вул. Петровського, 6/8, маг. "Вища школа", тел. (0572)47-80-20;
- м. Херсон, вул. Леніна, 14/16, маг. "Книжковий ряд", тел. (0552)24-64-23, 22-14-56;
- м. Хмельницький, вул. Подільська, 25, маг. "Книжковий світ", тел. (03822)6-60-73;
- м. Черкаси, вул. Б. Вишневецького, 38, маг. "Світоч", тел. (0472)47-92-20;
- м. Чернігів, вул. Леніна, 45, маг. "Будинок книги", тел. (04622)7-30-03;
- м. Ялта, вул. Московська, 9-а, маг. "Будинок книги", тел. (0654)32-16-00;
- м. Ялта, вул. Гоголя, 24, маг. "Буква-Ялта", тел. (0654)32-37-41.

Книготорговельним організаціям та оптовим покупцям звертатися за тел.: (044) 238-82-62,
234-80-43; факс: 238-82-68. E-mail: sales@books.com.ua <http://www.books.com.ua>

Підп. до друку 17.12.2003. Формат 70×100 1/16.

Папір офс. Друк офс. Гарнітура шкільна.

Ум. друк. арк. 48,375. Обл.-вид. арк. 48,2. Зам. 4-99.

Видавництво "Знання"

01042, м. Київ-34, вул. Стрілецька, 28

Свідцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників

і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 1591 від 03.12.2003

Тел.: (044) 234-80-43, 234-23-36

E-mail: sales@znannia.com.ua

[http // www.znannia.com.ua](http://www.znannia.com.ua)

Віддруковано на ВАТ "Білоцерківська книжкова фабрика",
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.

ISBN 966-8148-01-0

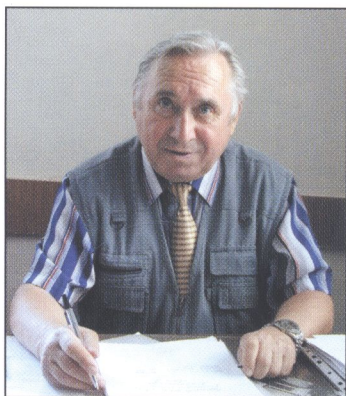


9 789668 148019 >



БОНДАРЕНКО Анатолій Андрійович

Відомий вчений у галузі динаміки елементів конструкцій, коливань механічних систем, демпфуючих властивостей конструкційних матеріалів, динамічної стійкості оболонкових конструкцій, ударостійкості одно- та багатошарових оболонок і пластин. Народився в 1932 році в м. Прилуках на Чернігівщині. Вищу освіту здобув у Київському політехнічному інституті (1955 р.). Працював в Інституті механіки НАН України. З 1984 р. — завідувач кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Національного університету харчових технологій. Доцент, кандидат технічних наук, заслужений працівник освіти України. Автор та співавтор 200 наукових праць, чотирьох монографій та двох навчальних посібників, має більше 10 авторських свідоцтв на винаходи.



ДУБІНІН Олег Олександрович

Вчений у галузі статичної і динамічної елементів конструкцій та статичної і динамічної суцільного середовища. Народився в 1936 р. у м. Москві. Вищу освіту здобув у Київському політехнічному інституті (1958 р.). З 1962 р. працює на кафедрі теоретичної механіки та опору матеріалів Національного університету харчових технологій. Доцент, кандидат технічних наук. В 1978—1981 рр. читав лекції з курсів “Теоретична механіка”, “Опір матеріалів” та “Будівельна механіка” (фр. мовою) студентам Вищої інженерної школи в м. Бамако (Республіка Малі). Автор та співавтор 70 наукових і методичних праць, навчального посібника.



ПЕРЕЯСЛАВЦЕВ Олександр Миколайович

Вчений у галузі статичної і динамічної елементів конструкцій, коливань механічних систем та статичної і динамічної суцільного середовища. Народився в 1941 р. у м. Свердловську. Вищу освіту здобув у Київському технологічному інституті харчової промисловості (1969 р.). З 1972 р. працює на кафедрі теоретичної механіки та опору матеріалів Національного університету харчових технологій. Доцент, кандидат технічних наук. У 1986—1989 рр. читав лекції з курсу “Теоретична механіка” (фр. мовою) студентам університету у м. Константін (НДР Алжир). Автор та співавтор більше 60 наукових та методичних праць, двох навчальних посібників.